МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САХАЛИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ОФ СахГУ

УТВЕРЖДАЮ
Директор Гаврош О.А
"18" 06 2019 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
по выполнению внеаудиторной самостоятельной работы

Дисциплина ЕН 01 математика

Специальности 13.02.03 Электрические станции, сети и системы

Форма обучения очная

2019 г

Методические рекомендации по выполнению внеаудиторной самостоятельной работы составлены на основе ФГОС СПО по специальности 13.02.03 Электрические станции, сети и системы и в соответствии с рабочей программой дисциплины математика

Разработчики:

преподаватель И.А. Ткаченко

(занимаемая должность) (инициалы, фамилия)

Рассмотрено и одобрено на заседании ПЦК
Протокол № 6 от «18» июня 2019 г.
Председатель ПЦК

СОДЕРЖАНИЕ

1. Тематический план
(из рабочей программы дисциплины ЕН 01 Математика……..4
2. Содержание самостоятельной работы……...……5
Методические рекомендации по выполнению работ…….…… 7
Критерии оценки…….11
3. Список информационных источников…… 36

1. Тематический план

2.3. *Тематический план и содержание учебной дисциплины "МАТЕМАТИКА"*

Наименование разделов и тем	Содержание учебного материала, лабораторные работы и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, курсовая работа (проект)	Объем часов	Уровень освоения
Раздел 1 Математический анализ		**29**	
Введение	**Содержание учебного материала:** История возникновения, развития и становления математики как основополагающей дисциплины, необходимой для изучения профессиональных дисциплин. Цели, задачи математики. Связь математики с общепрофессиональными и специальными дисциплинами.	2	1
Тема 1.1 Дифференциальное и интегральное исчисление	**Содержание учебного материала:** Функции одной независимой переменной. Пределы. Непрерывность функций. Производная, геометрический смысл. Исследование функций. Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование. Замена переменной. Определенный интеграл. Вычисление определенного интеграла. Геометрический смысл определенного интеграла. Функции нескольких переменных. Приложение интеграла к решению прикладных задач. Частные производные.	10	2
	Практическая работа. Вычисление пределов функций с использованием первого и второго замечательного пределов. Исследование функций на непрерывность. Нахождение производных по алгоритму. Вычисление производной сложных функций. Интегрирование простейших функций. Вычисление простейших определенных интегралов. Нахождение частных производных.	4	
	Самостоятельная работа. Исследование функций на непрерывность. Нахождение производных по алгоритму. Вычисление производной сложной функции. Вычисление простейших определенных интегралов. Нахождение частных производных.	3	
Тема 1.2 Обыкновенные дифференциальные уравнения	**Содержание учебного материала:** Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Общий и частные решения. Однородные дифференциальные уравнений первого порядка. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.	2	2
	Практическая работа. Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными; однородных дифференциальных уравнений первого порядка; линейных дифференциальных уравнений первого порядка; линейных однородных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Решение прикладных задач.	3	
	Самостоятельная работа. Решение однородных дифференциальных уравнений первого порядка. Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Решение линейных однородных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.	5	
Тема 1.3 Дифференциальные уравнения в частных производных	**Содержание учебного материала:** Простейшие дифференциальные уравнения в частных производных. Дифференциальные уравнения линейные относительно частных производных.	2	2
	Практическая работа. Решение простейших дифференциальных уравнений линейных относительно частных производных.	3	

	Самостоятельная работа. Решение простейших дифференциальных уравнений в частных производных. Решение дифференциальные уравнения первого порядка. Решение линейные относительно частных производных.	3	
Тема 1.4 **Ряды**	**Содержание учебного материала:** Числовые ряды. Сходимость и расходимость числовых рядов. Признак сходимости Даламбера. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость рядов. Функциональные ряды. Степенные ряды. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена.	2	2
	Практическая работа. Определение сходимости рядов по признаку Даламбера. Определение сходимости знакопеременных рядов. Разложение функции в ряд Маклорена.	2	
	Самостоятельная работа. Доказательство рядов на их сходимость**.** Сходимость степенных рядов.	2	
Раздел 2 Основы дискретной математики		**10**	
Тема 2.1 Множества и отношения. Свойства отношений. Операции над множествами	**Содержание учебного материала:** Элементы и множества. Задание множеств. Операции над множествами. Свойства операций над множествами. Отношения. Свойства отношений.	3	1
	Практическая работа. Отношения. Свойства отношений.	2	
	Самостоятельная работа. Множества. Операции над множествами. Отношения. Свойства отношений.	3	
Тема 2.2 Основные понятия теории графов	**Содержание учебного материала:** Графы. Основные определения. Элементы графов. Виды графов и операции над ними.	3	2
	Практическая работа. Виды графов и операции над ними.	2	
	Самостоятельная работа. Виды графов и операции над ними.	3	
Раздел 3 Основы теории вероятностей и математической статистики		13	
Тема 3.1 Вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей	**Содержание учебного материала:** Понятие события и вероятности события. Достоверные и невозможные события. Классическое определение вероятностей. Теорема сложения вероятностей. Теорема умножения вероятностей.	2	**1**
	Практическая работа. Решение простейших задач на определение вероятности с использованием теоремы сложения вероятностей.	4	
	Самостоятельная работа. Определение достоверных и невозможных событий. Задачи на определение событий и вероятности события. Теорема сложения вероятностей. Теорема умножения вероятностей.	5	
Тема 3.2 Случайная величина,	**Содержание учебного материала:** Случайная величина. Дискретная и непрерывная случайные величины. Закон распределения случайной величины.	2	2
	Практическая работа. По заданному условию построить закон распределения дискретной случайной величины.	2	

ее функция распределения	**Самостоятельная работа.** Решение задач на построение закона распределения дискретной случайной величины.	1	
Тема 3.3 Математическое ожидание и дисперсия случайной величины	**Содержание учебного материала:** **Математическое ожидание дискретной случайной величины.** Дисперсия случайной величины. Среднее квадратичное отклонение случайной величины.	2	1
	Практическая работа. Нахождение математического ожидания, дисперсии и среднего квадратичного отклонения дискретной случайной величины заданной законом распределения.	2	
	Самостоятельная работа. Решения задач на вычисление и нахождения математического ожидания.	1	
Раздел 4 Основные численные методы		**14**	
Тема 4.1 Численное интегрирование	**Содержание учебного материала:** Формулы прямоугольников. Формула трапеций. Формула Симпсона. Абсолютная погрешность при численном интегрировании.	2	2
	Практическое занятие. Вычисление интегралов по формулам прямоугольников, трапеций и формул Симпсона. Оценка погрешности.	2	
	Самостоятельная работа. Решение задач на применение формуле Симпсона. Вычисление интегралов по формулам прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона.	2	
Тема 4.2 Численное дифференцирование	**Содержание учебного материала:** Численное дифференцирование. Формулы приближенного дифференцирования, основанные на интерполяционных формулах Ньютона. Погрешность в определении производной.	2	2
	Практическая работа. Нахождение производных в функции в точке х по заданной таблично функции y=f(x) методом численного дифференцирования**.**	2	
	Самостоятельная работа. Вычисление и нахождение производных функций в точке ч по заданной таблично функции y=f(x) Применение метода численного дифференцирования.	2	
Тема 4.3 Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений	**Содержание учебного материала:** Построение интегральной кривой. Метод Эйлера.	2	2
	Практическая работа. Нахождение значения функции с использованием метода Эйлера.	2	
	Самостоятельная работа. Решение задач на построение интегральных кривых. Вычисление значений функции по методу Эйлера.	3	

2. Содержание самостоятельной работы

Самостоятельная работа над учебным материалом состоит из следующих элементов:
1. Изучение материала по учебнику.
2. Выполнение еженедельных домашних заданий.
3. Выполнение внеаудиторной самостоятельной работы (ВСР).

При выполнении (ВСР) обучающийся может обращаться к преподавателю для получения консультации.

Внеаудиторная самостоятельная работа обучающихся – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская, проектная работа, выполняемая за рамками расписания учебных занятий по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия и является обязательной для каждого студента.

Целью самостоятельной работы учащихся является:

 обеспечение профессиональной подготовки выпускника в соответствии с ФГОС СПО;
 формирование и развитие общих компетенций, определённых в ФГОС СПО;
 формирование и развитие профессиональных компетенций, соответствующих основным видам профессиональной деятельности.

Задачами, реализуемые в ходе проведения внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся, в образовательной среде являются:

 систематизация, закрепление, углубление и расширение полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
 развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
 формирование самостоятельности мышления: способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
 овладение практическими навыками применения информационно-коммуникационных технологий в профессиональной деятельности;
 развитие исследовательских умений.

Объем времени, отведенный на внеаудиторную самостоятельную работу, находит свое отражение:

 в рабочем учебном плане – в целом по циклам основной профессиональной образовательной программы, отдельно по каждому из учебных циклов, по каждой дисциплине, междисциплинарному курсу и профессиональному модулю;
 в рабочих программах учебных дисциплин и профессиональных модулей с ориентировочным распределением по разделам и темам.

Контроль результатов самостоятельной работы обучающихся может осуществляться в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия и самостоятельную работу по дисциплине математика, и может проходить в письменной, устной или смешанной форме с предоставлением изделия или продукта творческой деятельности.

Критериями оценки результатов внеаудиторной самостоятельной работы обучюащегося являются:

 уровень освоения учебного материала;
 умение использовать теоретические знания и умения при выполнении практических задач;
 уровень сформированности общих и профессиональных компетенций.

Выполнение ВСР способствует формированию общих компетенций:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, исходя из цели и способов ее достижения, определенных руководителем.

ОК 3. Анализировать рабочую ситуацию, осуществлять текущий и итоговый контроль, оценку и коррекцию собственной деятельности, нести ответственность за результаты своей работы.

ОК 4. Осуществлять поиск информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, клиентами.

Указания к выполнению ВСР

1. ВСР нужно выполнять в отдельной тетради в клетку, чернилами черного или синего цвета. Необходимо оставлять поля шириной 5 клеточек для замечаний преподавателя.
2. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.
3. Оформление решения задачи следует завершать словом «Ответ».
4. После получения проверенной преподавателем работы студент должен в этой же тетради исправить все отмеченные ошибки и недочеты. Вносить исправления в сам текст работы после ее проверки запрещается.
5. Оценивание индивидуальных образовательных достижений по результатам выполнения ВСР производится в соответствии с универсальной шкалой (таблица).

Процент результативности (правильных ответов)

Критерии оценки

Самостоятельная работа, подготовленная студентами сдается ведущему преподавателю в соответствии с временным графиком отраженном в КТП по данной дисциплине.

