

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сахалинский государственный университет»
Кафедра математики**

УТВЕРЖДЕН
на заседании кафедры
«17» июня 2021 г., протокол №11
Зав. кафедрой  Самсикова Н. А.

**ФОНД
ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)
Б1.О.07.17. «Уравнения математической физики»**

Уровень высшего образования
БАКАЛАВРИАТ

Направления подготовки
44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)»

Профиль подготовки
«Математика и физика»

Квалификация выпускника
Бакалавр

Форма обучения: очная

г.Южно-Сахалинск
2021

1. Формируемые компетенции и индикаторы их достижения по дисциплине

Код компетенции	Содержание компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции
УК-1	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Знает: методы критического анализа и оценки современных научных достижений; основные принципы критического анализа. УК-1.2. Умеет: получать новые знания на основе анализа, синтеза и других методов; собирать данные по сложным научным проблемам, относящимся к профессиональной области; осуществлять поиск информации и решений на основе экспериментальных действий. УК-1.3. Владеет: исследованием проблем профессиональной деятельности с применением анализа, синтеза и других методов интеллектуальной деятельности; выявлением научных проблем и использованием адекватных методов для их решения; демонстрацией оценочных суждений в решении проблемных профессиональных ситуаций.
ОПК-8.	Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний.	ОПК-8.1. Знать историю, теорию, закономерности и принципы построения и функционирования образовательных (педагогических) систем, роль и место образования в жизни личности и общества; культурно-исторические, нормативно-правовые, аксиологические, этические, медико-биологические, эргономические, психологические основы (включая закономерности, законы, принципы) педагогической деятельности; классические и инновационные педагогические концепции и теории; теории социализации личности, индикаторы индивидуальных особенностей траекторий жизни, их возможные девиации, а также основы их психодиагностики; основы психодидактики, поликультурного образования, закономерностей

		поведения в социальных сетях; законы развития личности и проявления личностных свойств, психологические законы периодизации и кризисов развития. ОПК-8.2. Уметь осуществлять педагогическое целеполагание и решать задачи профессиональной педагогической деятельности на основе специальных научных знаний; оценивать результативность собственной педагогической деятельности. ОПК-8.3. Владеть алгоритмами и технологиями осуществления профессиональной педагогической деятельности на основе специальных научных знаний; приемами педагогической рефлексии; навыками развития у обучающихся познавательной активности, самостоятельности, инициативы, творческих способностей, формирования гражданской позиции, способности к труду и жизни в условиях современного мира, формирования у обучающихся культуры здорового и безопасного образа жизни.
ПКС-4	способен формировать развивающую образовательную среду для достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения средствами преподаваемых учебных предметов	ПКО-4.1. моделирует и проектирует образовательную среду для формирования результатов обучения, в том числе в предметной области среднего образования «Математика», в целях достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения ПКО-4.2. применяет принципы междисциплинарного подхода для достижения метапредметных и предметных результатов в предметных областях среднего образования «Математика» ПКО-4.3. использует технологии личностного развития, знания в области математического мышления, формируемого учебными пособиями по математике для достижения личностных результатов обучающихся.
ПКС-7	Способен выделять	ПКС-7.1.

	структурные элементы, входящие в систему познания предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения), анализировать их в единстве содержания, формы и выполняемых функций	выделяет и анализирует единицы различных уровней математики в единстве их содержания, формы и функций ПКС-7.2. выделяет и анализирует явления разных уровней математики в их структурном единстве и функциях ПКС-7.3. знает и умеет анализировать организацию систему математических понятий, определений, теорем и их следствий
ПКС-9	Способен устанавливать содержательные, методологические и мировоззренческие связи предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения) со смежными научными областями	ПКС-9.1. Знать: содержательные, методологические и мировоззренческие связи предметной области со смежными научными областями ПКС-9.2. Уметь: устанавливать содержательные, методологические и мировоззренческие связи предметной области со смежными научными областями. ПКС-9.3. Владеть: технологиями определения содержательных, методологических и мировоззренческих связей предметной области со смежными научными областями

2. Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине (модулю)

