

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сахалинский государственный университет»
Кафедра математики**

УТВЕРЖДЕН
на заседании кафедры
«17» июня 2021 г., протокол №11
Зав. кафедрой _____  Самсикова Н. А.

**ФОНД
ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)
Б1.О.07.09. «Теория функций комплексного переменного»**

Уровень высшего образования
БАКАЛАВРИАТ

Направления подготовки
44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)»

Профиль подготовки
«Математика и физика»

Квалификация выпускника
Бакалавр

Форма обучения: очная

г. Южно-Сахалинск
2021

1. **Формируемые компетенции и индикаторы их достижения по дисциплине**

Код компетенции	Содержание компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции
УК-1	способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Знает: методы критического анализа и оценки современных научных достижений; основные принципы критического анализа. УК-1.2. Умеет: получать новые знания на основе анализа, синтеза и других методов; собирать данные по сложным научным проблемам, относящимся к профессиональной области; осуществлять поиск информации и решений на основе экспериментальных действий. УК-1.3. Владеет: исследованием проблем профессиональной деятельности с применением анализа, синтеза и других методов интеллектуальной деятельности; выявлением научных проблем и использованием адекватных методов для их решения; демонстрацией оценочных суждений в решении проблемных профессиональных ситуаций.
ОПК-8.	Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний.	ОПК-8.1. Знать историю, теорию, закономерности и принципы построения и функционирования образовательных (педагогических) систем, роль и место образования в жизни личности и общества; культурно-исторические, нормативно-правовые, аксиологические, этические, медико-биологические, эргономические, психологические основы (включая закономерности, законы, принципы) педагогической деятельности; классические и инновационные педагогические концепции и теории; теории социализации личности, индикаторы индивидуальных особенностей траекторий жизни, их возможные девиации, а также основы их психодиагностики; основы психодидактики, поликультурного

		образования, закономерностей поведения в социальных сетях; законы развития личности и проявления личностных свойств, психологические законы периодизации и кризисов развития. ОПК-8.2. Уметь осуществлять педагогическое целеполагание и решать задачи профессиональной педагогической деятельности на основе специальных научных знаний; оценивать результативность собственной педагогической деятельности. ОПК-8.3. Владеть алгоритмами и технологиями осуществления профессиональной педагогической деятельности на основе специальных научных знаний; приемами педагогической рефлексии; навыками развития у обучающихся познавательной активности, самостоятельности, инициативы, творческих способностей, формирования гражданской позиции, способности к труду и жизни в условиях современного мира, формирования у обучающихся культуры здорового и безопасного образа жизни.
ПКС-4	способен формировать развивающую образовательную среду для достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения средствами преподаваемых учебных предметов	ПКО-4.1. моделирует и проектирует образовательную среду для формирования результатов обучения, в том числе в предметной области среднего образования «Математика», в целях достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения ПКО-4.2. применяет принципы междисциплинарного подхода для достижения предметных и предметных результатов в предметных областях среднего образования «Математика» ПКО-4.3. использует технологии личностного развития, знания в области математического мышления, формируемого учебными пособиями по математике для достижения личностных результатов учащихся.
ПКС-7	Способен выделять	ПК-2.1. выделяет и анализирует

	структурные элементы, входящие в систему познания предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения), анализировать их в единстве содержания, формы и выполняемых функций	единицы различных уровней математики в единстве их содержания, формы и функций ПК-2.2. выделяет и анализирует явления разных уровней математики в их структурном единстве и функциях ПК-2.3. знает и умеет анализировать организацию системы математических понятий, определений, теорем и их следствий.
ПКС-9	Способен устанавливать содержательные, методологические и мировоззренческие связи предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения) со смежными научными областями	ПК-4.1. готов выявлять связи математики в широком контексте, опираясь на содержательный потенциал смежных предметных областей (физики, биологии, химии и пр.) ПК-4.2. может учитывать открытия широкого спектра естественных и иных научных исследований, применять принципы междисциплинарного подхода для решения профессиональных задач

2. Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине (модулю)

№ п/п	Контролируемые разделы (темы) дисциплины	Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства
1.	Кривые и области на комплексной области	УК-1; ОПК-8; ПКС-4; ПКС-7; ПКС-9	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
2.	Функции комплексного переменного	УК-1; ОПК-8; ПКС-4; ПКС-7; ПКС-9	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
3.	Предел и непрерывность функции комплексного переменного. Дифференцируемость. Аналитические функции.	УК-1; ОПК-8; ПКС-4; ПКС-7; ПКС-9	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
4.	Элементарные функции и соответствующие им конформные отображения	УК-1; ОПК-8; ПКС-4; ПКС-7; ПКС-9	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
5.	Интегрирование функции комплексного переменного	УК-1; ОПК-8; ПКС-4; ПКС-7; ПКС-9	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
6.	Ряды Тейлора и Лорана.	УК-1; ОПК-8; ПКС-4; ПКС-7; ПКС-9	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
7.	Вычеты и их применение.	УК-1; ОПК-8; ПКС-4; ПКС-7;	Задания к практическим работам,

		ПКС-9	контрольные вопросы
8.	Промежуточная аттестация (зачет)	УК-1; ОПК-8; ПКС-4; ПКС-7; ПКС-9	Вопросы к зачету

3. Оценочные средства

Вопросы для обсуждения к практическим занятиям

1. Комплексные числа.
 - 1) Алгебраическая форма комплексного числа.
 - 2) Действия над комплексными числами.
 - 3) Тригонометрическая форма комплексного числа.
 - 4) Решение уравнений в поле комплексных чисел.
2. Кривые и области на комплексной плоскости.
 - 1) Кривые на комплексной плоскости.
 - 2) Области на комплексной плоскости.
 - 3) Предел последовательности.
3. Функции комплексного переменного.
 - 1) Действительная и мнимая части функции комплексного переменного.
 - 2) Образы кривых при данном преобразовании.
 - 3) Обратная функция.
4. Предел функции комплексного переменного.
 - 1) Предел функции комплексного переменного.
 - 2) Непрерывность функции комплексного переменного.
 - 3) Дифференцируемость функции комплексного переменного.
5. Аналитические и гармонические функции.
 - 1) Гармонические функции.
 - 2) Аналитические функции.
6. Конформные отображения.
 - 1) Конформное отображение.
 - 2) Угол поворота при данном отображении.
 - 3) Коэффициент растяжения при заданном растяжении.
7. Элементарные функции (4 ч.)
 - 1) Линейная функция.
 - 2) Степенная функция.
 - 3) Показательная функция.
 - 4) Тригонометрические функции.
 - 5) Логарифмическая функция.
 - 6) Обратные тригонометрические функции.
8. Интеграл от функции комплексного переменного.
 - 1) Интеграл от функции комплексного переменного.
 - 2) Интегральная формула Коши.
9. Ряды Тейлора.
 - 1) Степенные ряды.
 - 2) Ряды Тейлора.
 - 3) Область сходимости степенного ряда.
10. Ряды Лорана.
 - 1) Ряд Лорана.
 - 2) Область сходимости ряда Лорана.
11. Вычеты.
 - 1) Вычеты функции комплексного переменного.
 - 2) Классификация особых точек.

12. Применение вычетов к вычислению интегралов.

- 1) Вычисление интегралов от функции действительного переменного.
- 2) Вычисление интегралов от функции комплексного переменного.

Пример практического занятия.

Занятие № 4. Предел функции комплексного переменного.

Непрерывность функции комплексного переменного. Дифференцируемость функции комплексного переменного.