По итогам каждой работы выставляется оценка:

90 ÷ 100% **5 «отлично»** - выставляется студенту, если он дал полный ответ на все вопросы заданий самостоятельной работы, аккуратно и грамотно оформил материал, изучил данный материал и свободно владеет этим материалом.

80 ÷ 89% **4 «хорошо»** - выставляется студенту, если он полностью ответил на все вопросы заданий самостоятельной работы, но в ходе ответа были допущены неточности, которые не носят принципиальный характер, аккуратно и грамотно оформил материал, изучил данный материал и свободно владеет этим материалом.

70 ÷ 79% **3 «удовлетворительно»** - выставляется студенту, если он дал ответы на все вопросы заданий самостоятельной работы, допустив при этом существенные ошибки, дал полный ответ на один из вопросов задания и не полностью ответил на остальные.

менее 70% **2 «неудовлетворительно»** - выставляется студенту, если он не смог дать ответ ни на один вопрос, представил совершенно не тот материал, который был задан или совсем не выполнил работу.

В целях повышения оценки преподаватель может задать дополнительные вопросы, которые носят уточняющий характер.

РАЗДЕЛ 1 Математический анализ

Тема1.1 Дифференциальные и интегральные исчисления

Количество часов - 1час

Вычисление пределов функций с использованием первого и второго замечательного пределов.

****.**например** Найти указанные пределы.

Решение:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+5}{2x^2+x-1}=\dfrac{2^2-6*2+5}{2*2^2+2-1}=-\dfrac{3}{9}=-\dfrac{1}{3}$

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-3x-9}{x^2-x-6}=\dfrac{2*3^2-3*3-9}{3^2-3-6}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$

При подстановке вместо переменно *x* ее предельного значения 3 получается неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для избавления от этого типа неопределенности в этом случае представим квадратные трехчлены числителя и знаменателя в виде произведения линейных множителей, воспользовавшись известной формулой $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 - корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c. У нас $2x^2-3x-9=2(x-3)(x+\frac{3}{2})$, т.к.

дискриминант квадратного трехчлена $D = 9 - 4*2*(-9) = 81$, а следовательно,

$x_1 = 3, x_2 = -\frac{3}{2}$.

Аналогично $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$.

Теперь условие примера можно переписать а другом виде и продолжить решение:

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2 - 3x - 9}{x^2 - x - 6} = \lim_{x\to 3} \frac{2(x-3)(x+\frac{3}{2})}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x\to 3} \frac{2x+3}{x+2} = \frac{2*3+3}{3+2} = \frac{9}{5}.$$

3) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + x - 4}{3x^2 - 2x + 5} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Здесь сталкиваемся с неопределенностью вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, избавиться от которой можно вынесением за скобки в числителе и знаменателе дроби старшей степени переменной:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + x - 4}{3x^2 - 2x + 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(2 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2})}{x^2(3 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2})} = \frac{2}{3}.$$

4) $\lim_{x\to 0} \frac{x \sin 2x}{tg^2 4x}$.

В данном случае для освобождения от возникшей неопределенности вида будем использовать I замечательный предел и одно из его очевидных следствий:

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1; _ \lim_{\alpha\to 0} \frac{tg\alpha}{\alpha} = 1.$$

Решение примера будет выглядеть следующим образом:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin 2x}{tg^2 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \sin 2x}{tg4x * tg4x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{4} * \frac{4x}{tg4x} * \frac{\sin 2x}{2x} * \frac{4x}{tg4x} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Выполни самостоятельно

1. а) $\lim_{x\to x_0} \frac{2x^2 - x - 10}{x^2 + 3x + 2}$; а) $x_0 = 2$, б) $x_0 = -2$, в) $x_0 = \infty$.

2. а) $\lim_{x\to x_0} \frac{x^2 - 3x + 2}{14 - x - 3x^2}$; а) $x_0 = 1$, б) $x_0 = 2$, в) $x_0 = \infty$.

3. а) $\lim_{x\to x_0} \frac{x^2 - 5x + 4}{2x^2 - 3x + 5}$; а) $x_0 = -2$, б) $x_0 = -1$, в) $x_0 = -\infty$.

Исследовать заданные функции методами дифференциального исчисления и начертить их графики.

Исследование функций и построение графиков рекомендуется проводить по следующей схеме:

1) найти область определения функции D (y);
2) исследовать функцию на непрерывность; найти точки разрыва функции и ее односторонние пределы в точках разрыва;
3) найти точки экстремума функции и определить интервалы ее монотонности;
4) найти точки перегиба графика функции и определить интервалы выпуклости и вогнутости графика;
5) найти асимптоты графика функции;
6) построить график, используя результаты предыдущих исследований.
7) найти наибольшее и наименьшее значения на заданном отрезке;

**** **например**: Исследовать и построить график функции $y=\frac{x^2+1}{x-1}$.

1. Область определения функции: $x \in R \setminus \{1\}$.
2. Функция не является ни четной ни нечетной.
3. Точек пересечения с осью x нет, так как $x^2+1>0$ при любом x. Точка пересечения с осью y (0;-1).
4. Асимптоты.

Точка x=1- точка разрыва второго рода, так как $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{x^2+1}{x-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{x^2+1}{x-1}=+\infty$, то x=1-вертикальная асимптота.

Горизонтальной асимптоты нет, так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x-1}=\pm\infty$.

Наклонная асимптота: найдем k и b.

$k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x^2-x}=1, b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1+x}{x-1}\right)=1.$ Тогда, уравнение наклонной асимптоты y= x+1.

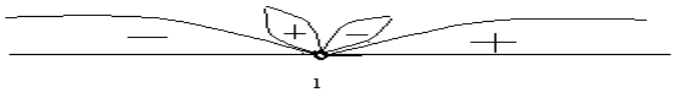
5. $f'(x)=\frac{(x-(1+\sqrt{2}))(x-(1-\sqrt{2}))}{(x-1)^2}$. Критические точки:

   $x=1+\sqrt{2}\approx 2{,}4; x=1-\sqrt{2}\approx -0{,}4; x=1(\textit{кратность}2)$, но x=1-не принадлежит области определения функции. Решим неравенства методом интервалов. Отметим знаки интервалов на числовой прямой, учитывая кратность x=1.

Занесем результаты в таблицу

x	$(-\infty,-0{,}4)$	-0,4	(-0,4;1)	1	(1;2,4)	2,4	$(2{,}4;+\infty)$
f'(x)	+	0	-	---	-	0	+
f(x)	↗	-0,8	↘	---	↘	4,8	↗
		max				min	

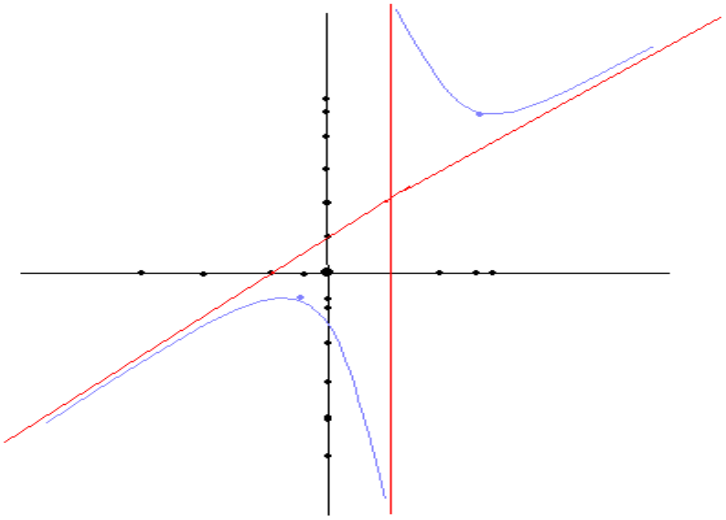
6. $f''(x)=\frac{4}{(x-1)^3}$. Критические точки: x=1, но она не принадлежит области определения



функции. Решим неравенства методом интервалов:(x-1)3<(>)0.
Составим таблицу:

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	-	---	+
f(x)	∩	---	∪

7. Строим график функции согласно порядку исследования.



1

Выполни самостоятельно

1. $y=2x^3-9x^2+12x-5$, [-1; 3];
2. $y=x^3-6x^2+9x+1$, [-1; 2]; x= 1
3. $y=x^3-3x^2-9x+10$, [2; 4];

Вычисление производной сложной функции.

При решении всех последующих примеров кроме таблицы производных будут использованы известные правила дифференцирования суммы, разности, произведения, дроби и теорема о производной сложной функции:

А) $[f(x)\pm\varphi(x)]'=f'(x)\pm\varphi'(x)$;

Б) $[f(x)\cdot\varphi(x)]'=f'(x)\varphi(x)+f(x)\varphi'(x)$;

В) $\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]' = \frac{f'(x)\varphi(x)+f(x)\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}$;

Г) Если задана сложная функция y=f(u), где u= φ(x), то есть y=f(φ(x)); если каждая из функций y=f(u) и u= φ(x) дифференцируема по своему аргументу, то

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx},$$

Пример 1:$y=\left(2x^5-3\sqrt{x^3}+1\right)^6=u^6$,

$u=2x^5-3\sqrt{x^3}+1$;

$$\frac{dy}{dx}=6u^3-\frac{du}{dx}=6\left(2x^5-3x^{\frac{3}{2}}+1\right)^5\times\left(2x^5-3x^{\frac{3}{2}}+1\right)'=6(2x^5-3x^{\frac{3}{2}}+1)^5\left(10x^4-\frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)=$$

$$=6\left(2x^5-3\sqrt{x^3}+1\right)^5\left(10x^4-\frac{9}{2}\sqrt{x}\right).$$

Пример 2:$y=\frac{\cos 7x}{\sqrt{1-3x^4}}$;

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(\cos 7x)'\times\sqrt{1-3x^4}-\cos 7x\left(\sqrt{1-3x^4}\right)'}{\left(\sqrt{1-3x^4}\right)3}=\frac{-\sin 7x\times(7x)'\sqrt{1-3x^4}-\cos 7x\times\frac{1}{2\sqrt{1-3x^4}}\left(1-3x^4\right)}{1-3x^4}=$$

$$= \frac{-7\sin 7x\sqrt{1-3x^4} - \dfrac{\cos 7x}{2\sqrt{1-3x^4}} \times \left(-12x^3\right)}{1-3x^4} = \frac{-7\sin 7x\left(1-3x^4\right)+6x^3\cos 7x}{\left(1-3x^4\right)\sqrt{1-3x^4}}.$$

Пример3: y=3^{tgx} sin5x;

$$\frac{dy}{dx} = \left(3^{tgx}\right)' \sin 5x + 3^{tgx}\left(\sin 5x\right)' = 3^{tgx}\ln 3 \times \frac{1}{\cos^2 x}\sin 5x + 3 \times 3^{tgx}\cos 5x.$$

1) y=ln arcsin 6x;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\arcsin 6x}\left(\arcsin 6x\right)' = \frac{1}{\arcsin 6x} \times \frac{1}{\sqrt{1-(6x)^2}} \times (6x)' = \frac{1}{\arcsin 6x} \times \frac{6}{\sqrt{1-36x^2}}.$$

Выполни самостоятельно

Найти производные $\frac{dy}{dx}$, пользуясь правилами и формулами дифференцирования.

