

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САХАЛИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Г. М. Чуванова

**ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ
В ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ**

Практикум

г. Южно-Сахалинск
СахГУ
2021

УДК 514(075.8)
ББК 22.151я73
Ч822

*Печатается по решению учебно-методического совета
Сахалинского государственного университета, 2019 г.*

Рецензенты:

Прокопенко Н. Ю., кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры прикладной информатики и статистики
Нижегородского государственного архитектурно-
строительного университета;

Гулевская А. Ф., кандидат педагогических наук,
доцент кафедры математики СахГУ.

**Ч822 Чуванова, Г. М. Применение элементов дифференциального
исчисления в геометрии и физике : практикум / Г. М. Чувано-
ва. – Южно-Сахалинск : СахГУ, 2021. – 120 с.
ISBN 978-5-88811-625-8**

Практикум предназначается для использования в процессе
обучения студентов направления 44.03.05 «Педагогическое об-
разование (с двумя профилями подготовки)», профиль «Мате-
матика и физика» очной формы обучения и окажет помощь в из-
учении математического анализа и физики, а также может быть
использован при изучении математического анализа студентами
направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика».

УДК 514(075.8)
ББК 22.151я73

ISBN 978-5-88811-625-8

© Чуванова Г. М., 2021
© Сахалинский государственный
университет, 2021

СОДЕРЖАНИЕ

Занятия № 1–2. Геометрический смысл производной	4
Занятие № 3. Касательная и нормаль к кривой, заданной параметрическими уравнениями	13
Занятие № 4. Доказательство неравенств с помощью производной	19
Занятие № 5. Задачи на применение производной	21
Занятие № 6. Физический смысл производной.	27
Занятие № 7. Задачи о наибольших и наименьших значениях функции.	34
Занятие № 8. Элементы дифференциальной геометрии.	38
Занятия № 9–11. Элементы теории поля.	44
Занятие № 12. Неявная функция и ее дифференцирование .	52
Занятие № 13. Касательная и нормаль к кривой, касательная и нормальная плоскость к поверхности, являющиеся графиками неявных функций	59
Занятие № 14. Экстремум функции многих переменных. Угловой экстремум	65
ПРИЛОЖЕНИЯ.	78
Приложение № 1	78
Приложение № 2	79
Приложение № 3	81
Приложение № 4	91
Приложение № 5	95
Приложение № 6	102
Приложение № 7	110
ЛИТЕРАТУРА.	119

Занятия № 1–2.

Геометрический смысл производной

Цель занятия: применение геометрического смысла производной функции в данной точке к решению различных задач.

Справочный материал

Введем общие понятия, необходимые для получения геометрического смысла производной.

Определение. Графиком функции f называется множество точек с координатами $(x; f(x))$, где $x \in D(f)$, $y = f(x)$ – уравнение этой кривой.

Определение. Секущей графика функции f называется прямая, соединяющая две любые точки графика.

Определение. Предельное положение секущей M_0M к графику функции f , когда M приближается к M_0 по данной кривой, называется *касательной*, проведенной к графику функции f в точке $M_0(x_0; y_0)$, а точка $M_0(x_0; y_0)$ – *точкой касания* (рис. 1).

Определение. Нормалью графика функции f в точке $M_0(x_0; y_0)$ называется прямая, перпендикулярная касательной, проведенной в точке $M_0(x_0; y_0)$ (рис. 1).

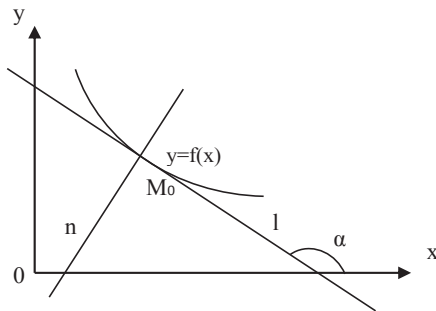


Рис. 1

Определение. Производной от данной функции называется конечный предел разностного отношения в данной предельной точке x_0 , если он существует:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Геометрический смысл производной: значение производной $f'(x_0)$ равно тангенсу угла наклона касательной, составленного с положительным направлением оси OX , проведенной к графику функции в точке с абсциссой x_0 .

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0)$ и имеющей угловой коэффициент k , имеет вид:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Исходя из геометрического смысла значения производной функции f в данной точке x , уравнение касательной, проведенной к графику функции f в точке $M_0(x_0; y_0)$, можно записать в виде:

$$Y - y_0 = f'(x_0)(X - x_0), \quad (1)$$

где $y = f(x)$ – уравнение кривой, $M(X; Y)$ – точка, принадлежащая касательной.

Так как нормаль, проведенная в точке $M_0(x_0; y_0)$, перпендикулярна касательной, проведенной в той же точке, то угловые коэффициенты этих прямых удовлетворяют условию:

$$k_1 \cdot k_2 = -1,$$

где $k_1 = f'(x_0)$ – угловой коэффициент касательной, k_2 – угловой коэффициент нормали.

Учитывая это условие и выразив угловой коэффициент нормали через значение производной функции f в точке x_0 , получим уравнение нормали, проведенной в точке $M_0(x_0; y_0)$:

$$Y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(X - x_0). \quad (2)$$

Определение. Углом между кривыми называется наименьший угол между касательными, проведенными в точке пересечения кривых.

Из аналитической геометрии известна формула нахождения тангенса угла между прямыми, заданными через угловые коэффициенты:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|,$$

где k_1 – угловой коэффициент прямой l_1 , k_2 – угловой коэффициент прямой l_2 . Исходя из геометрического смысла производной функции f в данной точке x и определения угла между кривыми, получим формулу вычисления угла между кривыми:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left| \frac{f'_1(x) - f'_2(x)}{1 + f'_1(x) \cdot f'_2(x)} \right|. \quad (3)$$

Также при решении задач полезно использовать условие параллельности двух прямых, заданных уравнениями с угловыми коэффициентами: две прямые параллельны, если их угловые коэффициенты совпадают, то есть:

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2. \quad (4)$$

Практическое занятие

1. Найдите угол наклона касательной к параболе $y = x^2 - 2x - 5$ в точках $x = 0,5$; $x = 1$; $x = 1,5$.

Решение:

Вычислим производную данной функции:

$$y' = (x^2 - 2x - 5)' = 2x - 2.$$

Найдем значение производной в точке $x = 0,5$:

$$y'(0,5) = 2 \cdot 0,5 - 2 = -1.$$

Тогда:

$$\alpha = \operatorname{arctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}.$$

Производим аналогичные вычисления в точках $x = 1$, $x = 1,5$.

Ответ: $\frac{3\pi}{4}$; 0 ; $\frac{\pi}{4}$.

2. В какой точке касательная к параболе $y = -x^2 + 2x - 3$ наклонена к оси Ox под углом 0° , 45° ?

Указание: найти производную данной функции и решить уравнения:

$$f'(x) = \operatorname{tg} 0, \quad f'(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}.$$

3. В какой точке касательная к кривой $y = \ln x$ параллельна прямой $y = x - 1$, $y = 2x - 3$?

Указание: касательная к кривой $y = f(x)$ параллельна прямой $y = ax + b$ в точке x_0 , если она является решением уравнения $f'(x) = a$.

4. Найдите точки, в которых касательные к кривым $y = x^3 - x - 1$, $y = 3x^2 - 4x + 1$ параллельны.

Указание: используя условие параллельности двух прямых (ф. 4), решить уравнение:

$$f'_1(x) = f'_2(x).$$

5. Под каким углом синусоида пересекает прямую $y = \frac{1}{2}$?

Указание: найти точки пересечения кривой $y = \sin x$ и прямой $y = \frac{1}{2}$, решив уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$, вычислить значения производной функции $y = \sin x$ в полученных точках, далее смотри решение задания № 1.

6. Найдите углы, под которыми пересекаются кривые $xy = 8$, $x^2 - y^2 = 12$.

Указание: найти точку пересечения данных кривых; вычислив производные явных функций, заданных данными уравнениями, применить формулу (ф. 3).

7. В уравнении параболы $y = x^2 + bx + c$ числа b , c определить так, чтобы она касалась прямой $y = 2x - 1$ в точке $x = 1$.

Указание: прямая $y = ax + l$ касается кривой $y = f(x)$ в точке $x = m$, если имеет решение система уравнений:

$$\begin{cases} f(m) = am + l, \\ f'(m) = a. \end{cases}$$

8. В уравнении параболы $y = ax^2 + bx + c$ числа a, b, c определить так, чтобы она касалась прямой $y = x$ в точке $x = 1$ и проходила через точку $(-1; 0)$.

Указание: учитывая условие касания кривой $y = f(x)$ и прямой $y = ax + l$ в точке $x = m$, получаем два уравнения: $\begin{cases} a + b + c = 1, \\ 2a + b = 1. \end{cases}$ Третье уравнение получаем из условия прохождения параболы через точку $(-1; 0)$: $a - b + c = 0$. Для определения чисел a, b, c решаем систему:

$$\begin{cases} a + b + c = 1, \\ a - b + c = 0, \\ 2a + b = 1. \end{cases}$$

9. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(2; -1)$ и касающейся кривой $y = x^2 - 4$.

Указание: найти производную функции $y = x^2 - 4$ в общем виде; используя (ф. 1), где $X = 2, Y = -1, y_0 = x_0^2 - 4, y'_0 = 2x_0$, получить уравнение для определения точки касания, затем записать уравнения касательных в данных точках касания.

10. Написать уравнение нормали к параболе $y = x^2 + 4x + 1$, перпендикулярной прямой, соединяющей начало координат с вершиной параболы.

Указание: составить уравнение прямой, соединяющей вершину параболы с началом координат, найти угловой коэффициент этой прямой; учитывая условие перпендикулярности двух прямых, найти угловой коэффициент нормали; найти производную функции $y = x^2 + 4x + 1$; найти точку касания, в которой проводится нормаль, затем записать уравнение нормали.

11. Профиль автомобильного моста имеет форму параболы с осью, проходящей вертикально через середину моста, длина ос-

нования которого равна 120 м, высота центральной части 10 м. Каким должен быть наклон насыпи на обоих концах моста?

Указание: составить уравнение параболы, форму которой принимает профиль моста, вычислить производную этой функции и найти угол наклона касательной на концах моста.

12. Число $x = 1$ не является корнем уравнения $x^2 - x = 2x - \frac{x^2}{2}$, но является корнем уравнения, полученного из производных его левой и правой частей. Объяснить геометрический смысл указанного факта.

13. Найдите площадь треугольника, образованного биссектрисами координатных углов и касательной к кривой $y = \sqrt{x^2 - 5}$ в точке $x = 3$.

14. Указание: так как треугольник, образованный биссектрисами координатных углов и касательной к данной кривой, является прямоугольным, то его площадь равна половине произведения катетов. Найти уравнение касательной к данной кривой в данной точке, найти координаты точек пересечения касательной с биссектрисами координатных углов, найти длины катетов образованного треугольника.

15. Окружность K радиуса 1 с центром C на положительной полуоси Oy касается параболы $y = x^2$. Найдите точку касания и положение центра окружности C .

Указание: условие касания двух кривых имеет вид:

$$\begin{cases} f_1(x) = f_2(x), \\ f'_1(x) = f'_2(x). \end{cases}$$

Составить уравнение окружности по заданным условиям, найти точку касания окружности и параболы, положение центра окружности.

16. Найдите уравнения прямой, проходящей через точку $A(\frac{1}{2}; 2)$, касающейся графика функции $y = -\frac{x^2}{2} + 2$ и пересекающей в двух различных точках график функции $y = \sqrt{4 - x^2}$.

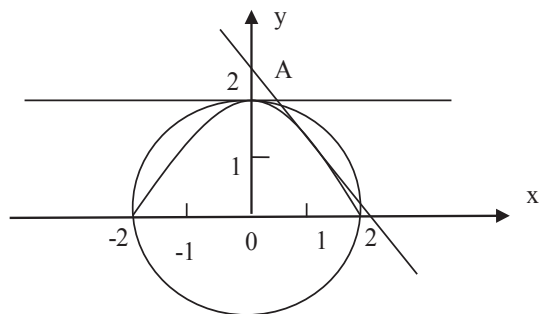


Рис. 2

Решение:

Чтобы найти уравнение касательной к графику функции $y = -\frac{x^2}{2} + 2$, необходимо найти производную этой функции и воспользоваться тем, что эта касательная проходит через точку $A(\frac{1}{2}; 2)$, применяем формулу (ф. 1).

$$y' = \left(-\frac{x^2}{2} + 2\right)' = -x.$$

$$y_0 = -\frac{x_0^2}{2} + 2, \quad y'_0 = -x_0.$$

$$X = \frac{1}{2}, Y = 2.$$

$$2 - \left(-\frac{x_0^2}{2} + 2\right) = -x_0 \left(\frac{1}{2} - x_0\right).$$

Решая уравнение, получаем две точки касания:

$$x_0 = 0, x_1 = 1.$$

Находим уравнения касательных к графику функции $y = -\frac{x^2}{2} + 2$ в этих точках и проверяем выполнение условия

пересечения графика функции $y = \sqrt{4 - x^2}$ в двух различных точках.

В первом случае получаем одну точку пересечения:

$$x_0 = 0: y = 2.$$

$$2 = \sqrt{4 - x^2}.$$

$$x = 0.$$

Только во второй точке касания касательная пересекает окружность в двух различных точках.

$$x_1 = 1: y = -x + \frac{5}{2}.$$

$$-x + \frac{5}{2} = \sqrt{4 - x^2}.$$

$$8x^2 - 20x + 9 = 0.$$

$$D = 20^2 - 4 \cdot 8 \cdot 9 = 192 > 0.$$

Ответ: $y = -x + \frac{5}{2}.$

17. Определить угол между левой и правой касательной к кривой $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ в точке $x = 1$.

Решение:

Находим производную функции $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}.$

$$y' = \left(\arcsin \frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)|1-x^2|}.$$

Производная не определена в точках $x = 1, x = -1$, которые называются *угловыми*.

$$|1 - x^2| = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{если } |x| < 1, \\ x^2 - 1, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

Поэтому:

$$y' = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2}, & \text{если } |x| < 1, \\ -\frac{2}{1+x^2}, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

Угловые коэффициенты левой и правой касательной к кривой в угловой точке равны соответственно значениям левой и правой производной в этой точке. Таким образом:

$$\begin{aligned} k_1 = y'_л(1) = 1, k_2 = y'_п(1) = -1. \\ \alpha_1 = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}, \alpha_2 = \arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}. \\ \alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

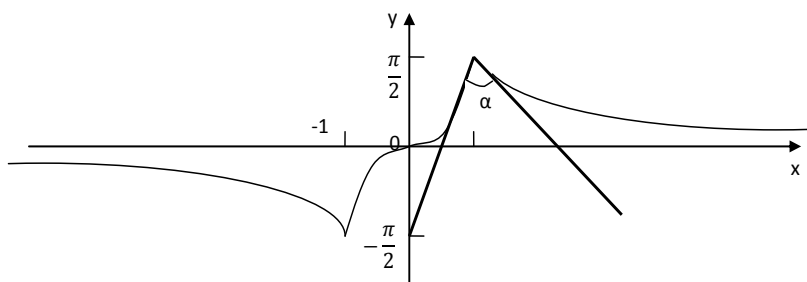


Рис. 3

Самостоятельная работа: индивидуальное задание № 1.

Занятие № 3. Касательная и нормаль к кривой, заданной параметрическими уравнениями

Цель занятия: получение уравнений касательной, нормали и нормальной плоскости к кривой, заданной параметрическими уравнениями, и их применение к решению задач.

Справочный материал

Пусть функция задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [a; b].$$

Если функции $\varphi(t), \psi(t)$ дифференцируемы, то производная функции $y = f(x)$ вычисляется по формуле:

$$y' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad \varphi'(t) \neq 0. \quad (1)$$

Используя формулу 1 из занятий № 1–2, при $t = t_0$ получаем уравнение касательной к графику функции, заданной параметрическими уравнениями, в точке касания $(\varphi(t_0), \psi(t_0))$:

$$Y - \psi(t_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}(X - \varphi(t_0))$$

или в симметрической форме:

$$\frac{X - \varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)} = \frac{Y - \psi(t_0)}{\psi'(t_0)}. \quad (2)$$

Уравнение нормали, проведенной в этой же точке, имеет вид:

$$\varphi'(t_0)(X - \varphi(t_0)) + \psi'(t_0)(Y - \psi(t_0)) = 0. \quad (3)$$

Пусть функция задана тремя параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), t \in [a; b], \\ z = \theta(t). \end{cases}$$

Если функции $(\varphi(t), \psi(t), \theta(t))$ дифференцируемы, то касательная к графику функции, заданной параметрическими уравнениями, в точке $(\varphi(t_0), \psi(t_0), \theta(t_0))$ имеет канонический вид:

$$\frac{X - \varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)} = \frac{Y - \psi(t_0)}{\psi'(t_0)} = \frac{Z - \theta(t_0)}{\theta'(t_0)}. \quad (4)$$

Существует нормальная плоскость, проведенная в этой же точке:

$$\varphi'(t_0)(X - \varphi(t_0)) + \psi'(t_0)(Y - \psi(t_0)) + \theta'(t_0)(Z - \theta(t_0)) = 0. \quad (5)$$

Практическое занятие

1. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой и угол наклона касательной к кривой в точке:

а) $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad x = 1, y = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$
 б) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t \end{cases}$ при $t = 1$.

Решение:

а) Вычислим значение параметра t , при котором $x = 1$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\begin{cases} 2 \cos t = 1, \\ \sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

$$t = -\frac{\pi}{3}.$$

Вычислим производные функций $\varphi(t), \psi(t)$:

$$\begin{cases} x' = -2 \sin t, \\ y' = \cos t. \end{cases}$$

Тогда:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = -\frac{\cos t}{2 \sin t} = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} t.$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} k &= \frac{dy}{dx} \left(-\frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \\ \alpha &= \operatorname{arctg} k = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

Ответ: $k = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} \right).$

2. Составьте уравнение касательной и нормали к кривой в точке:

а) $\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^2}, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^2}, \end{cases} \quad x = \frac{6a}{5}, y = \frac{12a}{5}.$

Указание: найти значение параметра t , соответствующее координатам точки, вычислить значение производных функций $\varphi(t), \psi(t)$ при этом значении параметра, воспользоваться формулами (ф. 2), (ф. 3).

$$б) \begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^2, \end{cases} \text{ при } t = 0, t = 1.$$

Указание: найти координаты точки касания, соответствующие каждому значению параметра, вычислить значение производных функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$ при этом значении параметра, воспользоваться формулами (ф. 2), (ф. 3).

3. В каких точках кривой, заданной параметрическими уравнениями, касательная параллельна прямой l :

$$\begin{cases} x = 2t^3 - 9t^2 + 12t - 1, \\ y = t^2 + t + 1, \end{cases}$$

при этом l параллельна оси Oy , Ox .