№ п/п	Контролируемые разделы (темы) дисциплины	Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства
1.	Тема 1. Ряды Фурье	УК-1; ОПК-8; ПКС-4; ПКС-7; ПКС-9	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
2.	Тема 2. Интеграл Фурье	УК-1; ОПК-8; ПКС-4; ПКС-7; ПКС-9	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
3.	Тема 3. Элементы теории поля	УК-1; ОПК-8; ПКС-4; ПКС-7; ПКС-9	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
4.	Тема 4. Основные типы уравнений математической физики. Приведение уравнений с частными производными второго порядка к каноническому виду	УК-1; ОПК-8; ПКС-4; ПКС-7; ПКС-9	Задания к практическим работам, контрольные вопросы

5.	Тема 5. Уравнения гиперболического типа (на примере уравнения колебаний струны)	УК-1; ОПК-8; ПКС-4; ПКС-7; ПКС-9	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
6.	Тема 6. Уравнения параболического типа (уравнения распространения тепла)	УК-1; ОПК-8; ПКС-4; ПКС-7; ПКС-9	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
7.	Тема 7. Уравнения эллиптического типа (уравнения равновесия)	УК-1; ОПК-8; ПКС-4; ПКС-7; ПКС-9	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
8.	Тема 8. Задача Дирихле	УК-1; ОПК-8; ПКС-4; ПКС-7; ПКС-9	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
9.	Промежуточная аттестация (зачет)	УК-1; ОПК-8; ПКС-4; ПКС-7; ПКС-9	

3. Оценочные средства

1. Ряды Фурье. Вопросы для обсуждения
 - 1) Тригонометрический ряд Фурье.
 - 2) Ряд Фурье для чётных и нечётных функций.
 - 3) Ряд Фурье для функции с периодом 2π .
 - 4) Ряд Фурье непериодической функции на промежутке $[a, b]$.
2. Интеграл Фурье. Вопросы для обсуждения
 - 1) Интеграл Фурье.
 - 2) Синус и косинус преобразования Фурье.
 - 3) Интеграл Фурье в комплексной форме.
3. Элементы теории поля. Вопросы для обсуждения
 - 1) Производная по направлению и градиент скалярного поля.
 - 2) Градиент в цилиндрической, полярной и сферической системе координат.
 - 3) Дивергенция векторного поля.
 - 4) Дивергенция в цилиндрической и сферической системе координат.
 - 5) Ротор векторного поля, его выражение в цилиндрической и сферической системе координат.
 - 6) Лапласиан, его выражение в декартовой, цилиндрической и сферической системе координат.
4. Приведение уравнений с частными производными. Вопросы для обсуждения
 - 1) Классификация уравнений с частными производными.
 - 2) Привидение к каноническому виду, уравнение характеристик.
5. Уравнение колебания струны. Вопросы для обсуждения
 - 1) Задача Коши для уравнения колебаний.
 - 2) Свободные колебания конечной струны.
 - 3) Метод разделения переменных (Фурье).
 - 4) Вынужденные колебания конечной струны.
6. Уравнения теплопроводности. Вопросы для обсуждения
 - 1) Вывод уравнения распределения тепла в однородном стержне.
 - 2) Фундаментальное решение уравнения теплопроводности.
 - 3) Формула Пуассона.
7. Уравнения равновесия. Вопросы для обсуждения

- 1) Постановка основных краевых задач для уравнений эллиптического типа.
- 2) Фундаментальное решение уравнения Лапласа.
8. Задача Дирихле. Вопросы для обсуждения
- 1) Уравнение Лапласа в цилиндрической системе координат.
- 2) Решение задачи Дирихле для круга и шара.
- 3) Решение задачи Дирихле для кольца.
- 4) Задача Неймана для круга

Занятие № 2. Интеграл Фурье.