1.а) y=(3x-4$\sqrt[3]{x}$ +2)^4 2. а) y=$\left(3x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} - 1\right)^2$

б) y=2^{3x} tg 2x в) y=ln arctg 2x б) y=cos 3x $e^{\sin x}$ в) y=cos ln 5x

Вычисление простейших неопределенных интегралов(методом замены переменной):

Найти неопределенный интеграл:

***например $\int (\ln x)^3 dx$

Применим подстановку t=lnx. Тогда dt=$\frac{dx}{x}$ и $\int (\ln x)^8 \frac{dx}{x} = \int t^8 dt = \frac{1}{9}t^9 + C = \frac{1}{9} \times (\ln x)^9 + C$.

**** например $\int e^{2x^3+3}x^2 dx$.

Применим подстановку t=2x^3+3. Тогда dt=6x^2 dx$\div\frac{1}{6}dt = x^2 dx$, откуда

$$\int e^{2x^2+3}x^2 dx = \int e^{\prime}\frac{1}{6}dt = \frac{1}{6}c' + C = \frac{1}{6}e^{2x^2+3} + C.$$

. **Основные свойства неопределенного интеграла:**

1°. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

2°. Постоянный множитель подынтегрального выражения можно вынести за знак интеграла,

т.е. $\int mf(x)dx = m\int f(x)dx$, где m=cons

3°. Интеграл от алгебраической суммы функции равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, т.е. $\int \left(f(x) \pm \varphi(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx$.

4°. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению,

т.е. $d\int f(x)dx = f(x)dx$

5°. Неопределенный интеграл от дифференциала (производной) некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной *C,*

т.е. $\int dF(x) = F(x) + c$ или $\int F'(x)dx = F(x) + c$

Если *F(x)+C*- первообразная функция для *f(x),* то приращение *F(b)-F(a)* первообразных функций при изменении аргумента *x* от *x=a* до *x=b* называется **определенным интегралом** и обозначается символом $\int_a^b f(x)dx$, т.е. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где

a – нижний предел определенного интеграла

b – верхний предел определенного интеграла.

Таблица основных интегралов. Из определения неопределенного интеграла следует, что если F'(x)=f(x), то $\int f(x)dx=F(x)+C$. Исходя из этого и используя формулы дифференцирования, можно составить следующую таблицу неопределенных интегралов.

1. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ ($\alpha \neq -1$); при $\alpha=0$ имеем $\int dx = x+C$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
4. $\int \cos x dx = \sin x + C$
5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx C$
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arctg} x + C$
9. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
10. $\int e^x dx = e^x + C$
11. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$
12. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$
13. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln|\operatorname{cosec} x - ctgx| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$
14. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln|\sec x + tg x| + C = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$
15. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$, $\alpha \neq 0$
16. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$, $\alpha \neq 0$
17. $\int \frac{dx}{x^3-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$, $\alpha \neq 0$
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$, $|x| < \alpha$, $\alpha \neq 0$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$
20. $\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + C$
21. $\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$

Выполни самостоятельно

1. $\int \sqrt{\cos}\sin x dx$

$3\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$

2. $\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x}$ $4\int \frac{x^2}{2x^3+3}dx$

Нахождение частных производных.

Тема 1.2 Дифференциальные уравнения

Количество часов – 1час

Решение однородных дифференциальных уравнений первого порядка..

******например** Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения I порядка $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$.

Решение:

Правая часть уравнения $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ обладает свойством

$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{2(\lambda x)(\lambda y)}{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2} = f(x,y)$. Поэтому заданное уравнение является однородным дифференциальным уравнением I порядка. Совершим замену $u = \frac{y}{x}$, где u - некоторая функция от аргумента *x*. Отсюда $y = ux, _ y' = u'x + u$. Исходное уравнение приобретает вид

$u'x + u\frac{2x * ux}{x^2 - u^2x^2} = \frac{2u}{1-u^2}$.

Продолжаем преобразования: $u'x = \frac{2u}{1-u^2} - u = \frac{2u - u^3}{1-u^2} = \frac{u(1+u^2)}{1-u^2}$; $\frac{du}{dx}x = \frac{u(1+u^2)}{1-u^2}$.

Производим разделение переменных: $\frac{(1-u^2)du}{u(1+u^2)} = \frac{dx}{x}$.

После интегрирования обеих частей уравнения получаем

$\int \frac{1+u^2-2u^2}{u(1+u^2)}du = \int \frac{du}{u} - \int \frac{2u^2 du}{u(1+u^2)} = \ln u - \int \frac{2u}{1+u^2}du = \ln u - \ln(1+u^2) + \ln C$;

$\int \frac{dx}{x} = \ln x$.

Таким образом $\ln u - \ln(1+u^2) + \ln C = \ln x$; $\ln\left[C\frac{u}{1+u^2}\right] = \ln x$.

Потенцируя, находим $C\frac{u}{1+u^2} = x$ или $C\frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x^2}} = x$; $\frac{Cxy}{x^2+y^2} = x$.

Итак, общий интеграл исходного уравнения приобретает вид

$Cy = x^2 + y^2$, где *C* – произвольная постоянная.

Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Основные понятия

Уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и ее первую производную, называется *дифференциальным уравнением первого порядка.* Если, кроме того в уравнение входит вторая производная от искомой функции, то оно называется *дифференциальным уравнением второго порядка.*

В общем случае дифференциальное уравнение первого порядка можно записать в виде *f (x,y,y') =* 0, где y = y (x) – искомая функция, y'= y'(x) – ее производная по x, а *F* – заданная функция переменных x,y,y'. Если уравнение *F(x,y,y') = 0* можно разрешить относительно производной, то оно примет вид *y'= f (x,y).*

Решением дифференциального уравнения называется функция *y= y (x),* удовлетворяющая этому уравнению.

Задача нахождения такого решения уравнения *y'= f (x,y),* которое удовлетворяет условию $y(x_0) = y_0$, где x_0 , y_0 = заданные числа, называется *задачей Коши.*

Общим решением дифференциального уравнения *y'= f (x,y)* называется функция *y = φ (x,C),* которая при каждом фиксированном значении *C* как функция от *x* является решением данного уравнения.

Каждое решение дифференциального уравнения, которое получается из общего решения при конкретном значении постоянной *C*, называется *частным решением.*

Решение линейных однородных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентам

****например** Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения II порядка с постоянными коэффициентами:

а) $y'' - 6y' + 8y = 0, _ y(0) = 1, _ y'(0) = 2$

б) $y'' - 8y' + 16y = 0, _ y(0) = 2, _ y'(0) = 5$

в) $y'' - 4y' + 13y = 0, _ y(\pi) = 0, _ y'(\pi) = 1$

Решение:

а) Для заданного дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 8y = 0$ составим соответствующее характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 8 = 0$ по принципу:
$y'' = k^2, _ y' = k^1 = k, _ y = k^0 = 1$. Решаем полученное квадратное уравнение и получаем два вещественных разных корня $k_1 = 2, _ k_2 = 4$.

Т.к. $k_1 \neq k_2$, то общее решение данных уравнений записывается в виде $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$. В нашем случае $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$, где $C_1, _ C_2$ - произвольные постоянные.

Отсюда $y'(x) = (C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x})'$, $y'(x) = 2C_1 e^{2x} + 4C_2 e^{4x}$.

Используя начальные условия $y(0) = 1$: $C_1 e^{2*0} + C_2 e^{4*0} = 1$, т.е. $C_1 + C_2 = 1$.

Из того что $y'(0) = 2$ следует $2C_1 e^{2*0} + 4C_2 e^{4*0} = 2$, т.е. $2C_1 + 4C_2 = 2$, $C_1 + 2C_2 = 1$.

Решая систему уравнений $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + 2C_2 = 1 \end{cases}$, получаем $C_1 = 1, _ C_2 = 0$.

Теперь в наше общее решение $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$ подставим найденные значения $C_1 = 1, _ C_2 = 0$. Частное решение исходного уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям, приобретает вид $y = e^{2x}$.

б) Для заданного дифференциального уравнения $y'' - 8y' + 16y = 0$ составим соответствующее характеристическое уравнение $k^2 - 8k + 16 = 0$ по принципу:
$y'' = k^2, _ y' = k^1 = k, _ y = k^0 = 1$. Решаем полученное квадратное уравнение и получаем два равных вещественных корня $k_1 = k_2 = 4$.

Т.к. $k_1 = k_2$, то общее решение данных уравнений записывается в виде $y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$. В нашем случае $y = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}$, где $C_1, _ C_2$ - произвольные постоянные.

Отсюда $y'(x) = (C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x})'$, $y'(x) = 4C_1 e^{4x} + C_2 e^{4x} + 4C_2 x e^{4x}$.

Учитывая начальные условия, получаем систему уравнений для определения $C_1, _ C_2$:

$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ 4C_1 + C_2 = 5 \end{cases}$. Решая систему, получаем $C_1 = 1, _ C_2 = 1$.

Искомое частное решение имеет вид: $y = e^{4x} + xe^{4x} = e^{4x}(x+1)$

в) Для заданного дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 13y = 0$ составим соответствующее характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 13 = 0$. Решая это уравнение, убеждаем, что оно не имеет вещественных корней.

В этом случае общее решение соответствующего дифференциального уравнения записывается в виде $y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$, где $\alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$, (p, q - коэффициенты характеристического уравнения).

У нас $\alpha = 2, \beta = 3$ поэтому общее решение заданного дифференциального уравнения имеет вид $y = C_1 e^{2x}\cos 3x + C_2 e^{2x}\sin 3x$.

Отсюда $y'(x) = (C_1 e^{2x}\cos 3x + C_2 e^{2x}\sin 3x)' =$

$= 2C_1 e^{2x}\cos 3x - 3C_1 e^{2x}\sin 3x + 2C_2 e^{2x}\sin 3x + 3C_2 e^{2x}\cos 3x$.

Таким образом, для определения значений C_1, C_2 исходя из начальных условий, получаем систему уравнений $\begin{cases} C_1 e^{2\pi} = 0 \\ 2C_1 e^{2\pi} - 3C_2 e^{2\pi} = 1 \end{cases}$,

решая которую имеем $C_1 = 0, C_2 = -\frac{1}{3}e^{-2\pi}$.