Решение:

Пусть l параллельна оси Ox . Вначале найдем производные x' , y' :

$$\begin{aligned} x' &= 6t^2 - 18t + 12, \\ y' &= 2t + 1. \end{aligned}$$

Тогда:

$$k = \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{2t + 1}{6t^2 - 18t + 12}.$$

Угловой коэффициент оси Ox равен 0, поэтому получаем уравнение:

$$\frac{2t + 1}{6t^2 - 18t + 12} = 0,$$

которое имеет единственный корень $t = -\frac{1}{2}$. Этому параметру соответствует точка M с координатами $x = -9,5$, $y = 0,75$.

Пусть l параллельна оси Oy . Эта прямая перпендикулярна оси Ox . Поэтому ее угловой коэффициент равен ∞ . Для получения то-

чек касания необходимо решить уравнение:

$$\frac{1}{k} = 0.$$

или

$$\frac{6t^2 - 18t + 12}{2t + 1} = 0,$$

которое равносильно уравнению:

$$6t^2 - 18t + 12 = 0.$$

Получаем два значения параметра: $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. Первому значению параметра t соответствует точка $M_1(4; 3)$, второму – точка $M_2(-5; 7)$.

Ответ: $M(-9,5; 0,75)$, $M_1(4; 3)$, $M_2(-5; 7)$.

4. Найти угол между касательными к эллипсу $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$,

в точках $t_1 = \frac{\pi}{6}$, $t_2 = \frac{\pi}{3}$.

Указание: найти угловые коэффициенты касательных к эллипсу в точках, соответствующих значениям параметров $t_1 = \frac{\pi}{6}$, $t_2 = \frac{\pi}{3}$, для вычисления угла между касательными в этих точках воспользоваться формулой (ф. 3) из занятий № 1–2.

5. Составить уравнение касательной и нормальной плоскости к кривой в точке, соответствующей значению параметра t :

$$\begin{cases} x = acost, \\ y = asint, \\ z = bt. \end{cases}$$

Указание: применить формулы (ф. 4) и (ф. 5) из занятия № 3.

6. В каких точках касательная к кривой параллельна плоскости α :

$$\begin{cases} x = 3t - t^3, \\ y = 3t^2, \\ z = 3t + t^3, \end{cases} \quad \alpha : 3x + y + z + 2 = 0.$$

Указание: вычислить производные функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\theta(t)$ для нахождения значения параметра t , при котором касательная к кривой параллельна плоскости, используем условие перпендикулярности двух векторов (их скалярное произведение равно нулю), один из них вектор (x', y', z') , другой – вектор нормали к плоскости (A, B, C) , где A, B, C – коэффициенты уравнения плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Самостоятельная работа: индивидуальное задание № 1.

Занятие № 4. Доказательство неравенств с помощью производной

Цель занятия: применение достаточного условия строгой монотонности функции для доказательства неравенств.

Справочный материал

Определение. Функция называется *возрастающей* (*убывающей*) на данном числовом промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.

Достаточным признаком возрастания (убывания) дифференцируемой функции на отрезке $[a, b]$ является положительность (отрицательность) значений производной на интервале (a, b) . Поэтому получается следующее применение производной для доказательства неравенств.

Теорема. Пусть функции f и g непрерывны в любой точке промежутка $[a, b]$ и имеют производную в любой точке интервала (a, b) . Для того, чтобы доказать неравенство $f(x) < g(x)$, необходимо и достаточно проверить истинность каждого из неравенств:

$$f(a) < g(a), \quad f'(x) < g'(x).$$

Практическое занятие

Доказать неравенства:

1. $e^x > 1 + x, x > 0$.
2. $\ln(1 + x) > \frac{x}{x+1}, x > 0$.
3. $x^2 - x^3 < \frac{1}{6}, x > \frac{2}{3}$.
4. $\arcsin x > x, 0 < x < 1$.
5. $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}, x \geq 0$.

$$6. \quad x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x, \quad x > 0.$$

Решение:

$$1. \quad e^x > 1+x, \quad x > 0.$$

Проверим достаточные условия теоремы для доказательства неравенства:

$$\begin{aligned} a &= 0, \quad e^0 \geq 1 + 0. \\ (e^x)' &= e^x, \quad (x+1)' = 1. \\ x > 0 &\Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow e^x > 1+x. \end{aligned}$$

Самостоятельная работа: домашнее задание № 1.

Доказать неравенства:

$$1. \quad 2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}, \quad x > 1.$$

$$2. \quad x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x, \quad x > 0.$$

Занятие № 5. Задачи на применение производной

Цель занятия: применение физического смысла производной для решения задач.

Справочный материал

Механический смысл производной: значение производной в точке t_0 от функции $S = f(t)$, задающей закон движения точки, равно мгновенной скорости движения, то есть:

$$v_{\text{мгн.}}(t_0) = f'(t_0).$$

Поэтому справедливы формулы для силы тока $I(t)$, угловой скорости $\omega(t)$, плотности стержня $\rho(l)$, ускорения движения $a(t)$:

$$I(t) = q'(t), \quad (\text{ф. 1})$$

$$\omega(t) = \varphi'(t), \quad (\text{ф. 2})$$

$$\rho(l) = m'(l), \quad (\text{ф. 3})$$

$$a(t) = v'(t) \quad (\text{ф. 4})$$

где $q(t)$ – количество электричества, протекающего через проводник, $\varphi(t)$ – угол поворота шкива, $m(t)$ – масса стержня, $v(t)$ – скорость движения тела.

Для решения задач необходимы также достаточные условия строгой монотонности функции, а также достаточные условия существования точки экстремума функции.

Для того, чтобы дифференцируемая функция была возрастающей (убывающей) на числовом промежутке, необходимо и достаточно, чтобы производная на этом числовом промежутке была положительной (отрицательной).

Для того, чтобы дифференцируемая функция имела экстремум в данной точке, достаточно, чтобы производная в этой точке была равна нулю или не существовала, а знак производной изменялся на противоположный при переходе через эту точку.

Практическое занятие

1. На каждом из рисунков 4, а–и изображены графики зависимости от времени координаты $x(t)$ и скорости $v(t)$ материальной точки, движущейся по квадратичному закону вдоль координатной прямой. Восемь из девяти графиков скорости неверные. Укажите, какие именно. В чем состоят допущенные ошибки? Найдите правильный рисунок.

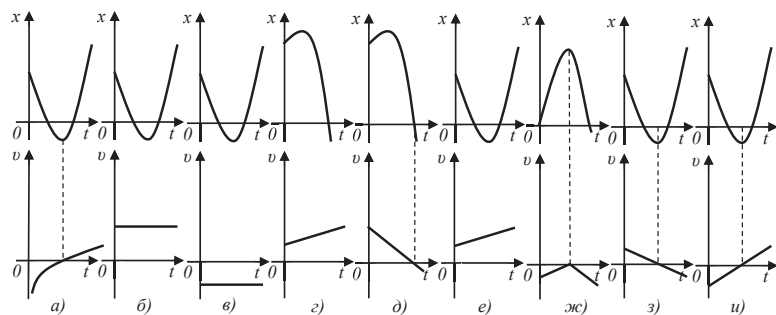


Рис. 4

Решение:

Материальная точка движется вдоль координатной прямой по квадратичному закону $x(t) = pt^2 + qt + r$. Графиком квадратичной функции является парабола. Направление ветвей параболы зависит от знака старшего коэффициента: если старший коэффициент p положителен, то ветви направлены вверх, а если отрицателен, то ветви направлены вниз.

Скорость движения этой материальной точки равна значению производной функции $x(t)$, исходя из физического смысла производной, поэтому:

$$v(t) = 2pt + q.$$

Графиком этой функции является прямая, монотонность которой зависит от знака старшего коэффициента $2p$: функция возрастает, если старший коэффициент положителен, и убывает, если он отрицателен.

Таким образом, параболе с ветвями, направленными вверх или вниз, соответствует прямая, возрастающая или убывающая и пересекающая ось Ox в точке t_0 , являющейся точкой минимума квадратичной функции.

Ответ: правильный рисунок 4, и.

2. На каждом из рисунков 5, а–д схематически изображены графики зависимости от времени координаты $x(t)$, движущейся вдоль координатной прямой по такому же закону, как и в задаче 1. Известно, что при построении некоторых графиков ускорения допущены ошибки. Укажите, какие из рисунков правильные, а какие нет. В чем заключаются допущенные ошибки? Нарисуйте правильные графики.

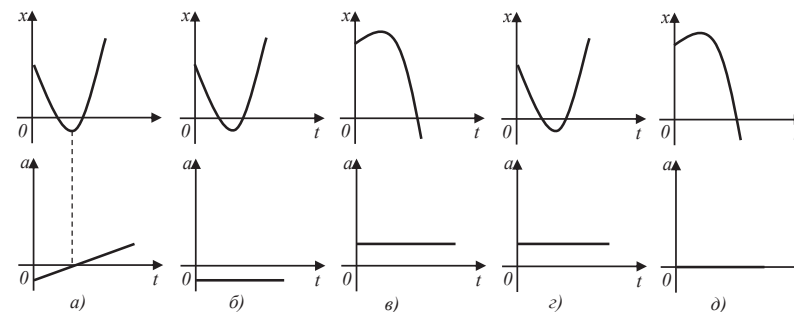


Рис. 5

Решение:

По формуле (ф. 4) получаем, что $a = 2p$, то есть ускорение является постоянной функцией, значение которой равно удвоенному старшему коэффициенту квадратичной функции. Поэтому правильным является рисунок 2, г.

Ответ: правильный рисунок 2, г.

3. На каждом из рисунков 6, а–в изображен график зависимости от времени ускорения $a(t)$ движущейся прямолинейно материальной точки. Ученик попытался, опираясь на этот график, построить один из возможных графиков скорости $v(t)$ движения

этой же точки. Однако при этом он допустил ошибки. Найдите ошибки. Нарисуйте правильные графики скорости.

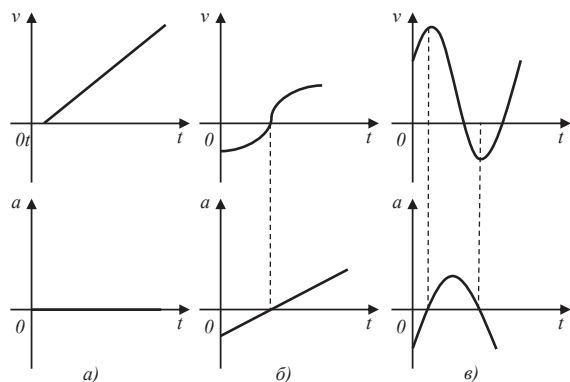


Рис. 6

Указание: использовать условие знакопостоянства функции и достаточные условия возрастания и убывания функции.

4. Через поперечное сечение проводника протекает заряд. График зависимости заряда q от времени представлен на рисунке 7, а. Используя этот график, ученик изобразил график силы тока $I(t)$ в проводнике (рис. 7, б). Верен ли график?

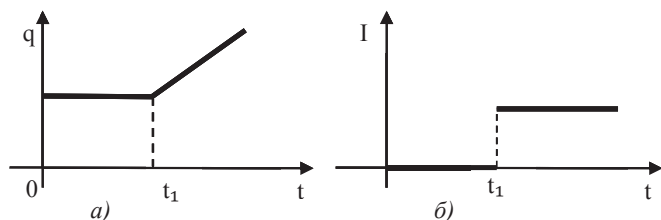


Рис. 7

Указание: записать функцию, график которой представлен на

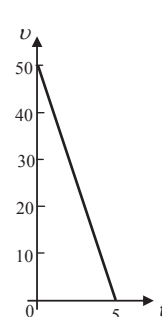


Рис. 8

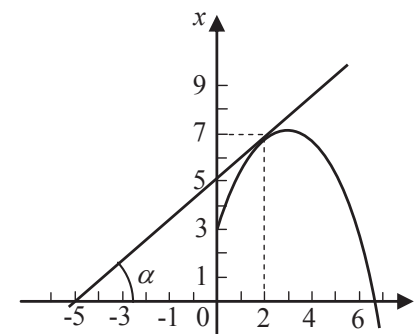


Рис. 9

рисунке 7, а, вычислить производную этой функции, построить график производной. Убедиться в верности графика 7, б.

5. На рисунке 8 изображен график скорости тела, брошенного вертикально вверх с высоты 20 м в первые 5 с движения. Используя данные, показанные на рисунке, постройте график зависимости от времени высоты $h(t)$ тела над Землей.

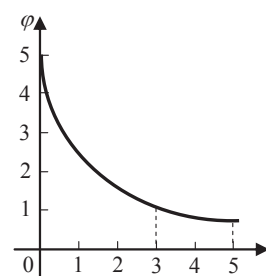


Рис. 10

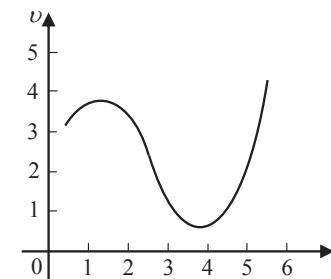


Рис. 11

Указание: воспользоваться достаточным признаком возрастания и убывания функции.

6. На рисунке 9 изображен график зависимости координаты материальной точки, движущейся по квадратичному закону вдоль координатной прямой, от времени. Пользуясь данными, показанными на рисунке, определите значение скорости v точки в момент $t = 2$ с.

Указание: воспользоваться геометрическим смыслом производной в данной точке.

7. Маховик, задерживаемый тормозом, за t секунд поворачивается на угол $\varphi = \varphi(t)$ радианов. Используя график функции (рис. 10), оцените по графику угловую скорость в момент времени $t = 3$ с.

Указание: воспользоваться достаточным условием возрастания и убывания функции.

8. На рисунке 11 изображен график скорости $v = v(t)$ прямолинейно движущейся материальной точки. Можно ли, используя этот график, построить график ускорения $a = a(t)$ той же точки?

Указание: воспользоваться достаточным условием существования точки экстремума функции.

9. На рисунке 12 изображен график зависимости массы неоднородного стержня от его длины. Используя данный график, попробуйте определить линейную плотность стержня в точке $l = 4$ м.

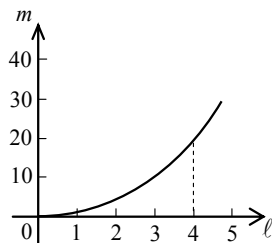


Рис. 12

Указание: воспользоваться формулой (ф. 3).

Занятие № 6. Физический смысл производной

Цель занятия: применение физического смысла производной для решения задач.

Справочный материал

Механический смысл производной: значение производной в точке t_0 от функции $S = f(t)$, задающей закон движения точки, равно мгновенной скорости движения, то есть:

$$v_{\text{мгн.}}(t_0) = f'(t_0).$$

Поэтому справедливы формулы для силы тока $I(t)$, угловой скорости $\omega(t)$, плотности стержня $\rho(l)$, ускорения движения $a(t)$:

$$I(t) = q'(t), \quad (\text{ф. 1})$$

$$\omega(t) = \varphi'(t), \quad (\text{ф. 2})$$

$$\rho(l) = m'(l), \quad (\text{ф. 3})$$

$$a(t) = v'(t) \quad (\text{ф. 4})$$

где q – количество электричества, протекающего через проводник, φ – угол поворота шкива, m – масса стержня, v – скорость движения тела.

Сила, действующая на тело, вычисляется по формуле:

$$F = ma. \quad (\text{ф. 5})$$

Для решения домашнего задания необходима формула кинетической энергии тела:

$$K = \frac{mv^2}{2}.$$

Практическое занятие

1. Зависимость пройденного телом пути от времени дается

формулой $s = 1 + 2t + t^2$ (м). Найти скорость и ускорение через 2 с после начала движения.

Указание: воспользоваться механическим смыслом производной и формулой (ф. 4).

2. Точка движется по закону $s = a + bt + ct^2$. Найти силу, действующую на точку.

Указание: воспользоваться механическим смыслом производной и формулами (ф. 4), (ф. 5).

3. Тело движется прямолинейно в вертикальном направлении по закону $s = 2 + 9t - 5t^2$. Определите: а) начальную скорость и начальное положение по отношению к земле; б) время приземления; в) скорость в момент приземления; расстояние от наибольшей точки, в которую поднимется тело, до земли; г) момент времени, когда абсолютная величина скорости будет наибольшей; д) промежуток времени, когда тело движется вертикально вверх; е) промежуток времени, в течение которого значение скорости было отрицательно.

Указание:

- а) вычислить $s(0)$, производную закона движения, затем $v(0)$;
- б) решить уравнение $s(t) = 0$. (ф. 6)
- в) вычислить скорость в момент времени t , являющимся корнем уравнения (ф. 6); решить уравнение $v(t) = 0$, получить корень $t = c$; вычислить $s(c)$;
- г) данный момент времени – это момент приземления;
- д) найти длину промежутка времени, когда скорость положительна;
- е) вычислить длину промежутка времени, когда тело падает.

4. Лестница длиной a , прислоненная к вертикальной стене, падает, скользя одним концом о стену, а другим о пол. С какой скоростью опускается верхний конец в момент, когда нижний конец, отодвигающийся от стены с постоянной скоростью v , отстоит от нее на расстоянии b ?

Указание: получить функцию, описывающую зависимость положения верхнего конца лестницы от времени при отодвигании нижнего конца от стены, вычислить производную этой функции.

5. Постройте график скорости движения, если закон движения задан следующим образом:

$$s(t) = \begin{cases} -\frac{1}{3}t^3 + 7t; & 0 \leq t \leq 2; \\ -0,5t^2 + 5t; & 2 < t \leq 5. \end{cases}$$

Указание: найти производную функции и построить ее график.

6. Камень, брошенный в пруд, вызывает ряд концентрических волн. С какой скоростью возрастает площадь, захваченная волной к концу второй секунды, если радиус волны возрастает со скоростью 2 м/с?

Указание: воспользоваться формулой площади круга $S = \pi r^2$, где r – радиус круга.

7. Имеется тонкий неоднородный стержень АВ длиной 20 см. Известно, что для любой его точки С, отстоящей от точки А на расстояние l см, масса части АС определяется по формуле: $m = 3l + 5l$. Найдите линейную плотность: а) в точке, отстоящей от точки А на 5 см; б) в самой точке А; в) в конце стержня.

Указание: воспользоваться формулой (ф. 3).

Самостоятельная работа: домашнее задание № 2.

Вариант № 1

1. Точка движется прямолинейно так, что ее расстояние s от начального пункта через t с равно $s(t) = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$. В какие моменты точка была в начальном пункте? В какие моменты ее скорость равна нулю?

2. Тело массой 3 кг движется прямолинейно по закону $s = 1 + t + t^2$, где s – в сантиметрах, t – в секундах. Определить кинетическую энергию тела через 5 с после начала движения.

Вариант № 2

1. Угол α поворота шкива в зависимости от времени t задан функцией $\alpha(t) = t^2 + 3t - 5$. Найти угловую скорость при $t = 5$ с.

2. Тело массой 4 кг движется прямолинейно по закону $s = 1 + t + t^2$, где s – путь в сантиметрах, t – время в секундах. Определите кинетическую энергию тела через 3 с после начала движения.

Вариант № 3

1. Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален квадрату времени. Первый оборот был сделан колесом за 8 с. Найти угловую скорость ω через 32 с после начала движения.