1. Доказать, что не существует предел в точке $z = 0$:

а) $w = \frac{\operatorname{Re} z}{z}$, б) $w = \frac{z}{|z|}$, в) $w = \frac{\operatorname{Im}(z^2)}{|z|^2}$, г) $w = \frac{\bar{z}}{z}$.

2. Вычислить предел функции в данной точке:

а) $w = \bar{z}, z = i$, б) $w = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, z = 0$,

в) $w = \frac{z^2}{|z|}, z = 0$, г) $w = \frac{z}{z-i}, z = \infty$.

3. Доказать непрерывность функции в области определения:

а) $w = 2z^3$, б) $w = z|z|$, в) $w = \bar{z} \operatorname{Re} z$, г) $w = \frac{1}{z}$.

4. Пользуясь условиями дифференцируемости, доказать, что:

а) функции $w = \operatorname{Re} z, w = \operatorname{Im} z, w = \bar{z} + \operatorname{Re} z, w = Az + B\bar{z} (A \neq 0, B \neq 0)$

не имеют производной ни в одной точке;

б) функция $w = z \operatorname{Re} z$ дифференцируема в точке $z = 0$.

Указания по выполнению заданий:

1. Использовать определение предела функции по Гейне.
2. Доказать непрерывность функции, выделив действительную и мнимую части функции комплексного переменного.
3. Использовать условия Коши-Римана.

Темы дисциплины для самостоятельного изучения

1. Бесконечность и стереографическая проекция.
2. Критерий Коши существования предела функции комплексного переменного.
3. Элементарные функции.
4. Классификация особых точек однозначной аналитической функции.
5. Вычеты и их приложения.

Вопросы для самоконтроля:

1. Понятие предела функции комплексного переменного.
2. Свойства предела функции комплексного переменного.
3. Понятие функции комплексного переменного.
4. Понятие конформного отображения.
5. Понятие аналитической функции.
6. Понятие вычета.
7. Приложение вычета к вычислению интегралов.

Индивидуальные задания

Задание № 1. Комплексные числа.

1. Представить в тригонометрической форме; в показательной форме:

а) $-1 + i$ б) $-1 + i\sqrt{3}$

2. Вычислить:

а) $(2 + 3i)(4 - 5i) + (2 - 3i)(4 + 5i)$ б) $\frac{(1 + 2i)^3 - (2 - i)^3}{(1 - i)^3 - (2 + i)^3}$

$$в) (1+2i)^6$$

$$г) \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{20}$$

$$д) \sqrt[3]{-i}$$

$$е) \sqrt{-5+12i}$$

3. Решить уравнения:

$$а) (1+2i)x + (3-5i)y = 1-3i$$

$$б) |z| + z = 2+i$$

4. Изобразить кривые на комплексной плоскости:

$$а) |z-1| = |z+1|$$

$$б) |z+1-2i| = 3$$

$$в) z = it; \quad t \in [-1;1] \quad г) z = \sin c \cdot ch t + i \cos c \cdot sh t, \quad t \in R$$

5. Изобразить области на комплексной плоскости:

$$а) \operatorname{Re} z^2 > 1$$

$$б) \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z} \right) < -\frac{1}{2}$$

Задание № 2. Функция комплексного переменного.

Аналитические функции.

1. Найти значение функции комплексного переменного в данной точке:

$$а) w = z^2 - i, \quad z_0 = 2+i \quad б) w = \sqrt{\sqrt{z}+1}, \quad z_0 = i$$

2. Выделить действительную и мнимую части функции комплексного переменного:

$$а) w = b + az - z^2 \quad б) w = \frac{\bar{z}}{i} - \frac{i}{z} \quad в) w = e^{i\alpha} z - e^{i\beta} \bar{z}$$

3. Представить функцию w как функцию комплексного переменного z :

$$w = \frac{x(ix-1) + iy(y+1)}{x^2 + y^2}$$

4. Доказать непрерывность функции: $w = \bar{z}^2$

5. Найти область дифференцируемости функции комплексного переменного. Записать ее производную, если она существует:

$$а) w = z^2 \cdot \operatorname{Im} z \quad б) w = tgx + itgy \quad в) w = \frac{1}{2-z}$$