Итак, искомое частное решение приобретает вид

$$y = -\frac{1}{3}e^{-2\pi}e^{2x}\sin 3x = -\frac{1}{3}e^{2(x-\pi)}\sin 3x$$

Выполни самостоятельно

y'' -7 y' +10y=0; y'' +2 y' +10y=0;

y'' -6 y' +9y=0; y'' +8 y' +7y=0;

Тема1.3 Дифференциальные уравнения в частных производных
Количество часов – 1час
Решение простейших дифференциальных уравнений в частных производных.
Решение линейные относительно частных производных.

Дифференциальное уравнение первого порядка в общем случае **содержит**:

1) независимую переменную x;

2) зависимую переменную y (функцию);

3) первую производную функции: y'.

В некоторых уравнениях 1-го порядка может отсутствовать «икс» или (и) «игрек», но это не существенно – **важно** чтобы в ДУ **была** первая производная y', и **не было** производных высших порядков – y'', y''' и т.д.

Что значит решить дифференциальное уравнение? Решить дифференциальное уравнение – это значит, найти **множество всех функций**, которые удовлетворяют данному уравнению. Такое множество функций часто имеет вид $y = f(x, C)$ (C – произвольная постоянная), который называется **общим решением дифференциального уравнения**.

Пример 1

Решить дифференциальное уравнение $xy' = y$

В первую очередь нужно переписать **производную** немного в другом виде. Вспоминаем громоздкое обозначение $y' = \frac{dy}{dx}$,

Итак:

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = y$$

На втором шаге смотрим, **в левой части** нам нужно оставить **только «игреки»**, а **в правой части только «иксы»**. Разделение переменных выполняется с помощью : вынесение за скобки, перенос слагаемых из части в часть со сменой знака, перенос множителей из части в часть по правилу пропорции и т.п.

Дифференциалы dy и dx – это полноправные множители. В рассматриваемом примере переменные легко разделяются перекидыванием множителей по правилу пропорции:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Переменные разделены. В левой части – только «игреки», в правой части – только «иксы».

Следующий этап – **интегрирование дифференциального уравнения**.

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

Разумеется, интегралы нужно взять. В данном случае они табличные:

$$\ln|y| = \ln|x| + C$$

Как мы помним, к любой **первообразной** приписывается константа. Здесь два интеграла, но константу C достаточно записать один раз В большинстве случаев её помещают в правую часть.

Решение дифференциального уравнения в неявном виде называется **общим интегралом дифференциального уравнения**. То есть, $\ln|y| = \ln|x| + C$ – это общий интеграл.

Давайте попытаемся получить **общее решение**.

Пожалуйста, **запомните первый технический приём**, То есть, **ВМЕСТО** записи $\ln|y| = \ln|x| + C$ обычно пишут $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$.

Зачем это нужно? А для того, чтобы легче было выразить «игрек». Используем **свойство логарифмов** $\ln a + \ln b = \ln(ab)$. В данном случае:

$$\ln|y| = \ln|Cx|$$

Теперь логарифмы и **модули** можно убрать:

$$y = Cx$$

Функция представлена в явном виде. Это и есть общее решение.

Ответ: общее решение: $y = Cx$, где $C = const$.

Ответы многих дифференциальных уравнений довольно легко проверить. В нашем случае это делается совсем просто, берём найденное решение $y = Cx$ и дифференцируем его:

$$y' = (Cx)' = C$$

После чего подставляем $y = Cx$ и производную $y' = C$ в исходное уравнение $xy' = y$:

$$x \cdot C = Cx$$

$Cx = Cx$ – получено верное равенство, значит, общее решение $y = Cx$ удовлетворяет уравнению $xy' = y$, что и требовалось проверить.

Пример 2

Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = -2y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 2$

Решение: по условию требуется найти **частное решение** ДУ, удовлетворяющее заданному начальному условию. Такая постановка вопроса также называется задачей Коши.

Сначала находим общее решение. В уравнении нет переменной «икс», но это не должно смущать, главное, в нём есть первая производная.

Переписываем производную в нужном виде:

$$\frac{dy}{y} = -2dx$$

Очевидно, что переменные можно разделить

Интегрируем уравнение:

$$\int \frac{dy}{y} = -2\int dx$$

$$\ln|y| = -2x + C^*$$

$$|y| = e^{-2x+C^*}$$

Используя свойство степеней, перепишем функцию следующим образом:

$$|y| = e^{C^*} \cdot e^{-2x}$$

Запомните «снос» константы – это **второй технический приём**, который часто используют в ходе решения дифференциальных уравнений. На чистовике можно сразу перейти от $\ln|y| = -2x + C^*$ к $y = Ce^{-2x}$, Итак, общее решение: $y = Ce^{-2x}$, где $C = const$.

На завершающем этапе нужно найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(0) = 2$.

В чём состоит задача? Необходимо подобрать **такое** значение константы C, чтобы выполнялось условие $y(0) = 2$.

Оформить можно по-разному, но понятнее всего, пожалуй, будет так. В общее решение вместо «икса» подставляем ноль, а вместо «игрека» двойку:

$$2 = Ce^{-2\cdot 0}$$

$$2 = Ce^{0}$$

$$2 = C \cdot 1$$

То есть, $C = 2$

Стандартная версия оформления:

$$y(0) = Ce^{-2\cdot 0} = Ce^{0} = C = 2$$

Теперь в общее решение $y = Ce^{-2x}$ подставляем найденное значение константы $C = 2$:

$y = 2e^{-2x}$ – это и есть нужное нам частное решение.

Ответ: частное решение: $y = 2e^{-2x}$

Выполним проверку. Проверка частного решение включает в себя два этапа:

Сначала необходимо проверить, а действительно ли найденное частное решение $y = 2e^{-2x}$ удовлетворяет начальному условию $y(0) = 2$? Вместо «икса» подставляем ноль и смотрим, что получится:

$y(0) = 2e^{-2\cdot 0} = 2e^{0} = 2\cdot 1 = 2$ – да, действительно получена двойка, значит, начальное условие выполняется.

Второй этап уже знаком. Берём полученное частное решение $y = 2e^{-2x}$ и находим производную:

$y' = (2e^{-2x})' = 2(e^{-2x})' = 2e^{-2x}\cdot(-2x)' = -4e^{-2x}$

Подставляем $y = 2e^{-2x}$ и $y' = -4e^{-2x}$ в исходное уравнение $y' = -2y$:

$-4e^{-2x} = -2\cdot 2e^{-2x}$

$-4e^{-2x} = -4e^{-2x}$ – получено верное равенство.

Вывод: частное решение найдено правильно.

Тема 1.4. Ряды

Количество часов – 1час

Доказательство рядов на их сходимость.

Сходимость степенных рядов.

В общем виде **числовой ряд** можно записать так: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Здесь:

$\sum$ – математический значок суммы;

a_n – **общий член ряда** (запомните этот простой термин);

n – переменная-«счётчик». Запись $\sum_{n=1}^{\infty}$ обозначает, что проводится суммирование от 1 до «плюс бесконечности», то есть, сначала у нас $n = 1$, затем $n = 2$, потом $n = 3$, и так далее – до бесконечности. Вместо переменной n иногда используется переменная k или m.

Суммирование не обязательно начинается с единицы, в ряде случаев оно может начинаться с нуля $\sum_{n=0}^{\infty}$, с двойки $\sum_{n=2}^{\infty}$ либо с любого *натурального числа*.

любой ряд можно расписать развёрнуто:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots$ – и так далее, до бесконечности.

Слагаемые $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$ – это **ЧИСЛА**, которые называются **членами** ряда. Если все они неотрицательны *(больше либо равны нулю)*, то такой ряд называют **положительным числовым рядом**.

Пример 1

Записать первые три члена ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)$

Сначала $n = 1$, тогда: $2\cdot 1 + 1 = 3$

Затем $n = 2$, тогда: $2\cdot 2 + 1 = 5$

Потом $n = 3$, тогда: $2\cdot 3 + 1 = 7$

$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)=3+5+7+\ldots$

ответ:

Пример 2

Записать первые три члена ряда

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$

Это пример для самостоятельного решения, ответ в конце урока

Пример 3

Записать первые три члена ряда

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{(4n-3)\cdot 5^n}$

подставляем в общий член ряда сначала $n=1$, потом $n=2$ и $n=3$. В итоге:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{(4n-3)\cdot 5^n}=\frac{\sqrt{2}}{1\cdot 5^1}+\frac{\sqrt{3}}{5\cdot 5^2}+\frac{\sqrt{4}}{9\cdot 5^3}+\ldots$

Пример 4

Записать сумму в свёрнутом виде с общим членом ряда

$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\frac{4}{81}+\ldots$

В данном случае:

$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\frac{4}{81}+\ldots=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$

Для проверки полученный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ можно «расписать обратно» в развернутом виде.

Сходимость числовых рядов

1) **Ряд** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **расходится**. Это значит, что бесконечная сумма равна бесконечности: $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\ldots=\infty$ либо суммы вообще не существует, как, например, у ряда

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n=-1+1-1+1-1+\ldots$

$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)=3+5+7+\ldots$. Здесь совершенно очевидно, что каждый следующий член ряда больше, чем предыдущий, поэтому $3+5+7+\ldots=\infty$ и, значит, ряд расходится.

2) **Ряд** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **сходится**. Это значит, что бесконечная сумма равна некоторому конечному числу S: $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\ldots=S$. Пожалуйста: $\sum_{n=1}^{\infty}0^n=0+0+0+\ldots=0$ – этот ряд сходится и его сумма равна нулю. В качестве более содержательного примера можно привести бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, известную нам ещё со

школы: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots$. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии рассчитывается по формуле: $S=\frac{A}{1-q}$, где A – первый член прогрессии, а q – её основание, которое, как правило, записывают в виде правильной дроби. В данном случае: $A=1$, $q=\frac{1}{4}$. Таким образом: $S=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$ Получено конечное число, значит, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}$ сходится, что и требовалось доказать.

Существует несколько признаков сходимости ряда: необходимый признак сходимости ряда, признаки сравнения, признак Даламбера, признаки Коши, признак Лейбница *и* некоторые другие признаки. **Когда какой признак применять?** Это зависит от общего члена ряда необходимо хорошо понимать, что такое предел и хорошо уметь раскрывать неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Необходимый признак сходимости ряда

Если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю: $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

Обратное в общем случае неверно, т.е., если $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, то ряд может как сходиться, так и расходиться. И поэтому этот признак используют для обоснования расходимости ряда:

Если общий член ряда не стремится к нулю, то ряд расходится

Или короче: если $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$, то ряд расходится. Возможна ситуация, когда предела не существует вообще, как, например, **предела** $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$.