2. Точка массы m колеблется по оси Ox так, что в момент времени t ее отклонение x от положения равновесия определяется уравнением $x = Ae^{-at}\cos(at + b)$. Найти скорость движения точки и действующую на нее силу.

Вариант № 4

1. Угол θ , на который поворачивается колесо через t с, равен $\theta = at^2 - bt + c$, где a, b, c – положительные постоянные. Найти угловую скорость ω движения колеса. Через сколько времени угловая скорость будет равна нулю?

2. Из пункта O по прямым, образующим между собой угол в 60° , движутся два тела. Первое движется равномерно со скоростью 5 км/ч, закон движения второго тела $s(t) = 2t^2 + t$. С какой скоростью они удаляются друг от друга в момент времени $t = 2$ час?

Вариант № 5

1. Количество электричества, протекшее через проводник, начиная с момента времени $t = 0$, дается формулой $Q = 2t^2 + 3t + 1$ (кулонов). Найти силу тока в конце пятой секунды.

2. Одна материальная точка движется по закону $s_1(t) = t^3 - t^2 + 3t - 1$, другая – по закону $s_2(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 5t - 10$, где t – в секундах, s_1 и s_2 – путь в метрах. Определите ускорение движения в тот момент, когда их скорости равны.

Вариант № 6

1. Резервуар, имеющий форму полушара с внутренним радиусом R м, наполняется водой со скоростью Q л/с. Определить скорость повышения уровня в резервуаре в момент, когда он будет равен $0,5R$ м.

2. Точка движется прямолинейно под действием постоянной

силы с ускорением 2 м/с^2 и с нулевой начальной скоростью. Через 3 с после начала движения сила прекращает действовать и точка начинает двигаться равномерно с набранной скоростью. Найдите закон движения точки и постройте график движения.

Вариант № 7

1. Точка совершает прямолинейное колебательное движение по закону $x = A \sin \omega t$. Определить скорость и ускорение движения в момент времени $t = \frac{2\pi}{\omega}$.

2. Радиус шара r равномерно возрастает со скоростью 2 см/с . С какими скоростями возрастает поверхность и объем шара? Каковы будут эти скорости в момент, когда r достигнет 10 см ?

Вариант № 8

1. Зависимость количества Q вещества, получаемого в химической реакции, от времени t определяется формулой $Q = f(1 + be^{-mt})$. Определить скорость реакции.

2. Распад радия совершается по закону $R = R_0 e^{-kt}$, где R_0 – количество радия в начальный момент $t = 0$, R – количество нераспавшегося радия в момент времени t . Определите скорость распада радия в момент времени t . Покажите, что скорость распада пропорциональна количеству радия.

Вариант № 9

1. Точка движется по параболе $y = 5 - x^2$ так, что ее абсцисса x изменяется с течением времени t по закону $x = at^2$. С какой скоростью изменяется ордината точки?

2. Точка движется по закону $s(t) = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$. Установите, остановилась ли она в пути; если остановилась, то в какой момент времени.

Вариант № 10

1. Зависимость пройденного телом пути s от времени t дает-

ся формулой $s = 2t - 3t^2 + 4t^3$ (м). Найти расстояние, пройденное телом, скорость и ускорение тела через 2 с после начала движения.

2. При торможении маховик за t секунд поворачивается на угол $\varphi(t) = 5 + 6t - t^2$ радиан. Найдите: а) угловую скорость вращения маховика в момент времени $t = 2$ с; б) угловое ускорение в момент времени t и в момент времени, когда вращение прекратится.

Вариант № 11

1. Зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s = 6 - 3t + 2t^2$. Найти скорость и ускорение тела при $t = 4$ с.

2. При торможении маховик за t секунд поворачивается на угол $\varphi(t) = 5 + 6t - t^2$ радиан. Найдите: а) угловую скорость вращения маховика в момент времени $t = 2$ с; б) угловое ускорение в момент времени t , когда вращение прекратится.

Вариант № 12

1. Лестница длиной ℓ в момент времени $t = 0$ стоит вертикально, прислоненная к стене. В этот момент нижний конец начинает равномерно отодвигаться от стены со скоростью v . Найдите: а) высоту верхнего конца в момент времени t ; б) скорость, с которой этот конец опускается в момент времени t .

2. По прямой движутся две точки, имеющие законы движения $s_1(t) = 3t + 1$ и $s_2(t) = t^2 + 3$ (s – в сантиметрах, t – в секундах). С какой скоростью движутся эти точки в момент их встречи?

Вариант № 13

1. Человек ростом 1,72 м удаляется от источника света, находящегося на высоте h ($h > 1,72$), со скоростью 6 км/ч. Определите скорость перемещения тени его головы.

2. Тело массой в 3 кг движется прямолинейно по закону $s = 1 + t + t^2$, s – в сантиметрах, t – в секундах. Определить кинетическую энергию через 5 с после начала движения.

Вариант № 14

1. Точка движется прямолинейно так, что ее расстояние s от начального пункта через t с равно $s(t) = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$. В какие моменты точка была в начальном пункте? В какие моменты ее скорость равна нулю?

2. Тело массой 4 кг движется прямолинейно по закону $s = 1 + t + 2t^2$, где s – путь в сантиметрах, t – время в секундах. Определите кинетическую энергию тела через 3 с после начала движения.

Вариант № 15

1. Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален квадрату времени. Первый оборот был сделан колесом за 8 с. Найти угловую скорость ω через 32 с после начала движения.

2. Точка массы m колеблется по оси Ox так, что в момент времени t ее отклонение от положения равновесия определяется уравнением $x = Ae^{-at}\cos(at + b)$. Найти скорость движения точки и действующую на нее силу.

Вариант № 16

1. Точка движется по закону $s = a + bt + ct^2$. Найти силу, действующую на точку.

2. Тело движется прямолинейно в вертикальном направлении по закону $h(t) = 2 + 9t - 5t^2$. Определите начальную скорость и начальное положение по отношению к земле. Приземлится ли тело? Если да, то через сколько секунд после начала движения? Определите скорость тела в момент приземления.

Занятие № 7.

Задачи о наибольших и наименьших значениях функции

Цель занятия: применение условия существования экстремума функции к решению задачи о наибольших и наименьших значениях функции одной переменной.

Справочный материал

Определение. Точка a называется *критической* (подозрительной на экстремум), если производная в этой точке равна нулю или не существует.

Критическая точка является точкой экстремума, если при переходе через нее производная меняет свой знак на противоположный. Точка a является точкой минимума, если производная при переходе через нее меняет свой знак с «+» на «-», и точкой максимума, если производная при переходе через нее меняет свой знак с «-» на «+».

Для решения задач необходимы дополнительные формулы:

1. Площадь прямоугольника равна произведению длин его сторон: $S = a \cdot b$.
2. Длина ломаной равна сумме длин всех ее звеньев: $P = a + b + \dots + c$.
3. Объем цилиндра: $V = \pi R^2 H$, где R – радиус основания, H – высота цилиндра.
4. Площадь полной поверхности: $P = 2\pi R^2 + 2\pi RH$.
5. Теорема Пифагора: в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов $c^2 = a^2 + b^2$.

Практическое занятие

1. Одна сторона прямоугольного участка земли примыкает к берегу канала, а три другие огораживаются забором. Каковы должны быть размеры этого участка, чтобы его площадь равнялась 800 м^2 , а длина забора была наименьшей?

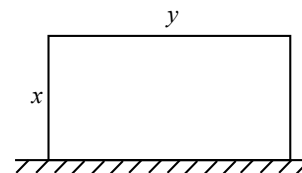


Рис. 13

Решение:

Участок имеет форму прямоугольника со сторонами x и y (рис. 13). Его площадь равна:

$$S = x \cdot y,$$

а длина забора $P = 2x + y$. Выразим переменную y через площадь S и переменную x :

$$y = \frac{S}{x}.$$

$$\text{Отсюда } P(x) = 2x + \frac{800}{x}.$$

$$\text{Вычислим производную: } P'(x) = 2 - \frac{800}{x^2}.$$

$$\text{Решаем уравнение: } P'(x) = 0.$$

$$2 - \frac{800}{x^2} = 0.$$

$$x_1 = 20, \quad x_2 = -20.$$

Второй корень не удовлетворяет условию отрицательности значения, поэтому проверяем, является ли точкой минимума $x = 20$.

$$P'(10) < 0, \quad P'(30) > 0.$$

Таким образом, длина забора наименьшая, когда $x = 20$ и $y = 40$.

Ответ: 20 м, 40 м, 20 м.

2. Найти размеры цилиндрической закрытой цистерны с заданным объемом V и с наименьшей полной поверхностью.

Указание: воспользоваться формулами объема цилиндра и площади полной поверхности, проверить, что найденная точка является точкой минимума, вычислить радиус и высоту цилиндра.

3. Выбрать место постройки моста через реку, чтобы длина дороги между двумя пунктами, расположенными по разные стороны от реки, была наименьшей.

Указание: введя обозначения $AL = a$, $LK = x$, $KD = h$, $NB = c$, $MB = b$

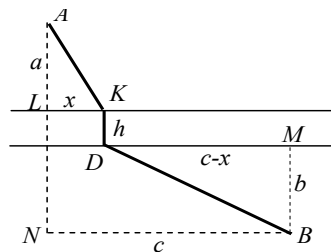


Рис. 14

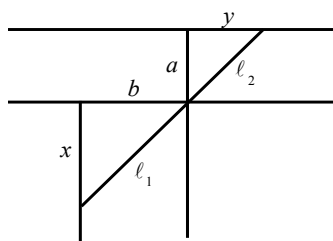


Рис. 15

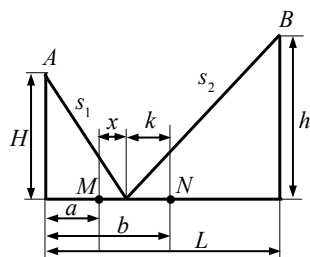


Рис. 16

(рис. 14), получим формулу длины дороги между двумя пунктами:

$$l(x) = AK + h + DB,$$

или

$$l(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + h + \sqrt{b^2 + (c - x)^2}.$$

Вычислить производную, решить уравнение $l'(x) = 0$. Из корней уравнения выбрать тот, который удовлетворяет условию: $x < c$.

4. От канала шириной a м отходит под прямым углом другой канал шириной b м. Какой наибольшей длины бревна можно сплавлять по этим каналам из одного канала в другой (не учитывая толщины бревна)?

Указание: введем обозначения a, b, x, y (рис. 15), тогда длина сплавляемого бревна вычисляется по формуле:

$$l(x, y) = \sqrt{x^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + y^2}.$$

Вычислив из пропорции $\frac{x}{a} = \frac{b}{y}$ переменную y через переменную x , получаем функцию одной переменной $l(x)$.

Исследовать на экстремум полученную функцию.

участок берега MN . Найти кратчайший путь рыбака $s = s_1 + s_2$.

Указание: ввести $x = MK$, тогда искомое расстояние вычисляется по формуле:

$$s = \sqrt{H^2 + (a + x)^2} + \sqrt{h^2 + (L - a - x)^2}.$$

Исследовать полученную функцию на экстремум при условии $x < b - a$.

Варианты значений параметров:

1. $a = 200, b = 300, H = 400, h = 300, L = 700$.
2. $a = 400, b = 600, H = 800, h = 600, L = 1400$.
3. $a = 600, b = 900, H = 1200, h = 900, L = 2100$.
4. $a = 800, b = 1200, H = 1600, h = 1200, L = 2800$.
5. $a = 1000, b = 1500, H = 2000, h = 1500, L = 3500$.
6. $a = 400, b = 500, H = 300, h = 400, L = 700$.
7. $a = 800, b = 1000, H = 600, h = 800, L = 1400$.
8. $a = 1200, b = 1500, H = 900, h = 1200, L = 2100$.
9. $a = 1600, b = 2000, H = 1200, h = 1600, L = 2800$.
10. $a = 2000, b = 2500, H = 1500, h = 2000, L = 3500$.

Самостоятельная работа: домашнее задание № 3.

Рыбаку нужно переправиться с острова А на остров В (рис. 16). Чтобы пополнить свои запасы, он должен попасть на

Занятие № 8. Элементы дифференциальной геометрии

Цель занятия: применение производной для вычисления числовых характеристик прямой.

Справочный материал

Рассмотрим спрямляемые кривые (кривые, длину дуги которых можно вычислить). Эти кривые имеют две числовые характеристики.

Первая из них – кривизна кривой. Кривизна кривой в некоторой ее точке характеризует отклонение линии от своей касательной в этой точке. Из кривых постоянную кривизну имеют только прямая ($K = 0$) и окружность ($K = \frac{1}{R}$).

Если плоская кривая задана уравнением $y = f(x)$, то ее кривизна в любой точке определяется формулой:

$$K = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (\Phi. 1)$$

Если плоская кривая задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

то справедлива формула:

$$K = \frac{|\dot{x} \cdot \ddot{y} - \dot{y} \cdot \ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (\Phi. 2)$$

где $\dot{x}$, $\dot{y}$ – производные первого порядка, $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ – производные второго порядка.

Определение. Величина R , обратная кривизне кривой в не-

которой ее точке, называется *радиусом кривизны* кривой в этой точке.

$$R = \frac{1}{K}. \quad (\Phi. 3)$$

Определение. *Кругом кривизны* в ее точке M называется окружность с радиусом, равным радиусу кривизны кривой в точке M , центр которой C лежит по нормали к кривой в точке M со сторон ее вогнутости (рис. 17).

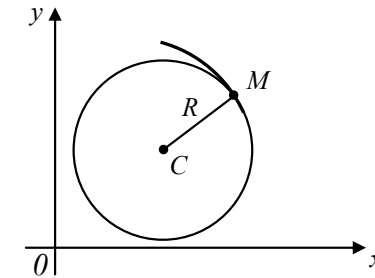


Рис. 17

Координаты (X, Y) центра кривизны (центра круга кривизны C) кривой в ее точке $M(x, y)$ определяются формулами:

$$\begin{cases} X = x - \frac{1 + (y')^2}{y''} \cdot y', \\ Y = y + \frac{1 + (y')^2}{y''}, \end{cases} \quad (\Phi. 4)$$

или

$$\begin{cases} X = x - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \dot{y} \cdot \ddot{x}} \cdot \dot{y} \\ Y = y + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \dot{y} \cdot \ddot{x}} \cdot \dot{x} \end{cases} \quad (\Phi. 5)$$

Определение. Геометрическое место центров кривизны $C(X, Y)$ линии называется *эволютой* этой кривой, а сама кривая – *эвольвентой*.

Уравнения (ф. 4) и (ф. 5) являются параметрическими уравнениями эволюты.

Если кривая задана уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \theta(t), \end{cases}$$

то кривизна вычисляется по формуле:

$$K = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z} & \dot{x} \\ \ddot{z} & \ddot{x} \end{vmatrix}^2}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{ф. 6})$$

Вторая числовая характеристика кривой – кручение кривой. Кручение кривой характеризует, насколько кривая «неплоская». Существует теорема.

Теорема. C^2 – гладкая кривая, кручение которой всюду равно нулю, плоская.

Кручение кривой вычисляется по формуле:

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \ddot{\ddot{x}} & \ddot{\ddot{y}} & \ddot{\ddot{z}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z} & \dot{x} \\ \ddot{z} & \ddot{x} \end{vmatrix}^2}. \quad (\text{ф. 7})$$

Практическое занятие

1. Найти кривизну кривой:

а) $x = t^2, y = 2t^3$ в точке, где $t = 1$;

б) $y = \cos 2x$ в точке, где $x = \frac{\pi}{2}$.

Указание: воспользоваться формулами (ф.1) и (ф. 2).

2. Определить радиусы кривизны в вершинах эллипса $x = acost, y = bsint$.

Указание: воспользоваться формулами (ф. 2) и (ф. 3).

3. Найти координаты центра кривизны и построить кривую и круг кривизны кривой:

а) $y = 4x - x^2$ в ее вершине;

б) $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$ в точке, где $t = \frac{\pi}{2}$.

Решение:

а) Найдем координаты вершины параболы $y = 4x - x^2$.

$$x_B = -\frac{b}{2a} = 2, \quad y_B = 4.$$

Вычислим производные первого и второго порядка:

$$\begin{aligned} y' &= 4 - 2x, \\ y'' &= -2. \end{aligned}$$

Воспользуемся формулой (ф. 4): $X = 2, Y = \frac{7}{2}$.

$$R = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}.$$

Строим график параболы, чертим окружность (рис. 18):

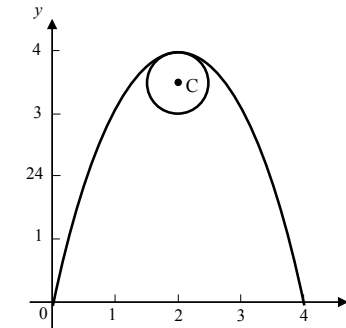


Рис. 18.

4. В каких точках параболы $y = \sqrt{2}x^2$ радиус кривизны равен единице?

Указание: воспользоваться формулами (ф. 1), (ф. 3), решить уравнение $R = 1$.

5. В какой точке кривая $y = e^x$ имеет наибольшую кривизну?

Указание: воспользоваться формулой (ф. 1), исследовать полученную кривизну на экстремум.

6. Найти уравнение эволюты кривой и построить кривую и ее эволюту:

а) $x^2 = 2(1 - y)$;

б) $x = acost, y = bsint$.

Решение:

б) Кривая $x = acost, y = bsint$ – эллипс с полуосями a, b ($a > b > 0$).

Вычислим координаты центра кривизны по формуле (ф. 5):

$$\dot{x} = -asint, \dot{y} = bcost, \ddot{x} = -acost, \ddot{y} = -bsint.$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t,$$

$$\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = ab.$$

$$X = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, Y = -\frac{a^2 - b^2}{b} \sin^3 t.$$

$$a^2 - b^2 = c^2.$$

Так как $a > b$, то $\left| \frac{c^2}{a} \right| < \left| \frac{c^2}{b} \right|$. Получаем графики (рис. 19).

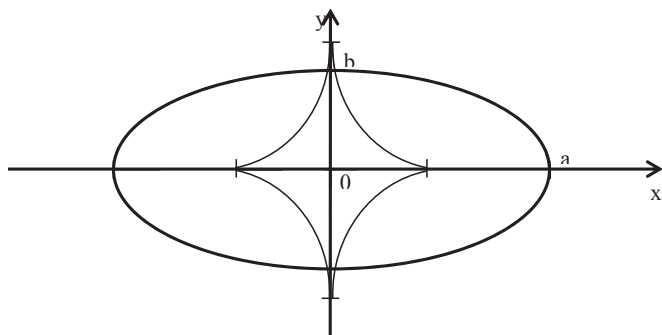


Рис. 19

7. Найти кривизну и кручение кривой:

$$\begin{cases} x = acost, \\ y = asint, \\ z = bt. \end{cases}$$

Указание: воспользоваться формулами (ф. 6), (ф. 7).

8. Докажите, что следующая кривая плоская:

$$\begin{cases} x = a_1 t^2 + b_1 t + c_1, \\ y = a_2 t^2 + b_2 t + c_2, \\ z = a_3 t^2 + b_3 t + c_3. \end{cases}$$

Указание: доказать, что кручение $\tau = 0$.