1. Представить функцию в виде интеграла Фурье:

а) $f(x) = \begin{cases} -e^{-x}; & x < 0, \\ e^{-x}; & x \geq 0. \end{cases}$

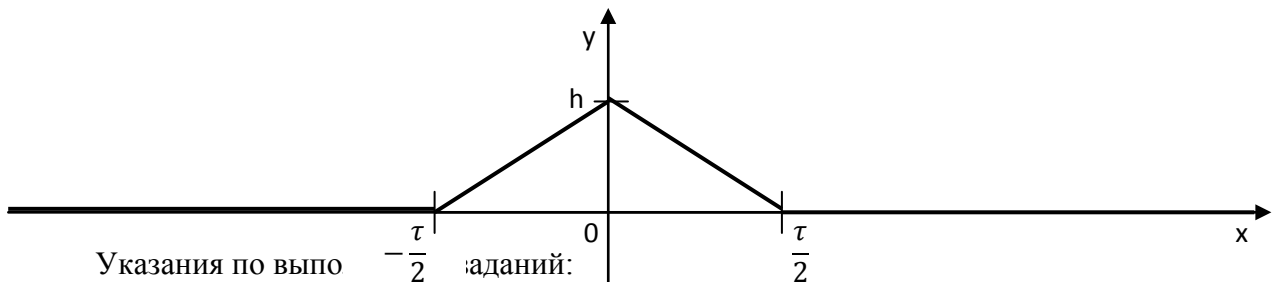
б) $f(x) = \begin{cases} 2; & 0 < x < 3, \\ 1, & x = 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} 0; & x < 0, \\ \pi x; & 0 \leq x \leq 1, \\ 0; & x > 1. \end{cases}$

2. Найти спектральную характеристику функции. Построить график спектра.

а) $f(x) = e^{-ax}, \quad x > 0, \quad a > 0.$

б)



Указания по выполнению:

1. Вычислить интеграл Фурье.
2. Вычислить спектральную характеристику функции.

Занятие. Гиперболические уравнения.

1. Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальным условиям $u(x, 0) = x^2, \quad u'_t(x, 0) = 0$.
2. Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальным условиям $u(x, 0) = 0, \quad u'_t(x, 0) = x$.
3. Струна длины l закреплена на концах и изогнута так, что принимает форму параболы $u = x(l - x)$ и отпущена без начальной скорости. Найти закон колебаний струны.
4. Найти вынужденные колебания струны без начальных смещений и скоростей, если на струну действует равномерно распределенная сила $f(x, t) = A\rho \sin \omega t$ (ρ – линейная плотность струны).

Индивидуальные задания

Индивидуальное задание № 1 «Ряды Фурье»

Вариант № 1

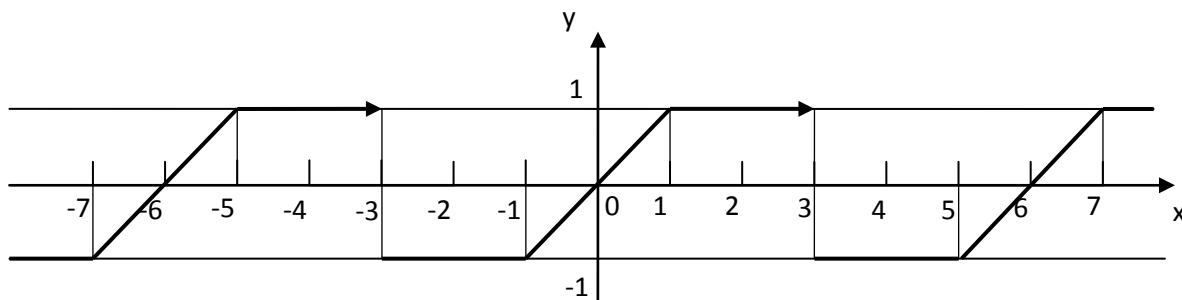
1. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega = 2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi; \pi]$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ x-1, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную в интервале $(0; \pi)$, продолжив (доопределив) ее четным и нечетным образом. Построить графики для каждого продолжения.

$$f(x) = e^x.$$

3. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную графически.



Домашнее задание № 2.