Докажем, что ряд из первого примера $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)$ расходится.

Общий член ряда: $a_n=2n+1$

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(2n+1)=\infty\neq 0$

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)$ **расходится**, так как не выполнен необходимый признак сходимости ряда

Пример 6

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{7n+3}$

В числителе и знаменателе у нас находятся многочлены, когда старшие степени числителя и знаменателя равны, тогда предел равен конечному числу.

Решаем:

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{7n+3}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$

Делим числитель и знаменатель на n

$$(*) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{7n+3}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{7+\frac{3}{n}} = \frac{1}{7} \neq 0$$

Исследуемый ряд **расходится**, так как не выполнен необходимый признак сходимости ряда.

Почему признак называется **необходимым**? чтобы ряд сходился, **необходимо**, чтобы его общий член стремился к нулю, но этого ещё **не достаточно**. Иными словами, **если общий член ряда стремится к нулю, ТО ЭТО ЕЩЕ НЕ ЗНАЧИТ, что ряд сходится** – он может, как сходиться, так и расходиться!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Данный ряд называется **гармоническим рядом**.

Легко заметить, что $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, НО. В теории математического анализа доказано, что **гармонический ряд расходится**.

Также следует запомнить понятие обобщенного **гармонического ряда:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

1) Данный ряд **расходится** при $\alpha \leq 1$. Например, расходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

2) Данный ряд **сходится** при $\alpha > 1$. Например, сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$,

РАЗДЕЛ 2 Основы дискретной математики
Тема 2.1. Множества и отношения. Свойства отношений. Операции над множествами.
Количество часов - 1 час.
Тема 2.2 Основные понятия теории графов
Количество часов1час
Виды графов и операции над ними.

1. **Задание 1.** Найти в учебной литературе или других источниках примеры графов типа «дерево» (классификация, алгоритм, структура файлов на диске и др.)
2. **Задание 2.** Нарисовать родословное дерево своей семьи.
3. **Задание 3**. В офисе 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с 5 другими? Может ли в офисе, в котором каждый телефон соединен ровно с 5 другими, быть ровно 16 телефонов?
4. **Задание 4** В группе 30 студентов. Можно ли распределить их так, чтобы каждый имел ровно 6 друзей? Может ли в группе, в которой у каждого студента ровно по 7 друзей, быть ровно 29 человек?
5. **Задание 5.** Какое максимальное количество грузов из первого пункта в последний может послать транспортная компания, если пропускная способность путей между пунктами транспортной сети ограничена?

РАЗДЕЛ 3. Основы теории вероятностей и математической статистики
Тема 3.1 Вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
Количество часов - 1час

1. **Размещением** из *n* различных элементов по *m* элементов *(m<n)* называется соединение, которое отличается либо составом, либо порядком своих элементов.
Например, выпишем все размещения из элементов a, b, c, d по два элемента: ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc.
Для любого натурального числа *n* произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$ обозначается *n!*
читается n-факториал.

Формула для подсчета числа размещений: $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

Задача: Найти количество всех двузначных чисел, состоящих из чисел 1,2,3,...,9.
Решение: Это задача о размещении из 9 элементов по 2 элемента, т.к. любые двузначные числа отличаются либо составом цифр, либо их порядком.

$$A_9^2 = \frac{9!}{7!} = 72$$

2. **Сочетанием** из n различных элементов по m элементов (m<n) называется соединение, которое отличается только составом своих элементов.
Например, выпишем вес сочетания из элементов a,b,c,d,e по три элемента: abe, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde.

Формула для подсчета числа сочетаний: $C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$

Задача: Дано 5 различных чисел a, b, c, d, e. Сколько можно составить всевозможных произведений из этих чисел, состоящих из двух различных множителей?
Решение: Это задача о числе сочетаний из 5 элементов по 2 элемента, т.к. произведения отличаются только составом множителей $C_5^2 = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = 10$

3. **Перестановками** из *n* различных элементов называются всевозможные соединения из этих *n* элементов, т.е. соединения, каждое из которых содержит *n* различных элементов, взятых в определённом порядке.
Например, все перестановки из элементов a,b,c: abc, acb, bac, bca, cab, cba.
Формула для подсчета числа перестановок: $P_n = n!$
Задача: На столе находятся 5 различных геометрических фигур, (круг, треугольник, квадрат, ромб, прямоугольник). Сколькими способами можно разложить эти фигуры в один ряд?
Решение: Это задача о числе перестановок из 5 элементов. $P_5 = 5! = 120$.

К основным понятиям теории вероятности относятся: *испытание, событие, вероятность*.
Испытание – реализация комплекса условий, в результате которого непременно произойдет какое-либо событие. Например, бросание монеты – испытание; появление герба или цифры – события.
Случайным событием называется событие, которое при осуществлении испытания может произойти, а может и не произойти. Например, выстрел по цели — это опыт, случайные события в этом опыте – попадание в цель или промах.
Событие называется **достоверным**, если в результате опыта оно непременно должно произойти, и **невозможным**, если оно заведомо не произойдет. События называются **несовместными**, если ни какие два из них не могут появиться вместе. Например, попадание и промах при одном выстреле – это несовместные события.
Несколько событий образуют **полную систему событий**, если в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из них. Например, при бросании игральной кости события, состоящие в выпадении одного, двух, трех, четырех, пяти и шести очков, образуют полную систему событий.
События называются **равновозможными**, если ни одно из них не является более возможным, чем другие. Например, при бросании монеты выпадение герба или числа - события равновозможные.

Каждое событие обладает какой-то степенью возможности. Числовая мера степени объективной возможности события - это **вероятность события**. Вероятность события А обозначается Р(А).

Пусть из системы *n* несовместных равновозможных исходов испытания *m* исходов благоприятствуют событию А. Тогда **вероятностью** события А называют отношение *m* числа исходов, благоприятствующих событию А, к числу *n* всех исходов данного испытания: P(A)=m/n.

Если В – достоверное событие, то Р(В)=1; если С – невозможное событие, то Р(С)=0, если А – случайное событие, то 0<P(A)<1.

Задача. Игральную кость подбрасывают один раз. Найти вероятность появления четного числа очков.

Решение. Опыт имеет шесть равновозможных независимых исходов (появление одного, двух, трех, четырех, пяти и шести очков), образующих полную систему. Событию благоприятствуют три исхода (появление двух, четырех и шести очков), поэтому Р(А)=3/6=1/2

При вычислении вероятности часто приходится использовать формулы комбинаторики.

Задачи на определение событий и вероятности события.

Теорема сложения вероятностей. Теорема умножения вероятностей.

Выполни самостоятельно

1. а) Сколькими способами из группы, включающей 25 учащихся, можно выбрать актив группы в составе старосты и профорга?

б) В урне находится 7 красных и 6 синих шаров. Из урны одновременно вынимают 2 шара. Какова вероятность того, что оба шара красные.

2. а) Найти количество всех трехзначных чисел, состоящих из чисел 1,2,3,4,5.

б) Набирая номер телефона, абонент забыл три последние цифры, и помня только, что они различны, набрал их наудачу. Какова вероятность, что он набрал нужные цифры.

3. а) Сколькими способами можно распределить 12 человек по бригадам, если в каждой бригаде по 6 человек. б) К концу дня в магазине осталось 60 арбузов, из которых 50 спелых Покупатель выбирает 2 арбуза. Какова вероятность, что оба арбуза спелые?

4. а) Сколько всего игр должны провести 20 футбольных команд в однокруговом чемпионате?

б) Девять книг, из которых 4 одинаковые, а остальные различны, расставлены наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что эти 4 книги окажутся поставленными рядом.

5. а) В третьем классе изучается 10 предметов. В понедельник 4 урока. Сколькими способами можно составить расписание на этот день

б) В партии из 24 деталей 6 бракованных. Из партии выбирают наугад детали. Найти вероятность того, что они все будут бракованными.

6. а) Сколькими способами можно из 20 человек назначить двух дежурных, из которых один старший?

б) Карточка «Спортлото» содержит 49 чисел. В тираже участвуют 6 чисел. Какова вероятность того, что будет верно угадано 4 числа?

7. а) В подразделении 30 солдат и 3 офицера. Сколькими способами можно выделить патруль, состоящий из 3 солдат и одного офицера?

б) Из группы, состоящей из 10 юношей и 8 девушек, выбирают по жребию дежурных. Какова вероятность того, что все выбранные окажутся юношами?

8. а) Из 8 различных цветков нужно составить букет так, чтобы в него входило не менее 2 цветков. Сколько существует способов для составления такого букета?

б) Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Вычислить вероятность того, что студент знает 2 вопроса из билета.

9. а) Сколькими способами можно выбрать четырёх человек на четыре различные должности из девяти кандидатов на эти должности?

б) В лотерее из 50 билетов 8 выигрышных. Какова вероятность того, что 4 наугад выбранных билета будут выигрышными?

0. а) Из 7 бегунов и 3 прыгунов нужно составить команду из 5 человек, в которую должен входить хотя бы один прыгун. Сколькими способами это можно сделать?) В партии из 10 деталей имеются 3 нестандартных. Найти вероятность того, что 3 наудачу взятые детали будут стандартными

Тема 3.2 Случайная величина, ее функции распределения.
Количество часов - 1час
**** **например**

Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения x_1 и x_2 , причем $x_1 < x_2$. Найти закон распределения величины X, если известно, что математическое ожидание M (x) = 1,4, дисперсия D (x) = 0,24 и вероятность p_1 того, что X примет значение x_1, равна 0,6.

Решение:

Так как сумма вероятностей всех возможных значений X равна 1, то вероятность p_2 того, что X примет значение x_2, равна $p_2 = 1 - p_1 = 1 – 0,6 = 0,4$.

Напишем закон распределения X:

X	x_1	x_2
p	0,6	0,4

Для отыскания x_1 и x_2 составим два уравнения.

Для составления первого уравнения воспользуемся тем, что математическое ожидание M(x) определяется по формуле $M(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$

В нашем случае: $M(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2$

Учитывая, что по условию M(x) = 1,4, можем записать первое уравнение:

$$0,6x_1 + 0,4x_2 = 1,4.$$

Учитывая, что по условию D(x) = 0,24, пользуясь формулой $D(x) = M(X^2) – [M(X)]^2$, напишем второе уравнение:

$$0,6\, x_1^2 + 0,4\, x_2^2 - 1,4^2 = 0,24, \text{ или}$$
$$0,6\, x_1^2 + 0,4\, x_2^2 = 2,2.$$

Решив полученную систему уравнений, найдем два решения:

$$x_1 = 1, x_2 = 2 \text{ и } x_1 = 1,8, x_2 = 0,8.$$

По условию, $x_1 < x_2$, поэтому задаче удовлетворяет лишь первое решение.