Самостоятельная работа: индивидуальное задание № 2.

Занятия № 9–11. Элементы теории поля

Цель занятия: применение элементов дифференциального исчисления в теории поля.

Справочный материал

Пусть G – область в трехмерном пространстве (или на плоскости).

Определение. Говорят, что в области задано *скалярное поле*, если любой точке M этой области поставлено в соответствие некоторое число $u(M)$.

Физические примеры скалярных полей: поле температур тела, поле плотностей тела.

Если в пространстве введена прямоугольная система координат $Oxyz$, то скалярное поле описывается функцией трех переменных:

$$u = u(x, y, z), (x, y, z) \in G.$$

Характеристики скалярного поля

Определение. Поверхность (линия), на которой функция принимает постоянное значение, называется *поверхностью* (линией) уровня:

$$u(M) = C.$$

Определение. Производной скалярного поля $u(M)$ в точке M по направлению вектора $\vec{l}$ называется число, равное пределу разностного отношения, когда M_1 приближается к точке M :

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M) = \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{u(M_1) - u(M)}{MM_1},$$

где MM_1 – величина направленного отрезка.

Производная скалярного поля по направлению $\vec{l}$ характеризует скорость изменения функции $u(M)$ в направлении $\vec{l}$. При

этом производная функции $u(x, y)$ по направлению линии уровня (касательному к линии уровня) и производная функции $u(x, y, z)$ по направлению любой линии, лежащей на поверхности уровня (по любому направлению, касательному к поверхности уровня), равна нулю.

Если $\vec{l} = (a, b, c)$, $u = u(x, y, z)$, то справедлива формула:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \quad (\text{ф. 1})$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – направляющие косинусы:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \\ \cos \beta &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \\ \cos \gamma &= \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \end{aligned} \quad (\text{ф. 2})$$

Определение. Градиентом функции (поля) $u(M)$ называется вектор:

$$\text{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}. \quad (\text{ф. 3})$$

Градиент – это вектор наибыстрейшего возрастания функции. Направление вектора $\text{grad} u$ совпадает с направлением нормали к поверхности (линии) уровня, проходящей через данную точку. Из всех производных функции $u(M)$ по взятым различным направлениям наибольшее значение всегда имеет производная по направлению градиента.

Определение. Говорят, что в области G задано *векторное поле*, если каждой точке M этой области поставлен в соответствие некоторый вектор $\vec{a}(M)$:

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}.$$

Физические примеры векторных полей: магнитное поле, создаваемое электрическим током ($\vec{B}$ – вектор магнитной индукции), поле скоростей жидкости, описываемое в любой точке вектором скорости $\vec{v}$.

Характеристики векторного поля

Геометрическая характеристика векторного поля – векторная линия, то есть кривая, в любой точке которой вектор $\vec{a}(M)$ направлен по касательной к этой кривой. Кривая является решением системы дифференциальных уравнений в симметрическом виде.

Определение. Дивергенцией векторного поля $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ называется скалярная функция:

$$\text{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (\text{ф. 4})$$

Определение. Если дивергенция поля в данной точке положительная, то точка называется *источником*. Если дивергенция поля в данной точке отрицательна, то точка называется *стоком*.

Абсолютная величина дивергенции характеризует мощность источника или стока.

Определение. Векторное поле, во всех точках которого дивергенция равна нулю, называется *соленоидальным*.

Определение. Ротором (или вихрем) векторного поля $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ называется векторная функция:

$$\text{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right). \quad (\text{ф. 5})$$

Определение. Векторное поле называется *потенциальным*, если вектор поля $\vec{a}$ является градиентом некоторой скалярной функции $u(M)$: $\vec{a}(M) = \text{grad} u(M)$.

Векторное поле является потенциальным, если выполняется условие:

$$\text{rot} \vec{a} = \vec{0}. \quad (\text{ф. 6})$$

Операторы:

1. Оператор Гамильтона (оператор «набла»):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}.$$

Справедливы формулы: $\nabla u = \text{grad} u$,

$$\nabla \cdot \vec{a} = \text{div} \vec{a}, \\ \nabla \times \vec{a} = \text{rot} \vec{a}.$$

2. Оператор Лапласа (оператор «дельта» или «набла в квадрате»):

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Поле называется *гармоническим*, если $\Delta u = 0$.

Практическое занятие

1. Найти производную функцию $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке

A(3; 4) по направлению:

а) биссектрисы первого координатного угла;

б) вектора $\vec{OA}$;

в) вектора $\vec{a} = (4; -3)$.

Указание: вычислить частные производные первого порядка от данной функции, вычислить направляющие косинусы, воспользоваться формулами (ф. 1), (ф. 2).

2. По какому направлению должна двигаться точка $M(x; y; z)$ при переходе через точку $M_0(-1; 1; -1)$, чтобы функция

$F(M) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ возрастала с наибольшей скоростью?

Указание: вычислить частные производные первого порядка от данной функции, найти градиент функции по формуле (ф. 3).

3. С какой наибольшей скоростью может убывать функция $F(M) = \ln(x^2 - y^2 + z^2)$ при переходе точки через точку $M(x; y; z)$ (1; 1; 1)?

Указание: вычислить частные производные первого порядка от данной функции, воспользоваться формулой (ф. 3), вычислить $|\text{grad} F(M)|$.

4. Найти точки, в которых функция $z = e^x(x - yz + 3y)$ стационарна.

Указание: найти частные производные первого порядка, решить систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases}.$$

5. Найти угол между градиентами скалярных полей $u = \frac{x}{yz^2}$ и $v = x^2 - y^2 - 3z^2$ в точке $M_0(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Указание: вычислить градиенты этих скалярных полей, для нахождения угла воспользоваться определением скалярного произведения: $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, где φ – угол между данными векторами.

6. В каких точках пространства градиент скалярного поля $u = x^2 + y^2 + z^2$:

- а) параллелен оси Ox ;
- б) параллелен плоскости $x - y + z = 3$;
- в) равен $\vec{0}$;
- г) имеет величину, равную 4?

Указание:

- а) использовать условие коллинеарности двух векторов;
- б) условие параллельности прямой и плоскости;
- в) условие стационарности функции;
- г) решить уравнение $|\text{grad} u| = 4$.

7. В каких точках плоскости градиент функции $u = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}y^2$ перпендикулярен вектору $x\vec{i} + y\vec{j}$?

Указание: воспользоваться условием перпендикулярности двух векторов, один из которых – градиент поля (скалярное произведение двух векторов равно нулю).

8. В каких точках градиент функции $u = xy + 2z - z^2$:

- а) коллинеарен вектору $\vec{a}(1; -1; 2)$;
- б) перпендикулярен оси Ox ;
- в) перпендикулярен плоскости $2x + y + z = 1$?

Указание:

- а) использовать условие коллинеарности двух векторов;
- б) условие перпендикулярности двух прямых;
- в) условие перпендикулярности вектора и плоскости.

9. В каких точках пространства градиенты функций $u = x^2 + y^2 + z^2$ и $v^2 = x^2 - y^2 + z^2$ перпендикулярны?

Указание: воспользоваться условием перпендикулярности двух векторов, каждый из которых – градиент поля (скалярное произведение двух векторов равно нулю).

10. Найти производную функции $u = \arctg \frac{xz}{y} + \ln(x^2 z^2 + y^2)$ в точке $M(1; 1; -1)$ по направлению градиента функции $\varphi = xyz - x^2 - y^2 - z^2$ в этой же точке.

Указание: вычислить частные производные первого порядка функции u , градиент функции φ , направляющие косинусы по формуле (ф. 2), затем воспользоваться формулой (ф. 1).

11. Убедитесь в ортогональности линий уровня скалярных функций:

- а) $v = x^2 - y^2, u = xy$;
- б) $u = x^2 + y^2 - z^2, v = xz + yz$.

Указание: доказать перпендикулярность градиентов скалярных полей.

12. Найти дивергенцию векторного поля: $\vec{a} = (x^3 + y^2 + z) \vec{i} + (y^3 + x^2 + z) \vec{j} + (z^3 + x^2 + y) \vec{k}$.

Указание: воспользоваться формулой (ф. 4).

13. Найти дивергенцию векторного поля:

а) $\vec{a} = f_1(y, z) \vec{i} + f_2(x, z) \vec{j} + f_3(x, y) \vec{k}$;

б) $\vec{a} = (x + f_1(y, z)) \vec{i} + (y + f_2(x, z)) \vec{j} + (z + f_3(x, y)) \vec{k}$;

в) $\vec{a} = x f_1(y, z) \vec{i} + y f_2(x, z) \vec{j} + z f_3(x, y) \vec{k}$.

Указание: воспользоваться формулой (ф. 4).

14. Найдите минимальное значение дивергенции векторного поля $\vec{a} = (x - a)(y - b)^2 \vec{i} + (y - b)(x - a)^2 \vec{j}$.

Указание: воспользоваться формулой (ф. 4), исследовать полученную функцию на экстремум.

15. Проверить, что векторное поле $\vec{a} = \frac{x}{yz} \vec{i} + \frac{y}{xz} \vec{j} - \frac{(x+y) \ln z}{xy} \vec{k}$ соленоидальное.

Указание: доказать, что дивергенция поля равна нулю.

16. Найти ротор векторного поля $\vec{a} = x \vec{i} - z^2 \vec{j} + y^2 \vec{k}$.

Указание: воспользоваться формулой (ф. 5).

17. Найти угол между роторами векторных полей $\vec{a} = x^2 y \vec{i} + y^2 z \vec{j} + z^2 x \vec{k}$, $\vec{b} = z \vec{i} + x \vec{j} + y \vec{k}$ в точке $M(1; 1; 1)$.

Указание: вычислить роторы функций по формуле (ф. 5), затем воспользоваться формулой $\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$.

18. Найти длину ротора векторного поля $\vec{a} = (x - z^2) \vec{i} + yz \vec{j} + (x^2 + y^2) \vec{k}$ в точке $M(1; 2; -1)$.

Указание: вычислить ротор по формуле (ф. 5), найти длину полученного вектора.

19. В каких точках пространства ротор векторного поля $\vec{a} = (y^2 + z^2) \vec{i} + (x^2 + z^2) \vec{j} + (x^2 + y^2) \vec{k}$ перпендикулярен оси Oz ?

Указание: использовать условие перпендикулярности двух векторов.

20. В каких точках роторы векторных полей $\vec{a} = xy \vec{i} + yz \vec{j}$

$+ zx \vec{k}$, $\vec{a} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ коллинеарны?

Указание: использовать условие коллинеарности двух векторов.

21. В каких точках пространства ротор векторного поля $\vec{a} = x^2 y \vec{i} + y^2 z \vec{j} + z^2 x \vec{k}$ перпендикулярен плоскости $x + y + z = 2$?

Указание: использовать условие перпендикулярности вектора и плоскости.

22. Проверить, что векторное поле $\vec{a} = \text{gradu}$, $u = \sqrt{x} \sqrt[3]{y} \sqrt[4]{z}$ потенциально.

Указание: проверить условие (ф. 6).

23. Проверить, что поле $u = \sqrt{x^2 + y^2} - x$ является гармоническим.

Указание: проверить условие $\Delta u = 0$.

24. Получить выражения для формул через производные скалярного или векторного поля:

а) $\text{div grad } \vec{a}$;

б) $\text{grad div } \vec{a}$;

в) $\text{rot rot } \vec{a}$.

Указание: воспользоваться формулами (ф. 3), (ф. 4), (ф. 5).

25. Для векторного поля $\vec{a} = x^2 y^2 \vec{i} + y^2 z^2 \vec{j} + z^2 x^2 \vec{k}$ вычислить $\text{rot rot } \vec{a}$, $\text{grad div } \vec{a}$, $\Delta \vec{a}$.

Указание: воспользоваться формулами (ф. 3), (ф. 4), (ф. 5).

26. Докажите, что для векторного поля $\vec{a} = e^{\pm y} \vec{i} + e^{\pm z} \vec{j} + e^{\pm x} \vec{k}$ выполняется условие $\vec{a} = \text{rot rot } \vec{a}$.

Указание: воспользоваться формулой (ф. 5).

Самостоятельная работа: индивидуальное задание № 3.

Занятие № 12.

Неявная функция и ее дифференцирование

Цель занятия: научиться дифференцировать неявную функцию, заданную различными способами.

Справочный материал

Если неявная функция $y = f(x)$ задана уравнением $F(x, y) = 0$ и функция $F(x, y)$ имеет частные производные первого порядка по всем переменным, причем $F'_y \neq 0$, то справедлива формула вычисления производной первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{F'_x}{F'_y}. \quad (\text{ф. 1})$$

Вычисление производных второго и высших порядков осуществляется путем многократного дифференцирования уравнения $F(x, y) = 0$, считая, что y – сложная функция от аргумента x . Продифференцировав уравнение один раз по переменной x , получаем уравнение:

$$F_1(x, y, y') = 0,$$

из которого получается выражение для производной первого порядка:

$$y' = f(x, y). \quad (\text{ф. 2})$$

Продифференцировав уравнение $F_1(x, y, y') = 0$ снова по переменной x , получаем новое уравнение:

$$F_2(x, y, y', y'') = 0,$$

из которого получается выражение для производной второго порядка:

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (\text{ф. 3})$$

Для получения окончательного вида производной второго порядка необходимо подставить вместо производной первого

порядка функцию из формулы (ф. 2).

Для получения производной третьего порядка процедуру дифференцирования повторить еще раз, получить выражение для этой производной, подставить функции вместо производных первого и второго порядков, тем самым найти ее окончательный вид.

Если неявная функция $z = f(x, y)$ задана уравнением $F(x, y, z) = 0$ и функция $F(x, y, z)$ частные производные первого порядка по всем переменным, причем $F'_z \neq 0$, то справедливы формулы вычисления частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{F'_y}{F'_z}. \quad (\text{ф. 4})$$

При этом дифференциалы от неявной функции $z = f(x, y)$ первого и второго порядков (если они существуют) как от функции двух переменных записываются соответственно в следующем виде:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (\text{ф. 5})$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \quad (\text{ф. 6})$$

Неявная функция $z = f(x, y)$ может быть задана системой трех функций, каждая из которых является функцией двух независимых переменных u и v :

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v). \end{cases}$$

Алгоритм нахождения полного дифференциала первого порядка состоит в следующем. Пусть функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ имеют частные производные первого порядка по всем переменным. Вычислим полные дифференциалы функций $x(u, v)$, $y(u, v)$:

$$\begin{cases} dx = x'_u du + x'_v dv, \\ dy = y'_u du + y'_v dv. \end{cases}$$

Из этой системы двух уравнений необходимо выразить дифференциалы du, dv через дифференциалы dx, dy . В общем случае это можно сделать, применив формулы Крамера для решения линейной системы уравнений:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_u' & x_v' \\ y_u' & y_v' \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} dx & x_v' \\ dy & y_v' \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} x_u' & dx \\ y_u' & dy \end{vmatrix}, \quad (\text{ф. 7})$$

$$du = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad dv = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Вычислим полный дифференциал функции $z(u, v)$ как функции переменных u и v , используем формулу (ф. 7), получим полный дифференциал функции переменных x и y :

$$dz = z_1(u, v)dx + z_2(u, v)dy.$$

Для нахождения полного дифференциала второго порядка необходимо продифференцировать последнее равенство по переменным u и v , и использовать формулу (ф. 7):

$$d^2z = ((z_1(u, v))'_u du + (z_1(u, v))'_v dv)dx + ((z_2(u, v))'_u du + (z_2(u, v))'_v dv)dy = f_1(u, v)dx^2 + f_2(u, v)dxdy + f_3(u, v)dy^2. \quad (\text{ф. 8})$$

Практическое занятие

1. Найти первую производную функции, заданной неявно:

- а) $xe^{2y} - y \ln x = 8$,
б) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

Указание: воспользоваться формулой (ф. 1).

2. Найти производные первого, второго и третьего порядков для функции, определяемой уравнением:

$$x^2 + xy + y^2 = 3.$$

Решение:

Составим функцию $F(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3$.

Продифференцируем эту функцию по переменной x :

$$(x^2 + xy + y^2 - 3)' = 2x + y + xy' + 2yy' = (2x + y) + (x + 2y)y'. \\ (2x + y) + (x + 2y)y' = 0.$$

Отсюда первая производная равна:

$$y' = -\frac{2x + y}{x + 2y}.$$

Продифференцируем снова предыдущее равенство:

$$((2x + y) + (x + 2y)y')' = 2 + y' + (1 + 2y')y' + (x + 2y)y' = 2 + 2y' + 2(y')^2 + (x + 2y)y'' = 0.$$

Поэтому вторая производная равна:

$$y'' = \frac{2 + 2y' + (y')^2}{x + 2y} = -\frac{6(x^2 + xy + y^2)}{(x + 2y)^3}.$$

Для нахождения третьей производной снова продифференцируем:

$$(2 + 2y' + 2(y')^2 + (x + 2y)y'')' = 2y''' + 4y'y'' + (1 + 2y')y'' + (x + 2y)y''' = 0.$$

Отсюда третья производная равна:

$$y''' = -\frac{54x(x^2 + xy + y^2)}{(2x + y)^5}.$$

$$\text{Ответ: } y' = -\frac{2x + y}{x + 2y}, \quad y'' = -\frac{6(x^2 + xy + y^2)}{(x + 2y)^3}, \quad y''' = -\frac{54x(x^2 + xy + y^2)}{(2x + y)^5}.$$

3. Для функции $z = z(x, y)$, заданной неявным образом, найти частные производные первого и второго порядков:

- а) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$,
б) $x + y + z = e^z$.

Указание: воспользоваться формулой (ф. 4).

4. Найти дифференциалы первого и второго порядков функции $z = z(x, y)$, заданной уравнением:

$$e^z - xyz = 0.$$

Указание: воспользоваться формулами (ф. 4) – (ф. 6).