6. Установить, являются ли функции комплексного переменного:

$$а) \text{ Гармоническими: } \varphi(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$б) \text{ Сопряжено-гармоническими: } \begin{aligned} u(x, y) &= x \\ v(x, y) &= -y \end{aligned}$$

7. Найти аналитическую функцию по ее заданной действительной или мнимой части:

$$а) u(x, y) = x^2 - y^2 + x \quad б) v(x, y) = 2e^x \sin y$$

8. Найти коэффициент растяжения и угол поворота данного отображения:

$$w = z^2, \quad z_0 = \sqrt{2}(1+i)$$

9. Найти области сжатия и растяжения при данном отображении: $w = -z^2$

10. Найти множество точек, для которых:

$$а) k = 1: w = -z^3 \quad б) \varphi = 0: w = z^2 + iz$$

Задание №3. Элементарные функции.

Ряды Лорана. Интегралы функций. п.

1. Вычислить значения элементарных функций:

$$а) e^{1+i} \quad б) \cos(1-i) \quad в) \operatorname{Ln} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) \quad г) (-1)^i$$

2. Решить уравнение:
 а) $e^{3z} = 2 - 2i$ б) $sh\ iz = -1$
3. Найти дробно-линейную функцию $\omega = f(z)$, переводящую точки $-1, i, i+1$ в $0, 2i, 1-i$.
4. Исследовать числовые ряды с комплексными членами на сходимость:
 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{2n}}{i + n^2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{3^n}$
5. Найти круг сходимости степенного ряда с комплексными членами:
 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^n}{2^{n+1} \cdot 3^{n+1}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(z-i)^n$
6. Найти область сходимости ряда Лорана: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{-n} \cdot z^n$
7. Разложить данную функцию по данным степеням в данной области:
 а) в ряд Тейлора $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$ в круге $|z| < 1$
 б) в ряд Лорана по степеням $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$, $2 < |z| < 3$
8. Вычислить интегралы:
 а) $\int_0^{3+2i} z\ dz$
 б) $\oint_{C^+} (2z + 3\bar{z})\ dz$, C – нижняя половина окружности $|z|=1$ и диаметр, стягивающий крайние точки.
9. Вычислить интеграл, используя интегральную формулу Коши:
 $\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z(z^2-1)}$, $\Gamma: |z+1| = \frac{1}{2}$

Контрольная работа № 1

Вариант № 1

1. Решить уравнение: $(x-2i)^2 + 2-yi = 2+6i$.
2. Вычислить: $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1002}$.
3. Найти множество точек, заданных неравенством: $\left|\frac{z+2}{z-1}\right| \geq 2$.
4. Найти область дифференцируемости и производную функции:
 $w = z + Rez$.
5. Найти аналитическую функцию по заданной части: $u(x, y) = 2xy + 3$
6. Найти область расширения при отображении: $w = e^{z-1}$.

Контрольная работа № 2

Вариант № 1

1. Вычислить: а) $ctg(1-i\pi)$, б) $Ln(1+i\sqrt{3})$, в) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{-2i}$.
2. Вычислить интеграл $\int_{\Gamma} (Rez + Imz)dz$ по прямой от 0 до $1+2i$.
3. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{1}{z^2-z-6}$ в кольце $2 < |z| < 3$.
4. Вычислить интеграл, используя теорему о вычетах:

$$\oint_C \frac{2z+1}{z^2-4z+3} dz, \quad C: |z-3| = 1.$$

Критерии оценки:

- оценка «отлично» выставляется студенту, если работа выполнена полностью и безошибочно;
- оценка «хорошо» выставляется студенту, если в работе могут быть отдельные вычислительные ошибки;
- оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если решено правильно более половины заданий;
- оценка «неудовлетворительно» выставляется, если решено правильно менее половины заданий.