Окончательно получим искомый закон распределения:

X	1	2
p	0,6	0,4

Тема 3.3. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины.
Количество часов– 1час
Решения задач на вычисление и нахождения математического ожидания.

Случайно*й* называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное возможное значение, неизвестное заранее, но обязательно одно.

Пример 1. Число выпавших «гербов» при пятикратном бросании монеты.

Пример 2. Дальность полета артиллерийского снаряда.

Пример 3. Число мальчиков, родившихся в течении суток

Пример 4. Прирост веса домашнего животного за месяц.

Случайные величины будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита X, Y, Z, а их возможные значения – малыми буквами x, y, z.

Пример 5. X – число шахматных партий, окончившихся ничейным результатом, из трех сыгранных. В этом случае величина X может принять следующие значения: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$.

Дискретной случайной величиной (ДСВ) называют такую случайную величину, множество возможных значений которой либо конечное, либо бесконечное, но счетное.

Например, ДСВ – число учащихся, опрошенных на уроке; число солнечных дней в году и т.д.

Непрерывной случайной величиной (НСВ) называют такую случайную величину, которая может принять любое значение из некоторого конечного или бесконечного интервала.

Например, время безаварийной работы станка; расход ГСМ на единицу расстояния; выпадение осадков в сутки и т.д.

Законом распределения ДСВ X называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями СВ и соответствующими вероятностями.

Способы задания закона распределения:

1)для ДСВ – табличный и графический;

например,

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

Табличный ряд распределения, где $x_1; x_2; \ldots; x_i; \ldots; x_n$ образуют полную группу, а $p_1+p_2+\ldots+p_i+\ldots+p_n=1$

2)для НСВ – можно задать так же, как функцию одной переменной, используя табличный, графический или аналитический способ задания.

В тех случаях, когда закон распределения СВ неизвестен, СВ изучают по ее числовым характеристикам. Их назначение – в сжатой форме выразить наиболее важные черты распределения. К числовым характеристикам относится математическое ожидание, дисперсия и т.д.

Математическим ожиданием ДСВ называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности и обозначается

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n$$

Математическим ожиданием НСВ X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a;b]$, называется определенный интеграл $\int_a^b x\,f(x)dx$, т.е.

$$M(X)=\int_a^b x\,f(x)dx$$

Дисперсией (распределением) ДСВ называют математическое ожидание квадрата отклонения СВ от ее математического ожидания, т.е.

$$D(X)=M(X-M(X))^2 \quad \text{или} \quad D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2\,p_i$$

$$\text{Для НСВ } D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2\,f(x)dx.$$

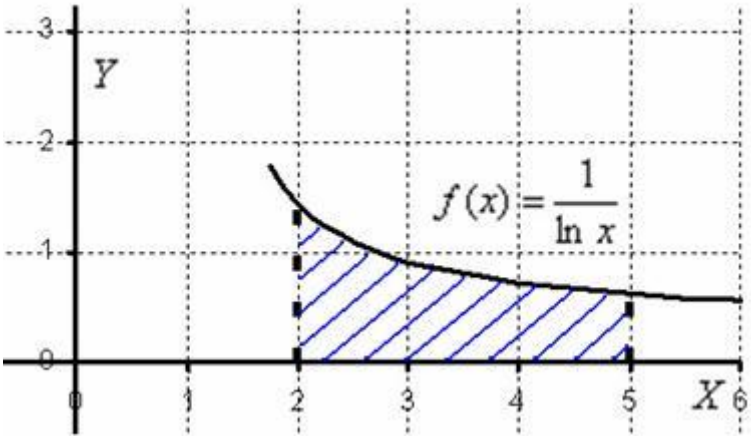
РАЗДЕЛ 4 Основные численные методы.
Тема 4.1.Численное интегрирование.
Количество часов-1час
Решение задач на применение формуле Симпсона.

Вычислить определенный интеграл

$$\int_2^5 \frac{dx}{\ln x}$$

Всё было бы хорошо, но в данном примере интеграл не берётся – перед вами неберущийся, так называемый *интегральный логарифм*. Изобразим на чертеже график подынтегральной

функции $f(x)=\frac{1}{\ln x}$:



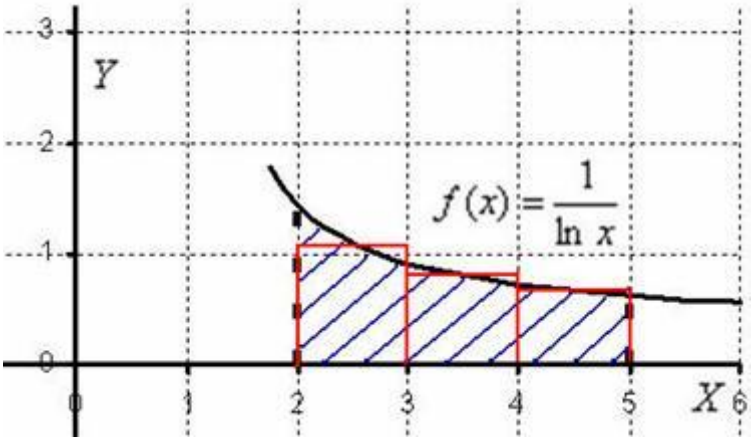
Подынтегральная функция **непрерывна** на отрезке $[2;5]$ и определенный интеграл $\int_2^5 \frac{dx}{\ln x}$ численно равен заштрихованной площади.

1) Вычислить определенный интеграл приближенно**, округляя результат до определённого знака после запятой**. Например, до двух знаков после запятой, до трёх знаков после запятой и т.д. Предположим, получился приближенный ответ 5,347. На самом деле он может быть не совсем верным (в действительности, скажем, более точный ответ 5,343).

2) Вычислить определенный интеграл приближенно, **с определённой точностью**. Например, вычислить определённый интеграл приближенно с точностью до 0,001. Что это значит? Это значит, мы должны отыскать такое приближенное значение, которое **по модулю** *(в ту или другую сторону)* отличается от истины не более чем на 0,001.

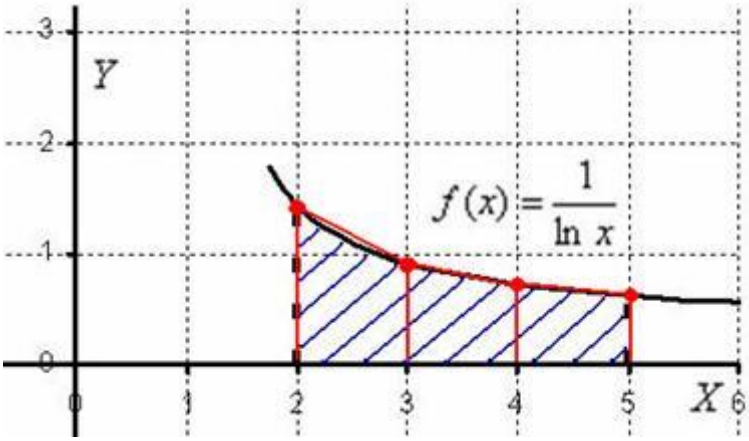
Существуют несколько основных методов приближенного вычисления определенного интеграла, который встречается в задачах:

Метод прямоугольников. Отрезок интегрирования разбивается на несколько частей и строится ступенчатая фигура, которая по площади близка к искомой площади:



В данном примере проведено разбиение отрезка интегрирования $[2;5]$ на три отрезка: $[2;3]$, $[3;4]$, $[4;5]$. Очевидно, что чем чаще разбиение (больше более мелких промежуточных отрезков), тем выше точность. «Ступенчатое» приближение является самым простым, и, видимо, поэтому довольно редко встречается в практических задачах

Метод трапеций. Отрезок интегрирования разбивается на несколько промежуточных отрезков, и график подынтегральной функции приближается *ломаной* линией:



Таким образом, наша площадь (синяя штриховка) приближается суммой площадей трапеций (красный цвет). Отсюда и название метода. Легко заметить, что метод трапеций даёт значительно лучшее приближение, чем метод прямоугольников (при одинаковом количестве отрезков разбиения). И, естественно, чем больше более мелких промежуточных отрезков мы рассмотрим, тем будет выше точность. Метод трапеций время от времени встречается в практических заданиях, и в данной статье будет разобрано несколько примеров.

Метод Симпсона (метод парабол). Это более совершенный способ – график подынтегральной функции приближается не ломаной линией, а маленькими параболками. Сколько промежуточных отрезков – столько и маленьких парабол. Если взять те же три отрезка, то метод Симпсона даст ещё более точное приближение, чем метод прямоугольников или метод трапеций. Рассмотрим определенный интеграл $I = \int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – функция, непрерывная на отрезке $[a;b]$. Проведём разбиение отрезка $[a;b]$ на n **равных** отрезков: $[x_0;\ x_1],[x_1;\ x_2],[x_2;\ x_3],\ldots,[x_{n-1};\ x_n]$. При этом, очевидно: $x_0 = a$ (нижний предел интегрирования) и $x_n = b$ (верхний предел интегрирования).

Точки $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ также называют **узлами**.

Тогда определенный интеграл можно вычислить приближенно **по формуле трапеций**:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) \right]$$, где:

$h = \frac{(b-a)}{n}$ – длина каждого из маленьких отрезков или **шаг**;

$f(x_i)$ – значения подынтегральной функции в точках $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$.

Пример 1

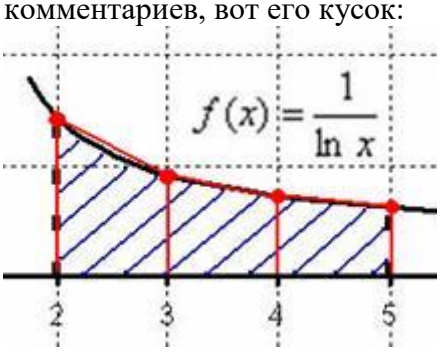
Вычислить приближенно определенный интеграл по формуле трапеций. Результаты округлить до трёх знаков после запятой.

$$I = \int_2^5 \frac{dx}{\ln x}$$

а) Разбив отрезок интегрирования на 3 части.
б) Разбив отрезок интегрирования на 5 частей.

Решение:

а) Специально для чайников я привязал первый пункт к чертежу, который наглядно демонстрировал принцип метода. Если будет трудно, посматривайте на чертёж по ходу комментариев, вот его кусок:



По условию отрезок интегрирования нужно разделить на 3 части, то есть $n=3$.