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков функции $z = z(x, y)$, заданной системой:

$$\text{а) } \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = au + bv \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x = u + v \\ y = u - v, \\ z = u^2 v^2 \end{cases}$$

Решение:

а) Вычислим дифференциалы dx и dy , используя первое и второе уравнения, получим систему:

$$\begin{cases} \cos v du - u \sin v dv = dx, \\ \sin v du + u \cos v dv = dy. \end{cases}$$

Вычислим определители:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{vmatrix} = u. \\ \Delta_u &= \begin{vmatrix} dx & -u \sin v \\ dy & u \cos v \end{vmatrix} = u \cos v dx + u \sin v dy. \\ \Delta_v &= \begin{vmatrix} \cos v & dx \\ \sin v & dy \end{vmatrix} = \cos v dy - \sin v dx. \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} du &= \frac{\Delta_u}{\Delta} = \cos v dx + \sin v dy. \\ dv &= \frac{\Delta_v}{\Delta} = -\frac{\sin v}{u} dx + \frac{\cos v}{u} dy. \end{aligned}$$

Вычислим дифференциал dz , используя третье уравнение:

$$dz = a du + b dv = \left(a \cos v - \frac{b \sin v}{u} \right) dx + \left(a \sin v + \frac{b \cos v}{u} \right) dy.$$

Для нахождения дифференциала второго порядка необходимо дифференциалы первого порядка от функций, являющихся коэффициентами при дифференциалах dx и dy :

$$\begin{aligned} d^2 z &= \left(\frac{b \sin v}{u^2} du + \left(-a \sin v - \frac{b \cos v}{u} \right) dv \right) dx + \\ &+ \left(-\frac{b \cos v}{u^2} du + \left(a \cos v - \frac{b \sin v}{u} \right) dv \right) dy. \end{aligned}$$

Подставив выражения для дифференциалов dv и du , преобразовав полученное выражение, получим:

$$d^2 z = \left(\frac{a \sin^2 v}{u} + \frac{b \sin 2v}{u^2} \right) dx^2 + \left(-\frac{a \sin 2v}{u} - \frac{b \cos 2v}{u^2} \right) dx dy + \left(\frac{a \cos^2 v}{u} - \frac{b \sin 2v}{u^2} \right) dy^2.$$

$$\text{Ответ: } d^2 z = \left(\frac{a \sin^2 v}{u} + \frac{b \sin 2v}{u^2} \right) dx^2 + \left(-\frac{a \sin 2v}{u} - \frac{b \cos 2v}{u^2} \right) dx dy + \left(\frac{a \cos^2 v}{u} - \frac{b \sin 2v}{u^2} \right) dy^2.$$

6. Найти производные первого и второго порядков:

а) неявных функций $x = x(z)$, $y = y(z)$, если функции заданы системой:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0,5z^2 \\ x + y + z = 2 \end{cases},$$

при условии, что $x(2) = 1$, $y(2) = -1$;

б) неявных функций $y(x)$, $z(x)$, $u(x)$, заданных системой:

$$\begin{cases} u^2 + x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ \ln xy + \frac{y}{x} = b^2 \\ \ln \frac{z}{x} + zx = c^2 \end{cases}.$$

Решение:

а) перепишем уравнения системы в виде следующих функций:

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= x^2 + y^2 - 0,5z^2, \\ F_2(x, y, z) &= x + y + z - 2. \end{aligned}$$

Вычислим частные производные первого порядка от этих функций и составим вронскиан:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} &= 2x, & \frac{\partial F_1}{\partial y} &= 2y, & \frac{\partial F_2}{\partial x} &= 1, & \frac{\partial F_2}{\partial y} &= 1. \\ \frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)} &= \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(x - y). \end{aligned}$$

При данных условиях $x = 1$, $y = -1$ вронскиан отличен от нуля, поэтому существуют производные первого и второго порядков неявных функций $x = x(z)$, $y = y(z)$.

Продифференцируем уравнения системы по переменной z , получим систему:

$$\begin{cases} 2xx' + 2yy' = z, \\ x' + y' = -1. \end{cases}$$

Решаем ее методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(x - y).$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} z & 2y \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = z + 2y.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2x & z \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2x - z.$$

Отсюда:

$$x'(z) = \frac{z + 2y}{2(x - y)}, y'(z) = -\frac{2x + z}{2(x - y)},$$

$$x'(2) = 0, \quad y'(2) = -1.$$

Для нахождения производных второго порядка необходимо продифференцировать уравнения последней системы по переменной z , получим систему:

$$\begin{cases} 2xx'' + 2yy'' = 1 - 2(x')^2 - 2(y')^2, \\ x'' + y'' = 0. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(x - y).$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 - 2(x')^2 - 2(y')^2 & 2y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2(x')^2 - 2(y')^2.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2x & 1 - 2(x')^2 - 2(y')^2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(1 - 2(x')^2 - 2(y')^2).$$

$$x''(z) = \frac{1 - 2(x')^2 - 2(y')^2}{2(x - y)}, y''(z) = -\frac{1 - 2(x')^2 - 2(y')^2}{2(x - y)}.$$

$$x''(2) = -\frac{1}{4}, \quad y''(2) = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $x'(2) = 0, y'(2) = -1, x''(2) = -\frac{1}{4}, y''(2) = \frac{1}{4}.$

Самостоятельная работа: индивидуальное задание № 4.

Занятие № 13.

Касательная и нормаль к кривой, касательная и нормальная плоскость к поверхности, являющиеся графиками неявных функций

Цель занятия: научиться находить уравнения касательной, нормали к кривым, уравнение которых содержит неявную функцию, касательной плоскости, нормали, нормальной плоскости к поверхностям, уравнения которых содержат неявную функцию, заданную различными способами.

Справочный материал

Пусть неявная функция $y = f(x)$ задана уравнением $f(x, y) = 0$. Пусть точка (x_0, y_0) удовлетворяет уравнению $f(x, y) = 0$. Тогда уравнение нормали, проведенной к графику кривой, заданной уравнением $f(x, y) = 0$, в точке (x_0, y_0) , имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)}, \quad (\Phi. 1)$$

а уравнение касательной:

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \quad (\Phi. 2)$$

Пусть неявная функция $z = f(x, y)$ задана уравнением $f(x, y, z) = 0$. Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ удовлетворяет уравнению $f(x, y, z) = 0$. Тогда уравнение нормали, проведенной к графику кривой, заданной уравнением $f(x, y, z) = 0$, в точке (x_0, y_0, z_0) имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{f'_z(x_0, y_0, z_0)}, \quad (\Phi. 3)$$

а уравнение касательной плоскости:

$$f'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \quad (\Phi. 4)$$

Неявная функция $z = f(x, y)$ может быть задана системой уравнений:

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v). \end{cases}$$

Тогда уравнение касательной плоскости, проведенной в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_u(M_0) & y'_u(M_0) & z'_u(M_0) \\ x'_v(M_0) & y'_v(M_0) & z'_v(M_0) \end{vmatrix} = 0 \quad (\Phi. 5)$$

или

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Для неявной функции, заданной системой уравнений, уравнение нормали, проведенной в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, записывается в виде:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}. \quad (\Phi. 6)$$

Для неявной функции, заданной системой уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

уравнение касательной, проведенной к графику функции в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, вычисляется по формуле:

$$\frac{x - x_0}{x'_z(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{y'_z(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{-1}, \quad (\Phi. 7)$$

а уравнение нормальной плоскости по формуле:

$$x'_z(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + y'_z(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + (z - z_0) = 0. \quad (\Phi. 8)$$

Для вычисления коэффициентов в формулах (ф. 7) и (ф. 8) необходимо найти дифференциалы каждой функции из последней

системы и выразить в каждом уравнении дифференциалы dx и dy через дифференциал dz :

$$\begin{cases} dx = x'_z(x, y, z)dz, \\ dy = y'_z(x, y, z)dz \end{cases}$$

либо непосредственно, либо по правилу Крамера.

Практическое занятие

1. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = y(x)$, заданной уравнением $F(x, y) = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0)$:

а) $x^3 + 2xy^3 - yx^4 - 2 = 0, M_0(1; 1),$

б) $x^2y^2 - x^4 - y^4 + 13 = 0, M_0(2; 1).$

Указание: воспользоваться формулами (ф. 1) и (ф. 2).

2. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = z(x, y)$, определенной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

а) $x^2 + 3y^2 - 4z^2 = 0, M_0(2; -3; 4),$

б) $2\frac{x}{z} + 2\frac{y}{z} = 8, M_0(2; 2; 1).$

Указание: воспользоваться формулами (ф. 3) и (ф. 4).

3. Написать уравнение касательной и нормальной плоскости к кривой в данной точке:

а) $\begin{cases} y = x, \\ z = x^2, \end{cases} M(1; 1; 1)$

б) $\begin{cases} x^2 + z^2 = 10, \\ y^2 + z^2 = 10, \end{cases} M(1; 1; 3)$

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x + y + z = 0, \end{cases} M(1; -2; 1)$

Решение:

в) Вычислим дифференциалы первого порядка от функций, заданных каждым уравнением системы:

$$\begin{cases} 2xdx + 2ydy + 2zdz = 0, \\ dx + dy + dz = 0. \\ \begin{cases} 2xdx + 2ydy = -2zdz, \\ dx + dy = -dz. \end{cases} \end{cases}$$

Применим правило Крамера для нахождения $x'_z(x_0, y_0, z_0)$, $y'_z(x_0, y_0, z_0)$:

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x - 2y, \\ \Delta_x &= \begin{vmatrix} -2z & 2y \\ -dz & 1 \end{vmatrix} = (2y - 2z)dz, \\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} 2x & -2z \\ 1 & -dz \end{vmatrix} = (-2x + 2z)dz. \\ \begin{cases} dx = \frac{2y - 2z}{2x - 2y} dz, \\ dy = \frac{-2x + 2z}{2x - 2y} dz. \end{cases} \\ \begin{cases} x'_z = \frac{2y - 2z}{2x - 2y}, \\ y'_z = \frac{-2x + 2z}{2x - 2y}. \end{cases}\end{aligned}$$

Вычислим координаты направляющего вектора касательной:

$$x'_z(1, 2, -1) = -\frac{6}{5}, y'_z(1, 2, -1) = 0.$$

Отсюда уравнение касательной:

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{-\frac{6}{5}} &= \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{-1}, \\ \begin{cases} x = 1 - \frac{6}{5}t, \\ y = -2, \\ z = 1 - t \end{cases}\end{aligned}$$

и нормальной плоскости:

$$\begin{aligned}-\frac{6}{5}(x-1) + 0(y+2) + (z-1) &= 0, \\ 6x - 5z - 1 &= 0.\end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{x-1}{-\frac{6}{5}} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{-1}, 6x - 5z - 1 = 0.$$

4. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в данной точке:

$$\begin{cases} x = u + v^2 \\ y = u^2 - v^3, \quad u_0 = 2, v_0 = 1. \\ z = 2uv \end{cases}$$

Решение:

Вычислим координаты точки поверхности, через которую проводим касательную плоскость и нормаль:

$$\begin{aligned}x_0 &= 2 + 1^2 = 3, y_0 = 2^2 - 1^3 = 3, z_0 = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4. \\ M_0(3; 3; 4).\end{aligned}$$

Вычислим все частные производные первого порядка в данной точке:

$$\begin{aligned}x'_u &= 1; x'_u(2; 1) = 1. \\ x'_v &= 2v; x'_v(2; 1) = 2. \\ y'_u &= 2u; y'_u(2; 1) = 4. \\ y'_v &= -3v^2; y'_v(2; 1) = -3. \\ z'_u &= 2v; z'_u(2; 1) = 2. \\ z'_v &= 2u; z'_v(2; 1) = 4.\end{aligned}$$

Подставим полученные значения в формулу (ф. 5):

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z-4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

отсюда уравнение касательной плоскости:

$$2x - z - 2 = 0,$$

а уравнение нормали: $\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-4}{-1}$.

$$\text{Ответ: } 2x - z - 2 = 0, \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-4}{-1}.$$

5. Найти уравнение касательной плоскости к параболоиду $4z = x^2 + y^2$ в точках пересечения с прямой $x = y = z$.

Указание: найти координаты точек пересечения параболоида и прямой, воспользоваться формулой (ф. 4).

6. На сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 676$ найти точки, где касательные плоскости параллельны плоскости $3x + 4y + 12z = 0$.

Указание: найти частные производные первого порядка, решить систему:

$$\begin{cases} f'_x(x, y, z) = 3, \\ f'_y(x, y, z) = 4, \\ f'_z(x, y, z) = 12. \end{cases}$$

7. Показать, что поверхности $x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$ и $4 + x + 2y = \ln z$ касаются друг друга в точке $(2; -3; 1)$.

Указание: показать, что частные производные первого порядка пропорциональны.

8. Показать, что поверхности $xy = z^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ортогональны.

Указание: доказать, что векторы, составленные из координат, равных частным производным первого порядка, перпендикулярны (скалярное произведение векторов равно нулю).

Самостоятельная работа: индивидуальное задание № 4.

Занятие № 14. Экстремум функции многих переменных. Угловой экстремум

Цель занятия: исследование на экстремум функций многих переменных, неявных функций, нахождение условного экстремума.

Справочный материал

1. Понятие экстремума функции многих переменных и достаточные условия его существования

Функция $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ имеет локальный максимум (минимум) во внутренней точке $x_0 \in E$, если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$). Если при этом выполняется строгое неравенство, то точка x_0 – *точка строгого локального максимума (минимума)*. Локальные максимумы и минимумы называются *локальными экстремумами*. Точки, в которых функция имеет локальный экстремум, называются *экстремальными точками*.

Пусть $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Точка $x_0 \in E$ называется *критической* точкой функции, если каждая из частных производных первого порядка в этой точке равна нулю или не существует.

Достаточные условия существования экстремума функции многих переменных определяются видом дифференциала второго порядка как квадратичной формы.

Если квадратичная форма d^2f положительно определена, то в точке x_0 функция имеет строгий локальный минимум. Если квадратичная форма d^2f отрицательно определена, то в точке x_0 функция имеет строгий локальный максимум. Если квадратичная форма d^2f знакопеременная, то в точке x_0 функция не имеет экстремума, точка x_0 – *седловая* точка функции.

Исследование определенности квадратичной формы d^2f проводится с помощью критерия Сильвестра:

1. Квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ положительно опре-

делена тогда и только тогда, когда положительны все главные

миноры матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, то есть:

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \text{ и т. д.}$$

2. Квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ отрицательно определена тогда и только тогда, когда отрицателен a_{11} , а при переходе от любого главного минора к главному минору следующего порядка знак минора меняется:

$$a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \text{ и т. д.}$$

3. Квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ знакопеременная в остальных случаях.

Для функции двух переменных критерий Сильвестра состоит в следующем. Введем обозначения:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Если:

а) $\begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix} > 0, A > 0$, то в точке x_0 функция имеет строгий локальный минимум;

б) $\begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix} > 0, A < 0$, то в точке x_0 функция имеет строгий локальный максимум;

в) $\begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix} < 0$, то в точке x_0 функция не имеет экстремума.

2. Понятие условного экстремума и его вычисление

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, определенную и дифференцируемую в области G , координаты точек которой удовлетворяют системе уравнений связи $\varphi_i(x, y) = 0$. В этой области нужно найти такие точки $M_0(x_0, y_0)$, чтобы выполнялось условие:

$$f(M_0) \geq f(M) \text{ или } f(M_0) \leq f(M) \quad \forall M(x, y) \in G.$$

Если выполняются строгие неравенства, то $M_0(x_0, y_0)$ – точка строгого локального минимума или строгого локального максимума.

Существуют два метода решения задачи условного экстремума. Первый – метод исключения части переменных.

Из уравнения связи выразить одну из переменных через другую, полученное выражение подставить в $f(x, y)$, исследовать полученную функцию на экстремум как функцию одной переменной.

Второй – метод Лагранжа.

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda_i) = f(x, y) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(x, y),$$

где λ_i – коэффициенты Лагранжа. Вычислим частные производные функции Лагранжа по переменным x, y, λ_i , получим систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = \varphi_i(x, y) = 0. \end{cases}$$

Вычислив коэффициенты Лагранжа, находим точки, подозрительные на экстремум. Для исследования на экстремум

мум критических точек вычисляем частные производные

$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}$ и составляем определитель:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial x}(M_0, \lambda_0) & \frac{\partial \varphi}{\partial y}(M_0, \lambda_0) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(M_0, \lambda_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(M_0, \lambda_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(M_0, \lambda_0) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(M_0, \lambda_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(M_0, \lambda_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(M_0, \lambda_0) \end{vmatrix}$$

Если $\Delta < 0$, то в этой точке функция имеет условный максимум, если $\Delta > 0$, то в этой точке функция имеет условный минимум.

Практическое занятие

1. Исследовать на экстремум функцию трех переменных:

$$u = 2x^3yz - x^2 - y^2 - z^2.$$

Решение:

Вычислим частные производные первого порядка от функции $f(x, y, z)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2yz - 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3z - 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2x^3y - 2z.$$

Решим систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} 6x^2yz - 2x = 0, \\ 2x^3z - 2y = 0, \\ 2x^3y - 2z = 0. \end{cases}$$

Решением этой нелинейной системы являются точки $M_1(0; 0; 0)$,

$$M_2\left(1; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right), M_3\left(-1; -\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), M_4\left(-1; \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), M_5\left(-1; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Вычисляем частные производные второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 12xyz - 2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6x^2z; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 6x^2y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 2x^3. \\ d^2u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dy dz. \end{aligned}$$

Вычислим значения всех частных производных второго порядка для каждой критической точки.

	$M_1(0; 0; 0)$	$M_2\left(1; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$M_3\left(-1; -\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$M_4\left(-1; \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$M_5\left(-1; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	-2	2	2	2	2
$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	-2	-2	-2	-2	-2
$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$	-2	-2	-2	-2	-2
$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$	0	$2\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}$
$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$	0	$2\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}$
$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$	0	2	2	-2	-2

В точке $M_1(0; 0; 0)$: $d^2u = 2dx^2 - 2dy^2 - 2dz^2$. Это отрицательно определенная квадратичная форма, поэтому $M_1(0; 0; 0)$ – точка строгого локального максимума, поэтому:

$$U_{\max} = u(0; 0; 0) = 0.$$

Точки $M_2\left(1; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right), M_3\left(-1; -\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), M_4\left(-1; \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), M_5\left(-1; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ являются седловыми точками. Докажем это. Например, рассмотрим точку $M_2\left(1; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

$$d^2u = 2dx^2 - 2dy^2 - 2dz^2 + 4\sqrt{3}dxdy + 4\sqrt{3}dxdz + 4dydz.$$

Составим матрицу:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 & 2 \\ 2\sqrt{3} & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим главные диагональные миноры:

$$2 > 0, \begin{vmatrix} 2 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{vmatrix} = -16 < 0, \begin{vmatrix} 2 & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 & 2 \\ 2\sqrt{3} & 2 & -2 \end{vmatrix} = 96 > 0.$$

Ответ: $u_{\max} = 0$.

2. Найти экстремальное значение неявной функции $y = y(x)$:

$$(y - x)^3 + x + 6 = 0.$$

Указания: используем критерий Сильвестра для функции двух переменных.