Темы рефератов, докладов

Реферат должен быть представлен текстовыми и таблично – графически-ми материалами. К защите реферата студент должен приготовить краткое сообщение (не более 10 минут), в котором должен изложить основные результаты.

.

Темы рефератов по теории функций комплексного переменного.

1. Бесконечность и стереографическая проекция.
2. Элементарная функция и ее риманова поверхность.
3. Степенная функция с натуральным показателем.
4. Степенная функция с дробным показателем.
5. Степенная функция с рациональным показателем.
6. Дробно-рациональная функция.
7. Показательная функция.
8. Тригонометрические функции.
9. Логарифмическая функция.
10. Обратные тригонометрические функции.
11. Обобщенная степенная функция.

Критерии оценки:

- оценка «отлично» выставляется за полное раскрытие темы доклада, при условии правильного ответа на вопросы преподавателей. Студент правильно определяет понятия, свободно ориентируется в теоретическом материале.
- оценка «хорошо» выставляется, если есть незначительные ошибки при ответе на вопросы преподавателя. Студент не очень свободно ориентируется в теоретическом материале.
- оценка «удовлетворительно» выставляется, если тема раскрыта не полностью, есть незначительные ошибки при ответе на вопросы преподавателя. Студент неточно определяет понятия.
- оценка «неудовлетворительно» выставляется в случае, если содержание реферата не соответствует теме, есть значительные ошибки при ответе на вопросы преподавателей. Студент неправильно определяет основные понятия.

Перечень вопросов к зачету

1. Комплексная числовая последовательность и ее предел.
2. Бесконечность и стереографическая проекция.
3. Понятие функции комплексного переменного.
4. Отображение кривой. Отображение области. Обратная функция.
5. Понятие предела функции комплексного переменного.
6. Критерий Коши существования конечного предела функции.
7. Теоремы о пределах.

8. Непрерывность функции комплексного переменного.
9. Производная и дифференциал функции комплексного переменного.
10. Основные правила дифференцирования. Условия Коши-Римана.
11. Аналитические и гармонические функции.
12. Геометрический смысл аргумента и модуля производной функции комплексного переменного.
13. Линейная функция.
14. Функция $w = \frac{1}{z}$.
15. Дробно-линейная функция.
16. Степенная функция с натуральным показателем.
17. Степенная функция с дробным показателем.
18. Показательная функция.
19. Тригонометрическая и гиперболические функции.
20. Логарифмическая функция.
21. Общая степенная функция.
22. Обратные тригонометрические и гиперболические функции.
23. Понятие интеграла от функции комплексного переменного.
24. Свойства интеграла от функции комплексного переменного.
25. Интегральные формулы Коши.
26. Первообразная.
27. Числовые ряды в комплексной области.
28. Признаки сходимости числовых рядов.
29. Функциональные ряды. Равномерная сходимость.
30. Степенные ряды.
31. Ряды Тейлора.
32. Нули аналитической функции.
33. Понятие об аналитическом продолжении.
34. Обобщенные степенные ряды.
35. Разложение функции в ряд Лорана.
36. Классификация особых точек.
37. Особенности функции в бесконечно удаленной точке.
38. Целые и мероморфные функции.
39. Вычеты и их вычисление.
40. Основная теорема о вычетах.
41. Применение вычетов к вычислению интегралов.
42. Понятие логарифмического вычета.

Каждая дисциплина учебного плана оценивается по 100-балльной системе. Перевод баллов в оценки пятибалльной системы осуществляется следующим образом:

85-100 баллов	<i>отлично</i>
70-84 балла	<i>хорошо</i>
52-69 баллов	<i>удовлетворительно</i>
0-51 балл	<i>неудовлетворительно</i>

Составитель _____  Чуванова Г. М.

«17» июня 2021 г.