Вычислим длину каждого отрезка разбиения: $h=\frac{(b-a)}{n}=\frac{5-2}{3}=1$. Параметр h, напоминаю, также называют **шагом**.

Сколько будет точек x_i (узлов разбиения)? Их будет **на одну больше**, чем количество отрезков:

$x_0=2 \qquad x_1=x_0+h=2+1=3 \qquad x_2=x_1+h=3+1=4 \qquad x_3=x_2+h=4+1=5$

Ну а общая формула трапеций сокращается до приятных размеров:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\cdot\left[\frac{f(x_0)+f(x_3)}{2}+f(x_1)+f(x_2)\right]$$

Для расчетов можно использовать обычный микрокалькулятор:

$$f(x_0)=f(2)=\frac{1}{\ln 2}\approx 1{,}443$$

$$f(x_1)=f(3)=\frac{1}{\ln 3}\approx 0{,}910$$

$$f(x_2)=f(4)=\frac{1}{\ln 4}\approx 0{,}721$$

$$f(x_3)=f(5)=\frac{1}{\ln 5}\approx 0{,}621$$

Обратите внимание, что, **в соответствии с условием задачи, все вычисления следует округлять до 3-го знака после запятой**.

Окончательно:

$$\int_2^5 \frac{dx}{\ln x}\approx h\cdot\left[\frac{f(x_0)+f(x_3)}{2}+f(x_1)+f(x_2)\right]\approx 1\cdot\left[\frac{1{,}443+0{,}621}{2}+0{,}910+0{,}721\right]=2{,}664$$

С геометрической точки зрения мы вычислили сумму площадей трёх трапеций

б) Разобьём отрезок интегрирования на 5 равных частей, то есть $n=5$. Зачем это нужно? Чтобы Фобос-Грунт не падал в океан – увеличивая количество отрезков, мы увеличиваем точность вычислений.

Если $n=5$, то формула трапеций принимает следующий вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\cdot\left[\frac{f(x_0)+f(x_5)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)\right]$$

Найдем шаг разбиения:

$h = \frac{(b-a)}{n} = \frac{5-2}{5} = \frac{3}{5} = 0,6$, то есть, длина каждого промежуточного отрезка равна 0,6.

При чистовом оформлении задачи все вычисления удобно оформлять расчетной таблицей:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	2	2,6	3,2	3,8	4,4	5
$f(x_i)$	1,443	1,047	0,860	0,749	0,675	0,621

В первой строке записываем «счётчик»

Как формируется вторая строка, думаю, всем видно – сначала записываем нижний предел интегрирования $a = x_0 = 2$, остальные значения получаем, последовательно приплюсовывая шаг $h = 0,6$.

По какому принципу заполняется нижняя строка, тоже, думаю, практически все поняли.

Например, если $x_3 = 3,8$, то $f(3,8) = \frac{1}{\ln 3,8} \approx 0,749$.

В результате:

$$\int_2^5 \frac{dx}{\ln x} \approx h \cdot \left[\frac{f(x_0) + f(x_5)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) \right] =$$

$$= 0,6 \cdot \left[\frac{1,443 + 0,621}{2} + 1,047 + 0,860 + 0,749 + 0,675 \right] = 2,617$$

Если для 3 отрезков разбиения приближённое значение составило $I_3 \approx 2,664$, то для 5 отрезков $I_5 \approx 2,617$. Таким образом, с большой долей уверенности можно утверждать, что, по крайне мере $I \approx 2,6$.

Пример 2

Вычислить приближенно определенный интеграл по формуле трапеций с точностью до двух знаков после запятой (до 0,01).

$$I = \int_2^5 \frac{dx}{\ln x}$$

Решение

Сначала отрезок интегрирования разбивается на несколько больших отрезков, как правило, на 2-3-4-5. Разобьем отрезок интегрирования, например, на те же 5 частей. Формула уже знакома:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \left[\frac{f(x_0) + f(x_5)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) \right]$$

И шаг, естественно, тоже известен: $h = \frac{(b-a)}{n} = \frac{5-2}{5} = \frac{3}{5} = 0,6$

Но возникает еще один вопрос, до какого разряда округлять результаты $f(x_i)$? В условии же ничего не сказано о том, сколько оставлять знаков после запятой. Общая рекомендация такова: **к требуемой точности нужно прибавить 2-3 разряда**. В данном случае необходимая точность 0,01. Согласно рекомендации, после запятой для верности оставим

пять знаков (можно было и четыре):

i	0	1	2	3	4	5
x_i	2	2,6	3,2	3,8	4,4	5
$f(x_i)$	1,44270	1,04656	0,85973	0,74906	0,67494	0,62133

В результате:

$$\int_2^5 \frac{dx}{\ln x} \approx 0,6 \cdot \left[\frac{1,44270 + 0,62133}{2} + 1,04656 + 0,85973 + 0,74906 + 0,67494 \right] \approx 2,61739$$

, обозначим приближение через I_5.

После первичного результата количество отрезков **удваивают**. В данном случае необходимо провести разбиение на 10 отрезков. Для $n = 10$ формула трапеций приобретает следующий вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \left[\frac{f(x_0) + f(x_{10})}{2} + \begin{pmatrix} f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + \\ + f(x_6) + f(x_7) + f(x_8) + f(x_9) \end{pmatrix} \right]$$

В бумажной версии запись можно спокойно перенести на следующую строчку.

Вычислим шаг разбиения: $h = \frac{(b-a)}{n} = \frac{5-2}{10} = \frac{3}{10} = 0,3$

Результаты расчётов сведём в таблицу:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	2	2,3	2,6	2,9	3,2	3,5
$f(x_i)$	1,44270	1,20061	1,04656	0,93922	0,85973	0,79824
i	6	7	8	9	10	
x_i	3,8	4,1	4,4	4,7	5	
$f(x_i)$	0,74906	0,70872	0,67494	0,64618	0,62133	

При чистовом оформлении в тетрадь длинную таблицу выгодно превратить в двухэтажную.

В результате:

$$\int_2^5 \frac{dx}{\ln x} \approx 0,3 \cdot \left[\frac{1,44270 + 0,62133}{2} + 1,20061 + 1,04656 + \ldots + 0,64618 \right] \approx 2,59659 \quad (I_{10})$$

Теперь вычислим расхождение между приближениями:

$$|I_{10} - I_5| \approx |2,59659 - 2,61739| = |-0,02080| = 0,02080$$

Здесь используем знак модуля, поскольку нас интересует *абсолютная разность*, а не какой результат больше, а какой – меньше.

Что касается дальнейших действий, то лично мне на практике встречалось 2 пути решения:

1) Первый способ – это «сравнение в лоб». Поскольку полученная оценка погрешности **больше**, чем требуемая точность: $0,02080 > 0,01$, то необходимо ещё раз удвоить количество отрезков разбиения до $n = 20$ и вычислить уже I_{20}. С помощью экселевского калькулятора готовый результат можно получить в считанные секунды: $I_{20} \approx 2,59123$.

Теперь снова оцениваем погрешность: $|I_{20} - I_{10}| \approx |2,59123 - 2,59659| = |-0,00536| = 0,00536$.

Полученная оценка **меньше**, чем требуемая точность: $0,00536 < 0,01$, следовательно, вычисления закончены. Осталось округлить последний (наиболее точный) результат $I_{20} \approx 2,59123$ до двух знаков после запятой и дать ответ.

Пример 3

Вычислить приближенно определенный интеграл по формуле трапеций с точностью до 0,001.

$$I = \int_{0,4}^{1,2} \frac{\cos x dx}{x+2}$$

В образце решения на первом шаге проведено разбиение на 4 отрезка, то есть $n = 4$.

Рассмотрим определенный интеграл $I = \int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – функция, непрерывная на отрезке $[a;b]$. Проведём разбиение отрезка $[a;b]$ на **чётное** количество **равных** отрезков. Чётное количество отрезков обозначают через $2n$.

На практике отрезков может быть:
два: $2n = 2$
четыре: $2n = 4$
восемь: $2n = 8$
десять: $2n = 10$
двадцать: $2n = 20$

Внимание! Число $2n$ понимается как ЕДИНОЕ ЧИСЛО. То есть, **НЕЛЬЗЯ** сокращать, например, $2n = 8$ на два, получая $n = 4$. Запись $2n$ **лишь обозначает**, что количество отрезков **чётно**. И ни о каких сокращениях речи не идёт

Итак, наше разбиение имеет следующий вид:
$[a = x_0; x_1], [x_1; x_2], [x_2; x_3], \ldots, [x_{2n-2}; x_{2n-1}], [x_{2n-1}; x_{2n} = b]$

Термины аналогичны терминам метода трапеций:

Точки $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n}$ называют **узлами**.

Формула Симпсона для приближенного вычисления определенного интеграла имеет следующий вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_{2n}) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{2n-2})) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2n-1}))\right],$$

где:

$h = \frac{(b-a)}{2n}$ – длина каждого из маленьких отрезков или **шаг**;

$f(x_i)$ – значения подынтегральной функции в точках $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n}$.

Детализируя это нагромождение, разберу формулу подробнее:

$f(x_0) + f(x_{2n})$ – сумма первого и последнего значения подынтегральной функции;

$2(f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{2n-2}))$ – сумма членов с *чётными* индексами умножается на 2;

$4(f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2n-1}))$ – сумма членов с *нечётными* индексами умножается на 4.

$$I=\int_{-4}^{6}\sqrt{x^2+3}dx$$

Пример Вычислить приближенное значение определенного интеграла с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Вычисления проводить с точностью до третьего знака после запятой.

Решение: Используем формулу Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{h}{3}\left[f(x_0)+f(x_{10})+2(f(x_2)+f(x_4)+f(x_6)+f(x_8))+4(f(x_1)+f(x_3)+f(x_5)+f(x_7)+f(x_9))\right]$$

При десяти отрезках разбиения $2n=10$ шаг составляет $h=\frac{6-(-4)}{10}=1$

Заполним расчетную таблицу:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-4	-3	-2	-1	0	1
$f(x_i)$	4,359	3,464	2,646	2,000	1,732	2,000
i	6	7	8	9	10	
x_i	2	3	4	5	6	
$f(x_i)$	2,646	3,464	4,359	5,292	6,245	

$$I\approx\frac{1}{3}(4{,}359+6{,}245+2\cdot(2{,}646+1{,}732+2{,}646+4{,}359)+$$
$$+4\cdot(3{,}464+2+2+3{,}464+5{,}292))=$$
$$=\frac{1}{3}(10{,}604+22{,}765+64{,}879)=\frac{1}{3}\cdot 98{,}248\approx 32{,}749$$

Ответ: $\int_{-4}^{6}\sqrt{x^2+3}dx\approx 32{,}749$

1.а) Найти интегралы.
б) Найти площадь плоской фигуры, ограниченной указанными линиями. Выполнить схематический чертеж.
в) Найти объём тела вращения плоской фигуры, ограниченной указанными линиями. Выполнить схематический чертеж.