1. Представить функцию в виде интеграла Фурье:

$$f(x) = \begin{cases} 1; & -1 < x < 0, \\ \frac{1}{2}; & x = -1; 0; 1, \\ x; & 0 < x < 1, \\ 0; & |x| > 1. \end{cases}$$

2. Представить функцию в виде интеграла Фурье:

$$1) f(x) = \begin{cases} 1+x; & -1 < x < 0, \\ 1-x; & 0 \leq x < 1, \\ 0; & x \geq 1. \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} 1; & |x| < 1, \\ \frac{1}{2}; & |x| = 1, \\ 0; & |x| > 1. \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} |x|; & |x| < 1, \\ \frac{1}{2}; & |x| = 1, \\ 0; & |x| > 1. \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} \cos x; & |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0; & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$5) f(x) = \begin{cases} \sin x; & |x| \leq \pi, \\ 0; & |x| > \pi. \end{cases}$$

$$6) f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x; & |x| \leq 1, \\ 0; & |x| > 1. \end{cases}$$

$$7) f(x) = \begin{cases} x; & |x| \leq 1, \\ 0; & |x| > 1. \end{cases}$$

$$8) f(x) = \begin{cases} 1; & 0 < x < a, \\ 0; & x \geq a. \end{cases}$$

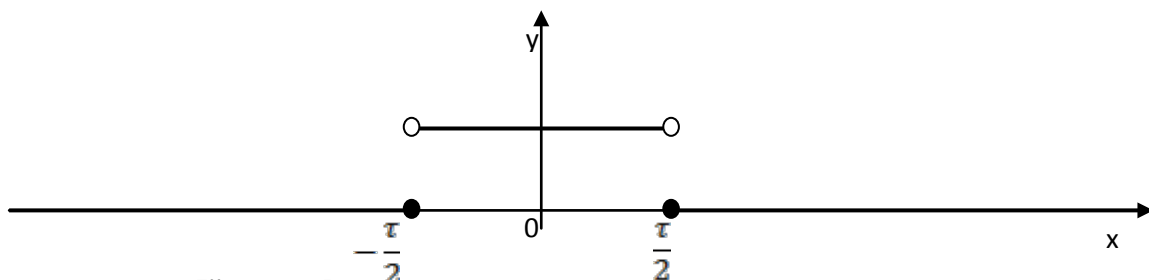
(любопродолжение).

$$9) f(x) = \begin{cases} \cos x; & 0 < x < \pi, \\ 0; & x \geq \pi. \end{cases}$$

(любопродолжение).

3. Найти спектральную характеристику функции:

1)



$$2) f(x) = \begin{cases} h \cos \frac{\pi x}{\tau}, & |x| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & |x| > \frac{\tau}{2}. \end{cases}$$

Индивидуальное задание № 3. Элементы теории поля.

1. Построить линии уровня плоского поля:

1) $u = \sin(x^2 - y^2)$.

2. Построить поверхности уровня скалярного поля:

1) $u = \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$.

3. Найти производную функции $u = f(x; y; z)$ в точке A в направлении вектора $\vec{l}$:

1) $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$, $A(1; 1; 1)$, $\vec{l} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

4. Найти градиент скалярного поля $u(x; y; z)$ в точке A :

1) $u = x^2 - y^2 + yz - z$, $A(1; 0; -1)$.

5. Найти угол между градиентами скалярных полей $u = u(x; y; z)$, $v = v(x; y; z)$ в точке A :

1) $u = \frac{x^2}{2} + 6y^2 + 3\sqrt{6}z^2$, $v = \frac{yz^2}{x^2}$, $A(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{3}})$.

6. 1) В каких точках пространства градиент скалярного поля $u = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}y^2$ перпендикулярен вектору $\vec{a}(2; 4)$?

7. Найти векторные линии следующих векторных полей:

1) $\vec{a} = \frac{1}{x}\vec{i} + \frac{1}{y}\vec{j} + \frac{1}{z}\vec{k}$.

8. Вычислить дивергенцию векторного поля $\vec{a}$ в точке A :

1) $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$, $A(2; 1; 3)$,

9. Проверить соленоидальность векторного поля:

1) $\vec{a} = 3z(x^2 + y^2)\vec{i} - 2y(x^2 + z^2)\vec{j} + 4x(y^2 + z^2)\vec{k}$,

10. Вычислить ротор векторного поля $\vec{a}$:

1) $\vec{a} = yz\vec{i} + xy\vec{j} + xz\vec{k}$.