3. Найти локальный экстремум неявных функций $z = f(x, y)$, заданных уравнением:

а) $F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0,$

б) $F(x, y, z) \equiv z^3 - xyz + y^2 = 16.$

Решение:

а) Вычислим частные производные первого порядка от функции $F(x, y, z)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 2, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 2, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z - 4.$$

Поэтому частные производные первого порядка неявной функции $z = f(x, y)$ равны:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{2x - 2}{2z - 4} = -\frac{x - 1}{z - 2}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{2y + 2}{2z - 4} = -\frac{y + 2}{z - 2}. \end{aligned}$$

Решаем систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \\ \frac{x - 1}{z - 2} = 0, \\ \frac{y + 2}{z - 2} = 0. \end{cases}$$

Отсюда:

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = -1. \end{cases}$$

Для вычисления третьей координаты z подставим полученные значения в уравнение и решим его относительно переменной z :

$$\begin{aligned} F(1; -1; z) &= 0, \\ z^2 - 4z - 12 &= 0, \\ z_1 &= -2; \quad z_2 = 6. \end{aligned}$$

Получаем две критические точки $M_1(1; -1; -2), M_2(1; -1; 6)$.

$$\frac{\partial F}{\partial z}(M_1) = -8 \neq 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(M_2) = 8 \neq 0.$$

Для исследования на экстремум применяем достаточное условие (знак квадратичной формы d^2z).

$$\begin{aligned} dz &= -\frac{x-1}{z-2}dx - \frac{y+1}{z-2}dy, \\ (x-1)dx + (y+1)dy + (z-2)dz &= 0, \\ d((x-1)dx + (y+1)dy + (z-2)dz) &= 0, \\ dx \cdot dx + dy \cdot dy + dz \cdot dz + (z-2)d^2z &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда } d^2z = \frac{1}{2-z}(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Так как $dz = 0$, то получаем формулу дифференциала второго порядка:

$$\begin{aligned} d^2z &= \frac{1}{2-z}(dx^2 + dy^2), \\ d^2z(M_1) &= 0,25(dx^2 + dy^2). \end{aligned}$$

Это положительно определенная квадратичная форма, поэтому в точке $M_1(1; -1; -2)$ неявная функция имеет строгий локальный минимум.

$$d^2z(M_2) = -0,25(dx^2 + dy^2).$$

Это отрицательно определенная квадратичная форма, поэтому в точке $M_2(1; -1; 6)$ неявная функция имеет строгий локальный максимум.

$$\text{Ответ: } z_{\max} = 6, z_{\min} = -2.$$

4. Найти экстремум функции при условии связи:

- а) $z = 2x + y, x^2 + y^2 = 5,$
- б) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4, x + y + 3 = 0,$
- в) $u = xyz, x^2 + y^2 + z^2 = a^2, a > 0,$
- г) $u = x + y + z^2, z - x - 1 = 0, y - xz - 1 = 0.$

Решение:

а) Составим функцию Лагранжа $L(x, y, \lambda) = 2x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 5).$

Вычислим частные производные первого порядка от функции Лагранжа:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2 + 2\lambda x, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2\lambda y, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + 2\lambda x = 0, \\ 1 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{\lambda}, \\ y = -\frac{1}{2\lambda}, \\ \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ x = -2, \\ y = -1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$$

Поэтому критическими точками являются точки $M_1(-2; -1), M_2(2; 1).$

Вычисляем частные производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y, \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda, \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda, \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0.$$

и составляем определитель:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix}.$$

В точке $M_1(-2; -1)$ при $\lambda = \frac{1}{2}$:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & -4 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 20 > 0.$$

$$z_{min} = z(-2; -1) = -5.$$

В точке $M_2(2; 1)$ при $\lambda = -\frac{1}{2}$:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -20 < 0.$$

$$z_{max} = z(2; 1) = 5.$$

Ответ: $z_{min} = -5, z_{max} = 5$.

б) Составим функцию Лагранжа $L(x, y, \lambda) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)$.

Вычислим частные производные первого порядка от функции Лагранжа:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = yz + 2\lambda x, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = xz + 2\lambda y, \\ \frac{\partial L}{\partial z} = xy + 2\lambda z, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - a^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} yz + 2\lambda x = 0, \\ xz + 2\lambda y = 0, \\ xy + 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2. \end{cases}$$

Решаем нелинейную систему методом сложения первых трех уравнений (парами):

$$\begin{cases} z(y + x) + 2\lambda(x + y) = 0, \\ y(x + z) + 2\lambda(x + z) = 0, \\ x(z + y) + 2\lambda(y + z) = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y + x)(z + 2\lambda) = 0, \\ (x + z)(y + 2\lambda) = 0, \\ (z + y)(x + 2\lambda) = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -2\lambda, \\ y = -2\lambda, \\ x = -2\lambda, \\ 4\lambda^2 + 4\lambda^2 + 4\lambda^2 = a^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{a}{2\sqrt{3}} \\ x = -\frac{a}{\sqrt{3}}, \\ y = -\frac{a}{\sqrt{3}}, \\ z = -\frac{a}{\sqrt{3}}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \lambda = -\frac{a}{2\sqrt{3}} \\ x = \frac{a}{\sqrt{3}}, \\ y = \frac{a}{\sqrt{3}}, \\ z = \frac{a}{\sqrt{3}}, \end{cases}$$

Поэтому критическими точками являются точки $M_1\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}; -\frac{a}{\sqrt{3}}; -\frac{a}{\sqrt{3}}\right), M_2\left(\frac{a}{\sqrt{3}}; \frac{a}{\sqrt{3}}; \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$. Вычисляем частные производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y, \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2z, \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda, \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda, \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 2\lambda, \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = z, \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = y, \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = x$$

и составляем определитель:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2\lambda & z & y \\ 2y & z & 2\lambda & x \\ 2z & y & x & 2\lambda \end{vmatrix}.$$

В точке $M_1 \left(-\frac{a}{\sqrt{3}}; -\frac{a}{\sqrt{3}}; -\frac{a}{\sqrt{3}} \right)$ при $\lambda = \frac{a}{2\sqrt{3}}$:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & -\frac{2a}{\sqrt{3}} & -\frac{2a}{\sqrt{3}} & -\frac{2a}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2a}{\sqrt{3}} & \frac{a}{\sqrt{3}} & -\frac{a}{\sqrt{3}} & -\frac{a}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2a}{\sqrt{3}} & -\frac{a}{\sqrt{3}} & \frac{a}{\sqrt{3}} & -\frac{a}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2a}{\sqrt{3}} & -\frac{a}{\sqrt{3}} & -\frac{a}{\sqrt{3}} & \frac{a}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \frac{8a^4}{9} > 0.$$

$$z_{min} = z \left(-\frac{a}{\sqrt{3}}; -\frac{a}{\sqrt{3}}; -\frac{a}{\sqrt{3}} \right) = -\frac{a^3}{3\sqrt{3}}$$

В точке $M_2 \left(-\frac{a}{\sqrt{3}}; -\frac{a}{\sqrt{3}}; -\frac{a}{\sqrt{3}} \right)$ при $\lambda = -\frac{a}{2\sqrt{3}}$:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \frac{2a}{\sqrt{3}} & \frac{2a}{\sqrt{3}} & \frac{2a}{\sqrt{3}} \\ \frac{2a}{\sqrt{3}} & -\frac{a}{\sqrt{3}} & \frac{a}{\sqrt{3}} & \frac{a}{\sqrt{3}} \\ \frac{2a}{\sqrt{3}} & \frac{a}{\sqrt{3}} & -\frac{a}{\sqrt{3}} & \frac{a}{\sqrt{3}} \\ \frac{2a}{\sqrt{3}} & \frac{a}{\sqrt{3}} & \frac{a}{\sqrt{3}} & -\frac{a}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = -\frac{8a^4}{9} < 0.$$

$$z_{max} = z \left(\frac{a}{\sqrt{3}}; \frac{a}{\sqrt{3}}; \frac{a}{\sqrt{3}} \right) = \frac{a^3}{3\sqrt{3}}.$$

Ответ: $z_{min} = -\frac{a^3}{3\sqrt{3}}, z_{max} = \frac{a^3}{3\sqrt{3}}.$

Самостоятельная работа: индивидуальное задание № 5.

Приложение № 1

Основные правила и формулы дифференцирования

1. $(f \pm \varphi)'(x) = f'(x) \pm \varphi'(x),$
2. $(f\varphi)'(x) = f'(x) \cdot \varphi(x) + \varphi'(x) \cdot f(x),$
3. $\left(\frac{f}{\varphi}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot \varphi(x) - f(x) \cdot \varphi'(x)}{\varphi^2(x)},$ при $\varphi(x) \neq 0.$

Основные формулы:

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(a^x)' = a^x \ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

Контрольная работа № 1

1. Найдите точки пересечения с осью Оу касательной к графику функции $y = \frac{x+4}{x-5}$, проведенной под углом $\frac{3\pi}{4}$.
2. В каких точках кривой $\begin{cases} x = t + 1, \\ y = t^2 - 2t + 1 \end{cases}$ касательная параллельна прямой $9x + y + 3 = 0$?
3. В какие моменты времени тело, движущееся по закону $s = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$, останавливается?
4. Найти прямоугольный треугольник наибольшей площади, если сумма катета и гипотенузы постоянна.
5. Найти кривизну кривой:

$$\begin{cases} x = acht, \\ y = asht, \\ z = at. \end{cases}$$

Контрольная работа № 2

1. Найти градиент скалярного поля:
 $u = xyz.$
2. Найти дивергенцию векторного поля:
 $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$
3. Найти ротор векторного поля:
 $\vec{a} = \frac{y}{x^2}\vec{j} - \frac{1}{x}\vec{k}.$
4. Найти производную первого порядка функции, заданной уравнением:
 $xy - \ln y = 0.$

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков функции, заданной уравнением:

$$z^3 - xz + y = 0.$$

6. Исследовать на экстремум неявную функцию, заданную уравнением:

$$x^2 + y^2 + 4xz + \frac{z^2 + z}{2} = -4.$$

**Индивидуальное задание № 1.
Геометрический смысл производной**

Вариант № 1

1. Написать уравнение касательной к кривой $y = x^4 - 3$, проходящей через точку $(1, -2)$.

2. Найти угол, под которым пересекаются кривые $x^2 + y^2 = 8$, $y^2 = 2x$.

3. Парабола с вершиной в точке $A(-2; 0)$, ось симметрии которой совпадает с осью Oy , касается окружности $x^2 + y^2 = 1$. Найдите уравнение параболы.

4. Определить угол между левой и правой касательными к графику кривой:

$$y = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$$

в точке $x = 0$.

5. Найти угловой коэффициент и угол наклона касательной, составить уравнения касательной и нормали к графику кривой:

$$\begin{cases} x = a \sin^3 t, \\ y = a \cos^3 t \end{cases}$$

в точке, соответствующей параметру $t = \frac{\pi}{3}$.

6. Составить уравнение касательной и нормальной плоскости к графику кривой:

$$\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2, \\ z = t. \end{cases}$$

в точке, соответствующей параметру $t = -1$.

Вариант № 2

1. Написать уравнение касательной и нормали к кривой $y = x^3 + 2x^2 - 1$ в точке пересечения с параболой $y = 2x^2$.

2. Найти угол, под которым пересекаются кривые $y = \sin x$, $y = \cos x$.

3. Найдите уравнения прямой, проходящей через точку $A(1; 3)$, касающейся графика функции $y = 8\sqrt{x} - 7$ и пересекающей в двух различных точках график функции: $y = x^2 + 4x - 1$.

4. Определить угол между левой и правой касательными к графику кривой:

$$y = \sqrt{\ln(1 + 9x^2)}$$

в точке $x = 0$.

5. Найти угловой коэффициент и угол наклона касательной, составить уравнения касательной и нормали к графику кривой:

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t, \\ y = \sin t \end{cases}$$

в точке, соответствующей параметру $t = \frac{\pi}{3}$.

6. Составить уравнение касательной и нормальной плоскости к графику кривой:

$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = \ln t, \\ z = t^2 \end{cases}$$

в точке, соответствующей параметру $t = 1$.

Вариант № 3

1. Написать уравнение касательной и нормали к кривой $y = \frac{1}{1+x^2}$ в точке пересечения с гиперболой $y = \frac{1}{x+1}$.

2. Найти угол, под которым пересекаются кривые $9y = x^2$, $x - y = 0$.

3. Найдите уравнения прямой, проходящей через точку $A(5; 10)$, касающейся графика функции $y = -\frac{x^2}{4} + 2x + 6$ и пересекающей в двух различных точках график функции $y = 6 + \sqrt{8x - x^2}$.

4. Определить угол между левой и правой касательными к графику кривой:

$$y = \arccos \frac{2}{e^{2x} + e^{-2x}}$$

в точке $x = 0$.

5. Найти угловой коэффициент и угол наклона касательной, составить уравнения касательной и нормали к графику кривой:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

в точке, соответствующей параметру $t = \frac{\pi}{3}$.

6. Составить уравнение касательной и нормальной плоскости к графику кривой:

$$\begin{cases} x = \cos^3 \frac{t}{2}, \\ y = \sin t, \\ z = \sin \frac{t}{2} \end{cases}$$

в точке, соответствующей параметру $t = \pi$.

Вариант № 4

1. Написать уравнение касательной к кривой $y = x^4 - 3$, проходящей через точку $(1, -2)$.

2. Найти угол, под которым пересекаются кривые $y^2 = 2ax + a^2$, $y^2 = b^2 - 2bx$.

3. Найдите уравнения прямой, проходящей через точку $A(\frac{1}{4}; 0)$,

касающейся графика функции $y = 3\sqrt{x} - \frac{5}{2}$ и пересекающей в двух различных точках график функции $y = x^2 + 6x$.

4. Определить угол между левой и правой касательными к графику кривой:

$$y = \sqrt{1 - e^{-a^2 x^2}}$$

в точке $x = 0$.

5. Найти угловой коэффициент и угол наклона касательной, составить уравнения касательной и нормали к графику кривой:

$$\begin{cases} x = \frac{2t + t^2}{1 + t^3}, \\ y = \frac{2t - t^2}{1 + t^2} \end{cases}$$

в точке, соответствующей параметру $t = 1$.

6. Составить уравнение касательной и нормальной плоскости к графику кривой:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\cos t}, \\ y = \operatorname{tg} t, \\ z = at \end{cases}$$

в точке, соответствующей параметру $t = \frac{\pi}{4}$.

Вариант № 5

1. Написать уравнение касательной и нормали к кривой $y = x^3 + 2x^2 - 1$ в точке пересечения с параболой $y = 2x^2$.

2. Найти угол, под которым пересекаются кривые $y = e^x$, $y = e^{2x}$.

3. Доказать, что касательная к гиперболе $xy = a^2$ образует с осями координат треугольник постоянной площади.

4. Определить угол между левой и правой касательными к графику кривой:

$$y = \sqrt{\ln(1 + 9x^2)}$$

в точке $x = 0$.

5. Найти угловой коэффициент и угол наклона касательной, составить уравнения касательной и нормали к графику кривой:

$$\begin{cases} x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}, \\ y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} \end{cases}$$

в точке, соответствующей параметру $t = -1$.

6. Составить уравнение касательной и нормальной плоскости к графику кривой:

$$\begin{cases} x = e^t, \\ y = e^{-t}, \\ z = t^2 \end{cases}$$

в точке, соответствующей параметру $t = 1$.

Вариант № 6

1. Написать уравнение касательной и нормали к кривой

$y = \frac{1}{1+x^2}$ в точке пересечения с гиперболой $y = \frac{1}{x+1}$.

2. Найти угол, под которым пересекаются кривые $x^2 - y^2 = 6$, $x^2 + 4y^2 = 16$.

3. Парабола с вершиной в точке $A(-2; 0)$, ось симметрии которой совпадает с осью Oy , касается окружности $x^2 + y^2 = 1$. Найдите уравнение параболы.

4. Определить угол между левой и правой касательными к графику кривой:

$$y = \arccos \frac{2}{e^{2x} + e^{-2x}}$$

в точке $x = 0$.

5. Найти угловой коэффициент и угол наклона касательной, составить уравнения касательной и нормали к графику кривой:

$$\begin{cases} x = a(t \cos t - 2 \sin t), \\ y = a(t \sin t + 2 \cos t) \end{cases}$$

в точке, соответствующей параметру $t = \frac{\pi}{4}$.

6. Составить уравнение касательной и нормальной плоскости к графику кривой:

$$\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \\ z = e^t \end{cases}$$

в точке, соответствующей параметру $t = 0$.

Вариант № 7

1. Написать уравнение касательной к кривой $y = x^4 - 3$, проходящей через точку $(1, -2)$.

2. Найти угол, под которым пересекаются кривые $y = \sin x$, $y = \sin 2x$.

3. Найдите уравнения прямой, проходящей через точку $A(1; 3)$, касающейся графика функции $y = 8\sqrt{x} - 7$ и пересекающей в двух различных точках график функции $y = x^2 + 4x - 1$.

4. Определить угол между левой и правой касательными к графику кривой:

$$y = \sqrt{1 - e^{-\alpha^2 x^2}}$$

в точке $x = 0$.

5. Найти угловой коэффициент и угол наклона касательной, составить уравнения касательной и нормали к графику кривой:

$$\begin{cases} x = 2 \ln t \operatorname{ctgt} + 1, \\ y = \ln t + \operatorname{ctgt} \end{cases}$$

в точке, соответствующей параметру $t = \frac{\pi}{4}$.

6. Составить уравнение касательной и нормальной плоскости к графику кривой:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \\ z = 4a \sin \frac{t}{2} \end{cases}$$

в точке, соответствующей параметру $t = \frac{\pi}{2}$.

Вариант № 8

1. Написать уравнение касательной и нормали к кривой $y = x^3 + 2x^2 - 1$ в точке пересечения с параболой $y = 2x^2$.

2. Найти угол, под которым пересекаются кривые $y = x^2 \ln x$, $y = 4 - 4x^2$.

3. Найдите уравнения прямой, проходящей через точку $A(5; 10)$, касающейся графика функции $y = -\frac{x^2}{4} + 2x + 6$ и пересекающей в двух различных точках график функции $y = 6 + \sqrt{8x - x^2}$.

4. Определить угол между левой и правой касательными к графику кривой:

$$y = \sqrt{\ln(1 + 9x^2)}$$

в точке $x = 0$.

5. Найти угловой коэффициент и угол наклона касательной, составить уравнения касательной и нормали к графику кривой:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4, \\ y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 \end{cases}$$

в точке, соответствующей параметру $t = 0$.

6. Составить уравнение касательной и нормальной плоскости к графику кривой:

$$\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2, \\ z = t \end{cases}$$

в точке, соответствующей параметру $t = -1$.

Вариант № 9

1. Написать уравнение касательной и нормали к кривой

$y = \frac{1}{1+x^2}$ в точке пересечения с гиперболой $y = \frac{1}{x+1}$.

2. Найти угол, под которым пересекаются кривые $y = \frac{x^2}{2}$,

$y = \frac{1}{1+x^2}$.

3. Найдите уравнения прямой, проходящей через точку $A(\frac{1}{4}; 0)$,

касающейся графика функции $y = 3\sqrt{x} - \frac{5}{2}$ и пересекающей в

двух различных точках график функции: $y = x^2 + 6x$.

4. Определить угол между левой и правой касательными к графику кривой:

$$y = \arccos \frac{2}{e^{2x} + e^{-2x}}$$

в точке $x = 0$.

5. Найти угловой коэффициент и угол наклона касательной, составить уравнения касательной и нормали к графику кривой:

$$\begin{cases} x = atcost, \\ y = atsint \end{cases}$$

в точке, соответствующей параметру $t = \frac{\pi}{2}$.

6. Составить уравнение касательной и нормальной плоскости к графику кривой:

$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = lnt, \\ z = t^2 \end{cases}$$

в точке, соответствующей параметру $t = 1$.

Вариант № 10

1. Написать уравнение касательной к кривой $y = x^4 - 3$, проходящей через точку $(1, -2)$.

2. Найти угол, под которым пересекаются кривые $y = 4 + \sqrt[3]{x-2}$, $y = 2x$.

3. Доказать, что касательная к гиперболе $xy = a^2$ образует с осями координат треугольник постоянной площади.