2. а) $\int\sqrt[3]{\left(3x^2-2\right)^2}dx$;

б) $y=x^2-4x+3$, осями координат и прямыми $x=-1$, $x=3$;
в) Эллипс - вокруг малой оси: $4x^2+9y^2=36$

3. а) $\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(5x+1)^3}}$;

б) $y=3/x$, $x+y-4=0$;
в) Эллипс - вокруг большой оси: $4x^2+9y^2=36$.

4. а) $\int\frac{\cos x dx}{4\sin x+1}$;

б) $y=3x-x^2$, $5x-y-8=0$;
в) Дуга окружности $x^2+y^2=16$ в первой четверти между прямыми $x=1$ и $x=3$.

5. а) $\int\frac{z^3dz}{\sqrt[4]{\left(5z^4-3\right)^3}}$;

б) $y^2=16x$, $y=x$;
в) $Y^2=4x$, $y=x$, вокруг оси ox.

36 а) $\int \frac{x^2 dx}{4x^3 - 3}$

б) между параболами $y=8x-x^2$ и $y=x^2+18x-12$;

в) $Y=x^2$, $y^2=8x$, вокруг оси ox

Тема 4.2. Численное дифференцирование.

Количество часов– 1час

Вычисление и нахождение производных функций в точке по заданной таблично функции y=f(x) Применение метода численного дифференцирования. Вычислить приближенно определенный интеграл по формуле Симпсона с точностью до 0,001. Разбиение начать с двух отрезков $2n = 2$

$$I = \int_{1,2}^{2} \sqrt{1 + 2x^2 - x^3}\, dx$$

Решение: Если у нас два отрезка разбиения $2n = 2$, то узлов будет **на один больше**: x_0, x_1, x_2. И формула Симпсона принимает весьма компактный вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_2) + 4f(x_1)\right]$$

Вычислим шаг разбиения: $$h = \frac{(b-a)}{2n} = \frac{(2-1,2)}{2} = \frac{0,8}{2} = 0,4$$

Заполним расчетную таблицу:

i	0	1	2
x_i	1,2	1,6	2
$f(x_i)$	1,466970	1,422674	1

В верхнюю строку записываем «счётчик» индексов

Во второй строке сначала пишем нижний предел интегрирования $a = x_0 = 1,2$, а затем последовательно приплюсовываем шаг $h = 0,4$.

В третью строку заносим значения подынтегральной функции. Например, если $x_1 = 1,6$, то $f(x_1) = \sqrt{1 + 2 \cdot (1,6)^2 - (1,6)^3} \approx 1,422670$. **Сколько оставлять знаков после запятой?** В результате:

$$\int_{1,2}^{2} \sqrt{1 + 2x^2 - x^3}\, dx \approx \frac{0,4}{3}\left[1,466970 + 1 + 4 \cdot 1,422674\right] \approx 1,087689 \quad (I_2)$$

Первичный результат получен. Теперь **удваиваем** количество отрезков до четырёх: $2n = 4$. Формула Симпсона для данного разбиения принимает следующий вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_4) + 2f(x_2) + 4(f(x_1) + f(x_3))\right]$$

Вычислим шаг разбиения: $$h = \frac{(b-a)}{2n} = \frac{(2-1,2)}{4} = \frac{0,8}{4} = 0,2$$

Заполним расчетную таблицу:

i	0	1	2	3	4
x_i	1,2	1,4	1,6	1,8	2
$f(x_i)$	1,466970	1,475127	1,422674	1,283745	1

Таким образом:

$$\int_{1,2}^{2}\sqrt{1+2x^2-x^3}\,dx \approx \frac{0,2}{3}\left[1,466970 + 1 + 2\cdot 1,422674 + 4\cdot(1,475127 + 1,283745)\right] \approx 1,089854 \quad (I_4)$$

Найдём абсолютное значение разности между приближениями:

$$|I_4 - I_2| \approx |1,089854 - 1,087689| = 0,002165$$

$$\frac{1}{15}|I_4 - I_2| \approx \frac{1}{15}\cdot 0,002165 = 0,000144 < 0,001$$

$$I = \int_{1,2}^{2}\sqrt{1+2x^2-x^3}\,dx \approx I_4 \approx 1,089854 \approx 1,090$$

Формула Симпсона

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_8) + 2(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6)) + 4(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7))\right]$$

Вычислим шаг: $h = \frac{(b-a)}{2n} = \frac{(2-1,2)}{8} = \frac{0,8}{8} = 0,1$

И снова заполним расчетную таблицу:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$f(x_i)$	1,466970	1,477498	1,475127	1,457738	1,422674	1,366382	1,283745	1,166619	1

Таким образом:

$$\int_{1,2}^{2}\sqrt{1+2x^2-x^3}\,dx \approx \frac{0,1}{3}\left[\begin{array}{l}1,466970 + 1 + 2\cdot(1,475127 + 1,422674 + 1,283745) + \\ + 4\cdot(1,477498 + 1,457738 + 1,366382 + 1,166619)\end{array}\right] =$$

$$= \frac{0,1}{3}\cdot(2,466970 + 8,363090 + 21,872948) = \frac{0,1}{3}\cdot 32,703008 = 1,090100 \quad (I_8)$$

Оцениваем погрешность:

$$|I_8 - I_4| \approx |1,090100 - 1,089854| = 0,000247$$

Погрешность меньше требуемой точности: $0,000247 < 0,001$. Осталось взять наиболее точное приближение $I_8 \approx 1,090100$, округлить его до трёх знаков после запятой и записать:

$$I = \int_{1,2}^{2}\sqrt{1+2x^2-x^3}\,dx \approx 1,090$$

Ответ: с точностью до 0,001

Тема 4.3.Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Количество часов-1час

Для заданного дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 13y = 0$ составим соответствующее характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 13 = 0$. Решая это уравнение, убеждаем, что оно не имеет вещественных корней.

В этом случае общее решение соответствующего дифференциального уравнения записывается в виде $y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$, где $\alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$, _($p, q$ - коэффициенты характеристического уравнения).

У нас $\alpha = 2, _ \beta = 3$ поэтому общее решение заданного дифференциального уравнения имеет вид $y = C_1 e^{2x} \cos 3x + C_2 e^{2x} \sin 3x$.

Отсюда $y'(x) = (C_1 e^{2x} \cos 3x + C_2 e^{2x} \sin 3x)' =$

$= 2C_1 e^{2x} \cos 3x - 3C_1 e^{2x} \sin 3x + 2C_2 e^{2x} \sin 3x + 3C_2 e^{2x} \cos 3x$.

Таким образом, для определения значений $C_1, _ C_2$ исходя из начальных условий, получаем систему уравнений $\begin{cases} C_1 e^{2\pi} = 0 \\ 2C_1 e^{2\pi} - 3C_2 e^{2\pi} = 1 \end{cases}$,

решая которую имеем $C_1 = 0, _ C_2 = -\frac{1}{3} e^{-2\pi}$.

Итак, искомое частное решение приобретает вид

$$y = -\frac{1}{3} e^{-2\pi} e^{2x} \sin 3x = -\frac{1}{3} e^{2(x-\pi)} \sin 3x$$

Выполни самостоятельно

$y'' - 7y' + 10y = 0;$ $y'' + 2y' + 10y = 0;$

$y'' - 6y' + 9y = 0;$ $y'' + 8y' + 7y = 0;$

Информационное обеспечение обучения.

Перечень рекомендуемых учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы.

Перечень учебных изданий для преподавателей

1. В. С. Михеев, О.В. Стяжкина. Математика. Учебное пособие для образовательных учреждений среднего профессионального образования технического профиля. Г. Ростов- на- Дону, издательств ООО «Феникс», 2009г.
2. В. П. Омельченко, Э. В. Курбатова. Математика. Учебное пособие для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования. Г. Ростов-на Дону, издательство ООО «Феникс», 2011г.
3. Д. Т. Письменный. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. Курс лекций для студентов, изучающих высшую математику в различных заведениях. Г. Москва, издательство ООО «Айрис пресс», 2010г.
4. Д. Т. Письменный, Конспект лекций по высшей математике. 2 часть. Курс лекций для студентов, изучающих высшую математику в различных заведениях. Г. Москва, издательство ООО «Айрис пресс», 2010г.
5. С. Г. Григорьев, С. В. Иволгина. Математика. Учебник для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования. г.Москва, издательский центр «Академия», 2011г.
6. М. К. Потапов, В. В. Александров, П. И. Панченко Алгебра, тригонометрия и элементарные функции. г. Москва издательство «Высшая школа»,2009г

Основная литература для обучающихся

1. М.И. Башмаков: Алгебра и начала анализа 10 - 11класс. г. Москва издательство «Дрофа» 2009 г.
2. А.А, Дадаян: сборник задач по математике [текст]: Учебник. Профессиональное образование (Рекомендовано Министерством образования РФ)
3. Богомолов, Н.В. Практические занятия по математике [Текст]: Учебное пособие для средних профессиональных учебных заведений
4. Григорьев, С.Г. Иволгина, С.В. Математика [Текст]: Учебник / под ред. В.А. Гусева. – М.: Издательский центр «Академия». 2011. – 384 с (Рекомендовано ФГУ «ФИРО»);
5. Григорьев, В.П., Сабурова, Т.Н. Сборник задач по высшей математике[Текст]: Учебное пособие. – М.: Издательский центр «Академия». 2010. –160 с. (Рекомендовано ФГУ «ФИРО»);
6. Спирина, М.С., Спирин, П.А. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: Учебник. – М.: Издательский центр «Академия», 2009.10– 352 с. (Допущено Министерством образования РФ).
7. Луканкин Г.Л., Луканкин А.Г. Математика. Ч. 1: учебное пособие для учреждений начального профессионального образования. – М., 2009
8. М. Я. Выгодский: Справочник по элементарной математике. Москва, «Просвещение» 2009г.

9. М. Я. Выгодский: Справочник по высшей математике. Москва, «Роснига» 2009г.

Дополнительные источники:

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. Учебное пособие. – Москва, Высшая школа 2009.
2. Омельченко В.Т., Курбатова Э.В. Математика Г. Ростов- на-Дону, издательство «Феникс» 2010г.
4. Богомолов Н.В. Самойленко П.И. «Математика», - М., 2009г..
5. Богомолов Н.В. «Практические занятия по математике», - М., 2008г.