11. Вычислить ротор векторного поля $\vec{a}$, заданного в цилиндрических или сферических координатах, в точке A :

1) $\vec{a} = \cos \varphi \vec{e}_r + \frac{\sin \varphi}{r} \vec{e}_\varphi - rz \vec{e}_z$, $A(\frac{1}{2}; \pi; 2)$.

12. Проверить потенциальность векторного поля:

1) $\vec{a} = (10xy - 3y^3)\vec{i} + (5x^2 - 9xy^2 + 4y^2)\vec{j}$.

Индивидуальное задание № 4. Приведение уравнений к каноническому виду.

1) Привести уравнение с частными производными к каноническому виду:

1. $4y^2 u''_{x^2} - e^{2x} u''_{xy} - 4y^2 u''_{y^2} = 0$.

2) Привести уравнение с частными производными к каноническому виду:

1. $e^{2x} u''_{x^2} + 2e^{x+y} u''_{xy} + e^{2y} u''_{y^2} - xy = 0$.

3) Привести уравнение с частными производными к каноническому виду:

1. $(1 + x^2) u''_{x^2} + (1 + y^2) u''_{y^2} + x u'_x + y u'_y - 2u = 0$.

4) Привести уравнение с частными производными к каноническому виду:

1. $u''_{x^2} + u''_{xy} - 2u''_{y^2} - 3u'_x - 15u'_y + 27x = 0$.

Индивидуальное задание № 5. Гиперболические уравнения.

1. Найти методом Даламбера:

1) решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальным условиям $u(x, 0) = x$, $u'_t(x, 0) = -x$.

2. Решить уравнение колебания струны:

Струна длины l закреплена на концах и изогнута так, что принимает форму параболы $u = x(l - x)$, и отпущена без начальной скорости. Найти закон колебаний струны.

3. Решить первую смешанную задачу для волнового уравнения на отрезке:

$$1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < 1, 0 < t < \infty, u(x, 0) = x(x - 1), u'_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0.$$

Индивидуальное задание № 6.

Параболические уравнения.

1. Решить смешанную задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u(x, 0) = 3 \cos 3\pi x + 4 \cos 4\pi x, \quad u(0, t) = u(7, t) = 0.$$

2. Решить смешанную задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0, t) = u(3, t) = 0, u(x, 0) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, 0 \leq x \leq \frac{3}{2}, \\ 3 - x, \frac{3}{2} < x \leq 3 \end{cases}$$

3. Решить смешанную задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 7 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u(x, 0) = 6 \sin 3\pi x + 8 - 3x, \quad u(0, t) = 8, u(4, t) = -4.$$

4. Решить смешанную задачу для данного неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальными и граничными условиями $u(x, 0) = u(0, t) = u(\pi, t) = 0$.

$$1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 10 \cos 3x \sin 4t$$

5. Решить смешанную задачу.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 10 \cos 3x \sin 4t, \\ u(x, 0) = 4 \sin 8x - 2\pi + x, \quad u(0, t) = -2\pi, \quad u(\pi, t) = -\pi$$

Контрольная работа.

Вариант № 1

1. Найти методом Даламбера решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальным условиям $u(x, 0) = x$, $u'_t(x, 0) = -x$.

2. Решить уравнение колебания струны:

Струна длины l закреплена на концах, начальное отклонение равно нулю, а начальная скорость имеет вид $u = x(l - x)$. Найти закон колебаний струны.

3. Решить первую смешанную задачу для волнового уравнения на отрезке:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < 1, 0 < t < \infty, u(x, 0) = x(x - 1), u'_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0.$$

Темы рефератов:

1. Дифференциальные уравнения продольных колебаний однородного стержня постоянного сечения (1, гл. 5, § 1).

2. Колебания стержня с одним закрепленным концом (1, гл. 5, § 2).