4. Определить угол между левой и правой касательными к графику кривой:

$$y = \sqrt{1 - e^{-a^2x^2}}$$

в точке $x = 0$.

5. Найти угловой коэффициент и угол наклона касательной, составить уравнения касательной и нормали к графику кривой:

$$\begin{cases} x = \frac{1 + lnt}{t}, \\ y = \frac{3 + 2lnt}{t} \end{cases}$$

в точке, соответствующей параметру $t = 1$.

6. Составить уравнение касательной и нормальной плоскости к графику кривой:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\cos t}, \\ y = \operatorname{tg} t, \\ z = at \end{cases}$$

в точке, соответствующей параметру $t = \frac{\pi}{4}$.

Индивидуальное задание № 2.
Элементы дифференциальной геометрии

Вариант № 1

1. Найти кривизну кривой $y = \sin x$.
2. Определить радиусы кривизны кривой $y^2 = 2px$.
3. Найти координаты центра кривизны и построить кривую и круг кривизны кривой $3y = x^3$ в точке $x = -1$.
4. Составить уравнение эволюты кривой $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, построить кривую и ее эволюту.
5. Найти кривизну и кручение кривой $\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t, \\ y = a \operatorname{sh} t, \\ z = at. \end{cases}$
6. На кривой $y = e^x$ найти точку, где кривизна принимает экстремальное значение.

Вариант № 2

1. Найти кривизну кривой $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.
2. Определить радиусы кривизны кривой $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
3. Найти координаты центра кривизны и построить кривую и круг кривизны кривой $y^3 = x^2$ в точке $y = 1$.
4. Составить уравнение эволюты кривой $y^2 - 2x = 0$, построить кривую и ее эволюту.
5. Найти кривизну и кручение кривой $\begin{cases} x = 3t - t^3, \\ y = 3t^2, \\ z = 3t + t^3. \end{cases}$
6. На кривой $\begin{cases} x = at - b \sin t \\ y = a - b \cos t \end{cases}$ найти точку, где кривизна принимает экстремальное значение.

Вариант № 3

1. Найти кривизну кривой $y^2 = 2px$.
2. Определить радиусы кривизны кривой $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.
3. Найти координаты центра кривизны и построить кривую и круг кривизны кривой $y = \ln x$ в точке $x = 1$.
4. Составить уравнение эволюты кривой $x^2 - y^2 = a^2$, построить кривую и ее эволюту.

5. Найти кривизну и кручение кривой
$$\begin{cases} x = acost, \\ y = asint, \\ z = at. \end{cases}$$

6. На кривой $y = \frac{kx^3}{6}, x \geq 0, k > 0$ найти точку, где кривизна принимает наибольшее значение.

Вариант № 4

1. Найти кривизну кривой $x = t^2, y = t^3$.
2. Определить радиусы кривизны кривой $xy = 4$.
3. Найти координаты центра кривизны и построить кривую и круг кривизны кривой $y = e^x$ в точке $x = 0$.

4. Составить уравнение эволюты кривой
$$\begin{cases} x = a(cost + tsint) \\ y = a(sint - tcost) \end{cases}$$
 построить кривую и ее эволюту.

5. Найти кривизну и кручение кривой
$$\begin{cases} x = e^t, \\ y = e^{-t}, \\ z = \sqrt{2}t. \end{cases}$$

6. На кривой $y = \ln x$ найти точку, где кривизна принимает наибольшее значение.

Вариант № 5

1. Найти кривизну кривой $x = acost, y = b sint$.
2. Определить радиусы кривизны кривой $y = e^{-x^2}$.
3. Найти координаты центра кривизны и построить кривую и круг кривизны кривой $xy = 1$ в точке $x = 1$.

4. Составить уравнение эволюты кривой $x = a cht, y = sht$, построить кривую и ее эволюту.

5. Найти кривизну и кручение кривой
$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = \ln t, \\ z = t^2. \end{cases}$$

6. На кривой $y = e^x$ найти точку, где кривизна принимает экстремальное значение.

Вариант № 6

1. Найти кривизну кривой $x = a cht, y = b sht$.
2. Определить радиусы кривизны кривой $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$.
3. Найти координаты центра кривизны и построить кривую и круг кривизны кривой $3y = x^3$ в точке $x = -1$.

4. Составить уравнение эволюты кривой $y = \ln x$, построить кривую и ее эволюту.

5. Найти кривизну и кручение кривой
$$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \\ z = \cos 2t. \end{cases}$$

6. На кривой $y = \frac{kx^3}{6}, x \geq 0, k > 0$ найти точку, где кривизна принимает наибольшее значение.

Вариант № 7

1. Найти кривизну кривой $x = a(t - sint), y = a(1 - cost)$.
2. Определить радиусы кривизны кривой $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
3. Найти координаты центра кривизны и построить кривую и круг кривизны кривой $xy = 1$ в точке $x = -1$.

4. Составить уравнение эволюты кривой $y = tgx, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, построить кривую и ее эволюту.

5. Найти кривизну и кручение кривой
$$\begin{cases} x = a cht, \\ y = asht, \\ z = at. \end{cases}$$

6. На кривой $y = \ln x$ найти точку, где кривизна принимает наибольшее значение.

Вариант № 8

1. Найти кривизну кривой $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$.
2. Определить радиусы кривизны кривой $y = \ln x$.
3. Найти координаты центра кривизны и построить кривую и круг кривизны кривой $y^3 = x^2$ в точке $y = 1$.
4. Составить уравнение эволюты кривой $y = \sin x$, построить кривую и ее эволюту.

$$5. \text{ Найти кривизну и кручение кривой } \begin{cases} x = 3t - t^3, \\ y = 3t^2, \\ z = 3t + t^3. \end{cases}$$

6. На кривой $\begin{cases} x = at - bsint \\ y = a - bcost \end{cases}$ найти точку, где кривизна принимает экстремальное значение.

Вариант № 9

1. Найти кривизну кривой $y = x^4$.
2. Определить радиусы кривизны кривой $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.
3. Найти координаты центра кривизны и построить кривую и круг кривизны кривой $y = \ln x$ в точке $x = -1$.
4. Составить уравнение эволюты кривой $x = -a \left(cost + \ln tg \frac{t}{2} \right)$, $y = asint$, построить кривую и ее эволюту.

$$5. \text{ Найти кривизну и кручение кривой } \begin{cases} x = acost, \\ y = asint, \\ z = at. \end{cases}$$

6. На кривой $y = e^x$ найти точку, где кривизна принимает экстремальное значение.

Индивидуальное задание № 3. Элементы теории поля

Вариант № 1

1. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$ в точке $M(1; 1; 1)$ по направлению вектора $\vec{l} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

2. Найти угол между градиентами $u(x, y, z) = \frac{yz^2}{x^2}$ и $v(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$ в точке $M\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

3. Найти точки, в которых функция $z = x^3 + 3x^2 + 6xy + y^2$ стационарна.

4. Найти дивергенцию векторного поля $\vec{a} = (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2 + y^2 + z^2)^2}}$.

5. Проверить, что векторное поле $\vec{a} = yz(4x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k})$ соленоидально.

6. Найти ротор векторного поля $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$.

7. Проверить, что векторное поле $\vec{a} = (3x^2y + y^3)\vec{i} + (x^3 - 3xy^2)\vec{j}$ потенциально.

8. Доказать, что векторное поле $\vec{a} = e^{\pm x}\vec{i} + e^{\pm y}\vec{j} + e^{\pm z}\vec{k}$ удовлетворяет условию $\vec{a} - \text{grad div } \vec{a} = 0$.

Вариант № 2

1. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z) = x + \ln(z^2 + y^2)$ в точке $M(2; 1; 1)$ по направлению вектора $\vec{l} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

2. Найти угол между градиентами $u(x, y, z) = x^2yz^3$ и $v(x, y, z) = \frac{4\sqrt{6}}{x} - \frac{\sqrt{6}}{9y} + \frac{3}{z}$ в точке $M\left(\sqrt{2}; \frac{1}{3}; \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

3. Найти точки, в которых функция $z = x^3 + 3xy + y^3$ стационарна.
4. Найти дивергенцию векторного поля $\vec{a} = e^{xy}(-x\vec{i} + y\vec{j} + xy\vec{k})$.
5. Проверить, что векторное поле $\vec{a} = (x^2y + y^3)\vec{i} + (x^3 - xy)\vec{j}$ соленоидально.
6. Найти ротор векторного поля $\vec{a} = y^2z^3\vec{i} + 2xyz^2\vec{j} + 3xy^2z\vec{k}$.
7. Проверить, что векторное поле

$$\vec{a} = (\sin 2x \cos 2y \vec{i} + \cos 2x \sin 2y \vec{j}) \frac{1}{\sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y}}$$

потенциально.

8. Доказать, что векторное поле $\vec{a} = e^{\pm z}\vec{i} + e^{\pm x}\vec{j} + e^{\pm y}\vec{k}$ удовлетворяет условию $\vec{a} + \text{rot rot } \vec{a} = 0$.

Вариант № 3

1. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z) = x^2y - \sqrt{xy + z^2}$ в точке $M(1; 5; -2)$ по направлению вектора $\vec{l} = 2\vec{j} - 2\vec{k}$.
2. Найти угол между градиентами $u(x, y, z) = \frac{z^3}{xy^2}$ и $v(x, y, z) = 9\sqrt{2}x^3 - \frac{y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{\sqrt{3}}$ в точке $M\left(\frac{1}{3}; 2; \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.
3. Найти точки, в которых функция $z = 2x^2 - 4xy + y^3 - 2yz + 6z$ стационарна.
4. Найти дивергенцию векторного поля $\vec{a} = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + z^3\vec{k}$.
5. Проверить, что векторное поле $\vec{a} = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} - (x^2 + y^2)z\vec{k}$ соленоидально.
6. Найти ротор векторного поля $\vec{a} = yz\vec{i} + z(x + 2y)\vec{j} + y(x + y)\vec{k}$.
7. Проверить, что векторное поле $\vec{a} = (yz - xy)\vec{i} +$

$$+ \left(xz - \frac{x^2}{2} + yx^2\right)\vec{j} + (xy + y^2z)\vec{k} \text{ потенциально.}$$

8. Найти $\text{grad div } \vec{a}$, если дано векторное поле $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$.

Вариант № 4

1. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z) = y \ln(1 + x^2) - \arctg z$ в точке $M(0; 1; 1)$ по направлению вектора $\vec{l} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$.
2. Найти угол между градиентами $u(x, y, z) = \frac{z}{x^3y^2}$ и $v(x, y, z) = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6}z}$ в точке $M\left(1; 2; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.
3. Найти точки, в которых модуль градиента функции

$$z = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

равен 1.

4. Найти дивергенцию векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} + y^2\vec{j} + z^3\vec{k}$.
5. Проверить, что векторное поле $\vec{a} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j} + \frac{(x^2-y^2)z}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{k}$ соленоидально.
6. Найти ротор векторного поля $\vec{a} = x^2yz\vec{i} + xy^2z\vec{j} + xyz^2\vec{k}$.
7. Проверить, что векторное поле $\vec{a} = \left(\frac{1}{z} - \frac{y}{x^2}\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{y^2}\right)\vec{j} + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{z^2}\right)\vec{k}$ потенциально.
8. Найти $\Delta \vec{a}$ поле $\vec{a} = (y^2 + z^2)x\vec{i} + (x^2 + z^2)y\vec{j} + (x^2 + y^2)z\vec{k}$.

Вариант № 5

1. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z) = x(\ln y - \arctg z)$ в точке $M(-2; 1; -1)$ по направлению вектора $\vec{l} = 8\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$.
2. Найти угол между градиентами $u(x, y, z) = \frac{x^2}{yz^2}$ и

$$v(x, y, z) = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3 \text{ в точке } M\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

3. Найти точки, в которых модуль градиента функции $z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ равен 2.

4. Найти дивергенцию векторного поля $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$.

5. Проверить, что векторное поле $\vec{a} = yz(4x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k})$ соленоидально.

6. Найти ротор векторного поля $\vec{a} = (x^3 + y^2 + z)\vec{i} + (y^3 + x^2 + z)\vec{j} + (z^3 + x^2 + y)\vec{k}$.

7. Проверить, что векторное поле $\vec{a} = \left(\frac{z}{y^2} - \frac{y}{z^2} - \frac{2yz}{x^3}\right)\vec{i} + \left(\frac{z}{x^2} - \frac{x}{z^2} - \frac{2xz}{y^2}\right)\vec{j} + \left(\frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2} + \frac{2xy}{z^3}\right)\vec{k}$ потенциально.

8. Найти $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a}$, если дано векторное поле $\vec{a} = (y^2 + z^2)x\vec{i} + (x^2 + z^2)y\vec{j} + (x^2 + y^2)z\vec{k}$.

Вариант № 6

1. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z) = \ln(3 - x^2) + xy^2z$ в точке $M(1; 3; 2)$ по направлению вектора $\vec{l} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

2. Найти угол между градиентами $u(x, y, z) = \frac{z^2}{xy^2}$ и $v(x, y, z) = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}z^2$ в точке $M\left(\frac{1}{3}; 2; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$.

3. Найти точки, в которых градиент функции $z = \ln(x + \frac{1}{y})$ равен вектору $\vec{l} - \frac{16}{9}\vec{j}$.

4. Найти дивергенцию векторного поля $\vec{a} = x^2y\vec{i} + xy^2\vec{j} + z^2\vec{k}$.

5. Проверить, что векторное поле $\vec{a} = (x^2y + y^3)\vec{i} + (x^3 - xy)\vec{j}$ соленоидально.

6. Найти ротор векторного поля $\vec{a} = \frac{zy}{x}\vec{i} + \frac{xz}{y}\vec{j} + \frac{xy}{z}\vec{k}$.

7. Проверить, что векторное поле $\vec{a} = (3x^2y + y^3)\vec{i} +$

$+(x^3 - 3xy^2)\vec{j}$ потенциально.

8. Доказать, что векторное поле $\vec{a} = e^{\pm x}\vec{i} + e^{\pm y}\vec{j} + e^{\pm z}\vec{k}$ удовлетворяет условию $\vec{a} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{a} = 0$.

Вариант № 7

1. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z) = \sin(x + 2y) + \sqrt{xyz}$ в точке $M\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; 3\right)$ по направлению вектора $\vec{l} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$.

2. Найти угол между градиентами $u(x, y, z) = \frac{xz^2}{y}$ и $v(x, y, z) = 6\sqrt{6}x^3 - 6\sqrt{6}y^3 + 2z^3$ в точке $M\left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; 1\right)$.

3. Найти точки, в которых градиент функции $z = x^2 + y^2 - 2xy$ равен 0.

4. Найти дивергенцию векторного поля $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$.

5. Проверить, что векторное поле $\vec{a} = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} - (x^2 + y^2)z\vec{k}$ соленоидально.

6. Найти ротор векторного поля $\vec{a} = yz^2\vec{j} + x\vec{k}$.

7. Проверить, что векторное поле $\vec{a} = (\sin 2x \cos 2y \vec{i} + \cos 2x \sin 2y \vec{j}) \frac{1}{\sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y}}$ потенциально.

8. Доказать, что векторное поле $\vec{a} = e^{\pm z}\vec{i} + e^{\pm x}\vec{j} + e^{\pm y}\vec{k}$ удовлетворяет условию $\vec{a} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a} = 0$.

Вариант № 8

1. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z) = x^2y^2z - \ln(z - 1)$ в точке $M(1; 1; 2)$ по направлению вектора $\vec{l} = 5\vec{i} - 6\vec{j} + 2\sqrt{5}\vec{k}$.

2. Найти угол между градиентами $u(x, y, z) = \frac{yz^2}{x}$ и $v(x, y, z) = \frac{\sqrt{6}}{2x} + \frac{\sqrt{6}}{2y} + \frac{2}{3z}$ в точке $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

3. Найти точки, в которых градиент функции $z = x^3 + y^3 + z^3 - 3xy$ равен 0.

4. Найти дивергенцию векторного поля $\vec{a} = \frac{y^2+z^2}{2}\vec{i} + \frac{x^2+z^2}{2}\vec{j} + \frac{x^2+y^2}{2}\vec{k}$.

5. Проверить, что векторное поле $\vec{a} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j} + \frac{(x^2-y^2)z}{(x^2+y^2)^2}\vec{k}$ соленоидально.

6. Найти ротор векторного поля $\vec{a} = z^2\vec{i} + x^2\vec{j} + y^2\vec{k}$.

7. Проверить, что векторное поле $\vec{a} = (yz - xy)\vec{i} + (xz - \frac{x^2}{2} + yx^2)\vec{j} + (xy + y^2z)\vec{k}$ потенциально.

8. Найти $\text{grad div } \vec{a}$, если векторное поле $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$.

Вариант № 9

1. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z) = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}$ в точке $M(1; -3; 4)$ по направлению вектора $\vec{l} = \vec{j} - \vec{k}$.

2. Найти угол между градиентами $u(x, y, z) = \frac{xy^2}{z^3}$ и $v(x, y, z) = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2$ в точке $M(\frac{1}{3}; 2; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$.

3. Найти точки, в которых градиент функции $z = x^3 + y^3 + z^3 - 3xy$ перпендикулярен оси Oz.

4. Найти дивергенцию векторного поля $\vec{a} = x^2y\vec{i} + y^2z\vec{j} + z^2x\vec{k}$.

5. Проверить, что векторное поле $\vec{a} = yz(4x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k})$ соленоидально.

6. Найти ротор векторного поля $\vec{a} = yz^2\vec{i} + x\vec{j}$.

7. Проверить, что векторное поле $\vec{a} = (\frac{1}{z} - \frac{y}{x^2})\vec{i} + (\frac{1}{x} - \frac{2}{y^2})\vec{j} + (\frac{1}{y} - \frac{x}{z^2})\vec{k}$ потенциально.

8. Найти $\Delta \vec{a}$, если дано векторное поле $\vec{a} = (y^2 + z^2)x\vec{i} + (x^2 + z^2)y\vec{j} + (x^2 + y^2)z\vec{k}$.

Вариант № 10

1. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z) = \frac{\sqrt{x}}{y} - \frac{yz}{x + \sqrt{y}}$ в точке $M(4; 1; -2)$ по направлению вектора $\vec{l} = 2\vec{i} + \vec{k}$.

2. Найти угол между градиентами $u(x, y, z) = \frac{x^3y^2}{z}$ и $v(x, y, z) = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} + \frac{1}{\sqrt{6}z}$ в точке $M(1; 2; \frac{1}{\sqrt{6}})$.

3. Найти точки, в которых градиент функции $z = x^2 + y^2 - 2xy$ перпендикулярен прямой $y = x$.

4. Найти дивергенцию векторного поля $\vec{a} = \frac{xy}{z}\vec{i} + \frac{xz}{y}\vec{j} + \frac{xy}{z}\vec{k}$.

5. Проверить, что векторное поле $\vec{a} = (x^2y + y^3)\vec{i} + (x^3 - xy)\vec{j}$ соленоидально.

6. Найти ротор векторного поля $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$.

7. Проверить, что векторное поле $\vec{a} = (\frac{z}{y^2} - \frac{y}{z^2} - \frac{2yz}{x^3})\vec{i} + (\frac{z}{x^2} - \frac{x}{z^2} - \frac{2xz}{y^2})\vec{j} + (\frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2} + \frac{2xy}{z^3})\vec{k}$ потенциально.