3. Продольный удар груза по стержню (1, гл. 5, § 3).
4. Вынужденные колебания тяжелого стержня (1, гл. 9, § 2).
5. Вынужденные колебания струны с подвижными концами (1, гл. 9, § 3).
6. Колебания стержня с одним прикрепленным диском (1, гл. 10, § 1,2).
7. Решение уравнения колебания прямоугольной мембраны (2, гл. 2, § 9).
8. Решение уравнения колебания круглой мембраны (2, гл. 2, § 10).
9. Плоская задача Дирихле (для круга) (1, гл. 2, § 12).
10. Распространение тепла в прямоугольной пластине (1, гл. 18, § 6).
11. Распространение тепла в однородном шаре (1, гл. 18, § 5).
12. Решение задачи об остывании бесконечного круглого сечения (1, ч.3, гл. 2, § 11).

Формой аттестации по дисциплине в седьмом семестре согласно учебному плану является зачет. На экзамен выносятся темы, изученные в рамках семестра. Каждому студенту необходимо дать ответ на 1 теоретический вопрос и решить задачу.

Перечень вопросов к зачету

1. Понятие тригонометрического ряда.
2. Интегралы от некоторых тригонометрических функций.
3. Понятие ортогональной системы функций.
4. Ряд Фурье.
5. Разложение непериодической функции в тригонометрический ряд Фурье на отрезке.
6. Достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье.
7. Интеграл Фурье.
8. Косинус-преобразование Фурье.
9. Синус-преобразование Фурье.
10. Комплексная форма интеграла Фурье.
11. Скалярное поле и его характеристика.
12. Скалярное поле в цилиндрических и сферических координатах.
13. Векторное поле. Дивергенция векторного поля.
14. Ротор векторного поля.
15. Интегральные теоремы Стокса и Остроградского-Гаусса.
16. Основные понятия уравнений математической физики.
17. Основные примеры уравнений математической физики.
18. Корректно поставленная задача.
19. Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка с частными производными.
20. Постановка краевых задач для линейного дифференциального уравнения второго порядка.
21. Вывод уравнения колебания струны.
22. Решение уравнения колебания бесконечной струны методом Даламбера (методом характеристик).
23. Решение Даламбера для закрепленной струны.
24. Решение уравнения колебаний струны методом Фурье.
25. Физический смысл решения уравнения струны.
26. Вынужденные колебания струны, закрепленной на концах.
27. Вывод уравнения линейной теплопроводности.
28. Распространение тепла в ограниченном стержне.
29. Распространение тепла в стержне, концы которого находятся при заданных переменных температурах.
30. Неоднородное уравнение теплопроводности.
31. Распространение тепла в бесконечном цилиндре.

32. Уравнение Лапласа. Уравнение Пуассона.
33. Задача о стационарном тепловом состоянии однородного тела.
34. Решение плоской задачи Дирихле.

Критерии оценки:

– **оценка «отлично»** выставляется студенту, если студент свободно ориентируется в теоретическом материале; умеет изложить и корректно оценить различные подходы к излагаемому материалу, способен сформулировать и доказать собственную точку зрения; обнаруживает свободное владение понятийным аппаратом; демонстрирует готовность применять теоретические знания в практической деятельности и полное освоение показателей формируемых компетенций;

– **оценка «хорошо»** выставляется студенту, если студент хорошо ориентируется в теоретическом материале; имеет представление об основных подходах к излагаемому материалу; знает определения основных теоретических понятий излагаемой темы, в основном демонстрирует готовность применять теоретические знания в практической деятельности и освоение большинства показателей формируемых компетенций;

– **оценка «удовлетворительно»** выставляется студенту, если студент может ориентироваться в теоретическом материале; в целом имеет представление об основных понятиях излагаемой темы, частично демонстрирует готовность применять теоретические знания в практической деятельности и освоение некоторых показателей формируемых компетенций;

– **оценка «неудовлетворительно»** выставляется студенту, если студент не ориентируется в теоретическом материале; не сформировано представление об основных понятиях излагаемой темы, не демонстрирует готовность применять теоретические знания в практической деятельности и освоение показателей формируемых компетенций.

Составитель



Чуванова Г. М.

«17» июня 2021 г.