8. Найти $\text{div rot } \vec{a}$, если дано векторное поле $\vec{a} = (y^2 + z^2)x\vec{i} + (x^2 + z^2)y\vec{j} + (x^2 + y^2)z\vec{k}$.

**Индивидуальное задание № 4.
Неявная функция и ее дифференцирование**

Вариант № 1

1. Найти производную первого порядка неявной функции $y = f(x)$, заданной уравнением:

$$e^y + 9x^2e^{-y} - 26x = 0.$$

2. Найти производные первого, второго, третьего порядка для функции $y = f(x)$, определяемой уравнением:

$$x^2 + 2xy - y^2 = a^2.$$

3. Найти дифференциалы первого и второго порядка функции $z = f(x, y)$, заданной уравнением:

$$x^3 - 3x^2y + xz + y^2z^2 + y - 2x = 0.$$

4. Найти дифференциалы первого и второго порядка функции $z = f(x, y)$, заданной системой:

$$\begin{cases} x = \frac{u^2 + v^2}{2}, \\ y = \frac{u^2 - v^2}{2}. \\ z = uv. \end{cases}$$

5. Найти производные первого и второго порядка неявных функций $x = x(z)$, $y = y(z)$, заданных системой:

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 2

1. Найти производную первого порядка неявной функции $y = f(x)$, заданной уравнением:

$$\ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

2. Найти производные первого, второго, третьего порядка для функции $y = f(x)$, определяемой уравнением:

$$y - \varepsilon \sin y = x. \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

3. Найти дифференциалы первого и второго порядка функции $z = f(x, y)$, заданной уравнением:

$$z^3 - 3xyz = R^2.$$

4. Найти дифференциалы первого и второго порядка функции $z = f(x, y)$, заданной системой:

$$\begin{cases} x = \sqrt{a}(\sin u + \cos v), \\ y = \sqrt{a}(\cos u - \sin v), \\ z = 1 + \sin(u - v). \end{cases}$$

5. Найти производные первого и второго порядка неявных функций $x = x(z)$, $y = y(z)$, заданных системой:

$$\begin{cases} x + xy + y + z = 1, \\ x^2 + y^2 - 2z = 1. \end{cases}$$

Вариант № 3

1. Найти производную первого порядка неявной функции $y = f(x)$, заданной уравнением:

$$x^3 \ln y - y^2 \ln x = 0.$$

2. Найти производные первого, второго, третьего порядка для функции $y = f(x)$, определяемой уравнением:

$$\ln \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

3. Найти дифференциалы первого и второго порядка функции $z = f(x, y)$, заданной уравнением:

$$x + y + z = e^{-z}.$$

4. Найти дифференциалы первого и второго порядка функции $z = f(x, y)$, заданной системой:

$$\begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, \\ z = u^2. \end{cases}$$

5. Найти производные первого и второго порядка неявных функций $y = y(x)$, $z = z(x)$, заданных системой:

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2. \end{cases}$$

Вариант № 4

1. Найти производную первого порядка неявной функции $y = f(x)$, заданной уравнением:

$$1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0.$$

2. Найти производные первого, второго, третьего порядка для функции $y = f(x)$, определяемой уравнением:

$$y = 2x \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

3. Найти дифференциалы первого и второго порядка функции $z = f(x, y)$, заданной уравнением:

$$zxy = x + y + z.$$

4. Найти дифференциалы первого и второго порядка функции $z = f(x, y)$, заданной системой:

$$\begin{cases} x = v \cos u - u \cos v + \sin u, \\ y = v \sin u - u \sin v - \cos u, \\ z = (u - v)^2. \end{cases}$$

5. Найти производные первого и второго порядка неявных функций $y = y(x)$, $z = z(x)$, заданных системой:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 + z = 2, \\ x^2 - y^2 - z^2 + 2 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 5

1. Найти производную первого порядка неявной функции $y = f(x)$, заданной уравнением:

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

2. Найти производные первого, второго, третьего порядка для функции $y = f(x)$, определяемой уравнением:

$$x^y = y^x.$$

3. Найти дифференциалы первого и второго порядка функции $z = f(x, y)$, заданной уравнением:

$$\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1.$$

4. Найти дифференциалы первого и второго порядка функции $z = f(x, y)$, заданной системой:

$$\begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, \\ z = uv. \end{cases}$$

5. Найти производные первого и второго порядка неявных функций $y = y(x)$, $z = z(x)$, заданных системой:

$$\begin{cases} -2x + y^2 + z = 0, \\ x^2 - y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Вариант № 6

1. Найти производную первого порядка неявной функции $y = f(x)$, заданной уравнением:

$$xy = y^x.$$

2. Найти производные первого, второго, третьего порядка для функции $y = f(x)$, определяемой уравнением:

$$x + y^3 + xy^2 + 2 = 0.$$

3. Найти дифференциалы первого и второго порядка функции $z = f(x, y)$, заданной уравнением:

$$z = x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z - x}.$$

4. Найти дифференциалы первого и второго порядка функции $z = f(x, y)$, заданной системой:

$$\begin{cases} x = u + \ln v, \\ y = v - \ln u, \\ z = 2u + v. \end{cases}$$

5. Найти производные первого и второго порядка неявных функций $y = y(x)$, $z = z(x)$, заданных системой:

$$\begin{cases} 4x + 2y^2 - 3z^3 + 4 = 0, \\ 7x^2 + 2y - 3z^2 + 9 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 7

1. Найти производную первого порядка неявной функции $y = f(x)$, заданной уравнением:

$$y^2 = \frac{x + y}{x - y}.$$

2. Найти производные первого, второго, третьего порядка для функции $y = f(x)$, определяемой уравнением:

$$\sin y + e^x - xy^2 = 0.$$

3. Найти дифференциалы первого и второго порядка функции $z = f(x, y)$, заданной уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

4. Найти дифференциалы первого и второго порядка функции $z = f(x, y)$, заданной системой:

$$\begin{cases} x = ue^{u+v}, \\ y = ue^{u-v}, \\ z = u^2 + v^2. \end{cases}$$

5. Найти производные первого и второго порядка неявных функций $y = y(x)$, $z = z(x)$, заданных системой:

$$\begin{cases} ax + by + cz = 1, \\ x^2 - y^2 - z^2 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 8

1. Найти производную первого порядка неявной функции $y = f(x)$, заданной уравнением:

$$x \sin y + \cos 2y = \cos y.$$

2. Найти производные первого, второго, третьего порядка для функции $y = f(x)$, определяемой уравнением:

$$y = 2x \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

3. Найти дифференциалы первого и второго порядка функции $z = f(x, y)$, заданной уравнением:

$$x^2 + y^2 + z^2 - xyz = 0.$$

4. Найти дифференциалы первого и второго порядка функции $z = f(x, y)$, заданной системой:

$$\begin{cases} x = \frac{u^2 + v^2}{2}, \\ y = \frac{u^2 - v^2}{2}, \\ z = uv \end{cases}$$

5. Найти производные первого и второго порядка неявных функций $x = x(z)$, $y = y(z)$, заданных системой:

$$\begin{cases} z^2 - 2y^2 - x + 6 = 0, \\ x^3 + y^3 - 3z + a = 0. \end{cases}$$

Вариант № 9

1. Найти производную первого порядка неявной функции $y = f(x)$, заданной уравнением:

$$x^y = y^x.$$

2. Найти производные первого, второго, третьего порядка для функции $y = f(x)$, определяемой уравнением:

$$x^2 - xy + 2y^2 + x - y = 1.$$

3. Найти дифференциалы первого и второго порядка функции $z = f(x, y)$, заданной уравнением:

$$z \ln(x + z) - \frac{xy}{z} = 0.$$

4. Найти дифференциалы первого и второго порядка функции $z = f(x, y)$, заданной системой:

$$\begin{cases} x = \sqrt{a}(\sin u + \cos v), \\ y = \sqrt{a}(\cos u - \sin v), \\ z = 1 + \sin(u - v). \end{cases}$$

5. Найти производные первого и второго порядка неявных функций $y = y(x)$, $z = z(x)$, заданных системой:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y + \cos z = 0, \\ x^3 + y^3 + z^3 = b. \end{cases}$$

Вариант № 10

1. Найти производную первого порядка неявной функции $y = f(x)$, заданной уравнением:

$$ye^x + e^y = 0.$$

2. Найти производные первого, второго, третьего порядка для функции $y = f(x)$, определяемой уравнением:

$$\sin xy = 1 - 0,2xy.$$

3. Найти дифференциалы первого и второго порядка функции $z = f(x, y)$, заданной уравнением:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy = 1.$$

4. Найти дифференциалы первого и второго порядка функции $z = f(x, y)$, заданной системой:

$$\begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, \\ z = u^2. \end{cases}$$

5. Найти производные первого и второго порядка неявных функций $y = y(x)$, $z = z(x)$, заданных системой:

$$\begin{cases} 2x - y \operatorname{tg} z = 0, \\ \sin^2 y - \cos x \sin z = 0. \end{cases}$$

**Индивидуальное задание № 5.
Исследование неявных функций**

Вариант №1

1. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = z(x, y)$, определенной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, M(1; 0; 0).$$

2. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной системой, в данной точке:

$$\begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, \\ z = uv. \end{cases}$$

3. К поверхности $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ провести касательные плоскости, параллельные плоскости $x + 4y + 6z = 0$.

4. Исследовать на экстремум функцию трех переменных:

$$u = x^2 - 2xy + 4y^2 + 6z^2 + 6yz - 6z.$$

5. Исследовать на экстремум неявную функцию $z = z(x, y)$, заданную уравнением:

$$z^3 - xyz + y^2 + 4x^2 = 16.$$

6. Найти условный экстремум функции $z = z(x, y)$ при условии связи $\varphi(x, y) = 0$:

$$z = xy^2, x^2 + y^2 = 1.$$

7. Найти условный экстремум функции $u = f(x, y, z)$ при условии связи $\varphi(x, y, z) = 0$:

$$u = x - 2y + 3z, x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

8. Найти условный экстремум функции $u = f(x, y, z)$ при условиях связи $\varphi_1(x, y, z) = 0, \varphi_2(x, y, z) = 0$:

$$u = xyz, x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0.$$

Вариант № 2

1. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = z(x, y)$, определенной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5, M(1; 1; 2).$$

2. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной системой, в данной точке:

$$\begin{cases} x = u + v, \\ y = u^2 + v^2, M(1; 2). \\ z = u^3 + v^3. \end{cases}$$

3. К поверхности $xy + z^2 + xz = 1$ провести касательные плоскости, параллельные плоскости $x + 2z - y = 0$.

4. Исследовать на экстремум функцию трех переменных:

$$u = xy + yz + zx.$$

5. Исследовать на экстремум неявную функцию $z = z(x, y)$, заданную уравнением:

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz + 2x + 2y + 2z = 2.$$

6. Найти условный экстремум функции $z = z(x, y)$ при условии связи $\varphi(x, y) = 0$:

$$z = x + y, \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}.$$

7. Найти условный экстремум функции $u = f(x, y, z)$ при условии связи $\varphi(x, y, z) = 0$:

$$u = 2x + y - 3z + 1, x^2 + y^2 + 2z^2 = 22.$$

8. Найти условный экстремум функции $u = f(x, y, z)$ при условиях связи $\varphi_1(x, y, z) = 0, \varphi_2(x, y, z) = 0$:

$$u = xy + yz, x^2 + y^2 = 2, y + z = 2 (x > 0, y > 0, z > 0).$$

Вариант № 3

1. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = z(x, y)$, определенной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$e^z - z + xy = 3, M(2; 1; 0).$$

2. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной системой, в данной точке:

$$\begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, \\ z = v. \end{cases} M(1; \frac{\pi}{4}).$$

3. К поверхности $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ провести касательные плоскости, параллельные плоскости $12x - 3y + 2z = 0$.

4. Исследовать на экстремум функцию трех переменных:

$$u = yx^3 z^2 (2 - y - 2z - 3x).$$

5. Исследовать на экстремум неявные функции $z = z(x, y)$, заданные уравнением:

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8yz - z + 8 = 0.$$

6. Найти условный экстремум функции $z = z(x, y)$ при условии связи $\varphi(x, y) = 0$:

$$z = e^{xy}, x + y = 1.$$

7. Найти условный экстремум функции $u = f(x, y, z)$ при условии связи $\varphi(x, y, z) = 0$:

$$u = xyz, xy + xz + yz = a^2 (x > 0, y > 0, z > 0, a > 0).$$

8. Найти условный экстремум функции $u = f(x, y, z)$ при условиях связи $\varphi_1(x, y, z) = 0, \varphi_2(x, y, z) = 0$:

$$u = xyz, xy + yz + zx = 8, x + y + z = 5.$$

Вариант № 4

1. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = z(x, y)$, определенной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 0, M(1; -1; 1).$$

2. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной системой, в данной точке:

$$\begin{cases} x = e^u + u \sin v, \\ y = e^u - u \cos v, \\ z = uv. \end{cases}$$

3. К сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$ провести касательную плоскость, перпендикулярную плоскостям $x - y - z = 2, x - y - \frac{1}{2}z = 2$.

4. Исследовать на экстремум функцию трех переменных:

$$u = \ln xy - z(x - y) - x^2 - y^2 + 2xy - y.$$

5. Исследовать на экстремум неявные функции $z = z(x, y)$, заданные уравнением:

$$z^2 + xyz + xy^2 - x^3 = 0.$$

6. Найти условный экстремум функции $z = z(x, y)$ при условии связи $\varphi(x, y) = 0$:

$$z = xy, x^2 + y^2 = 1.$$

7. Найти условный экстремум функции $u = f(x, y, z)$ при условии связи $\varphi(x, y, z) = 0$:

$$u = x y^2 z^3, x + m y^2 + n z^3 = 1 (x > 0, y > 0, z > 0, m > 0, n > 0).$$

8. Найти условный экстремум функции $u = f(x, y, z)$ при условиях связи $\varphi_1(x, y, z) = 0, \varphi_2(x, y, z) = 0$:

$$u = xyz, x + y - z = 3, x - y - z = 8.$$

Вариант № 5

1. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = z(x, y)$, определенной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 169 = 0, M(3; 4; 12).$$

2. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной системой, в данной точке:

$$\begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, \\ z = u \operatorname{ctg} v. \end{cases}$$

3. К поверхности $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 4yz = 8$ провести касательные плоскости, параллельные координатным плоскостям.

4. Исследовать на экстремум функцию трех переменных:

$$u = z \ln z - z - z \ln xy + xy + x^2 + 2y^2 - 4x - 2y.$$

5. Исследовать на экстремум неявные функции $z = z(x, y)$, заданные уравнением:

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0.$$

6. Найти условный экстремум функции $z = z(x, y)$ при условии связи $\varphi(x, y) = 0$:

$$z = 6 - 4x - 3y, x^2 + y^2 = 1.$$

7. Найти условный экстремум функции $u = f(x, y, z)$ при условии связи $\varphi(x, y, z) = 0$:

$$u = x^2 + y^2 + 2z^2, x - y + z = 1.$$

8. Найти условный экстремум функции $u = f(x, y, z)$ при условиях связи $\varphi_1(x, y, z) = 0, \varphi_2(x, y, z) = 0$:

$$u = x + y + z, xyz = 8, \frac{xy}{z} = 12.$$

Вариант № 6

1. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = z(x, y)$, определенной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 0, M(1; -1; -1).$$

2. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной системой, в данной точке:

$$\begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, \\ z = uv. \end{cases}$$

3. К поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = 2x$ провести касательные плоскости, отсекающие на координатных плоскостях равные по величине отрезки.

4. Исследовать на экстремум функцию трех переменных:

$$u = x^2 - 2xy + 4y^2 + 6z^2 + 6yz - 6z.$$

5. Исследовать на экстремум неявные функции $z = z(x, y)$, заданные уравнением:

$$z^4 + y^4 + x^4 = 2(x^2 + y^2 + z^2).$$

6. Найти условный экстремум функции $z = z(x, y)$ при условии связи $\varphi(x, y) = 0$:

$$z = xy, x + y = 1.$$

7. Найти условный экстремум функции $u = f(x, y, z)$ при условии связи $\varphi(x, y, z) = 0$:

$$u = x^3 + y^2 - z^3 + 5, x + y - z = 0.$$

8. Найти условный экстремум функции $u = f(x, y, z)$ при условиях связи $\varphi_1(x, y, z) = 0, \varphi_2(x, y, z) = 0$:

$$u = xyz, x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0.$$

Вариант № 7

1. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = z(x, y)$, определенной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$x^3 + z^3 - 3xz = 0, M(1; 4; 2).$$

2. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной системой, в данной точке:

$$\begin{cases} x = u + v, \\ y = u^2 + v^2, \\ z = u^3 + v^3. \end{cases} M(1; 2).$$

3. К поверхности $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ провести касательные плоскости, параллельные плоскостям $x + 4y + 6z = 0$.

4. Исследовать на экстремум функцию трех переменных:

$$u = xy + yz + zx.$$

5. Исследовать на экстремум неявные функции $z = z(x, y)$, заданные уравнением:

$$5z^2 + 4yz + y^2 - 2y + 3x^2 - 6x + 4 = 0.$$

6. Найти условный экстремум функции $z = z(x, y)$ при условии связи $\varphi(x, y) = 0$:

$$z = x^2 + y^2, x + y = 1.$$

7. Найти условный экстремум функции $u = f(x, y, z)$ при условии связи $\varphi(x, y, z) = 0$:

$$u = x - 2y + 3z, x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

8. Найти условный экстремум функции $u = f(x, y, z)$ при условиях связи $\varphi_1(x, y, z) = 0, \varphi_2(x, y, z) = 0$:

$$u = xy + yz, x^2 + y^2 = 2, y + z = 2 \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

Вариант № 8

1. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = z(x, y)$, определенной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$x^3 + y^3 + z^3 = xy + xz + yz, M(1; 1; 1).$$

2. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной системой, в данной точке:

$$\begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, \\ z = v. \end{cases}$$

3. К поверхности $xy + xz + z^2 = 0$ провести касательные плоскости, параллельные плоскости $x + 4y - z = 0$.

4. Исследовать на экстремум функцию трех переменных:

$$u = yx^3z^2(2 - y - 2z - 3x).$$

5. Исследовать на экстремум неявные функции $z = z(x, y)$, заданные уравнением:

$$(x^2 + y^2 - z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 + z^2).$$

6. Найти условный экстремум функции $z = z(x, y)$ при условии связи $\varphi(x, y) = 0$:

$$z = xy, x^2 + y^2 = 2.$$

7. Найти условный экстремум функции $u = f(x, y, z)$ при условии связи $\varphi(x, y, z) = 0$:

$$u = xy^2z^3, x + 2y + 3z = 6.$$

8. Найти условный экстремум функции $u = f(x, y, z)$ при условиях связи $\varphi_1(x, y, z) = 0, \varphi_2(x, y, z) = 0$:

$$u = xyz, yz + yz + zx = 8, x + y + z = 5.$$

Вариант № 9

1. Составить уравнение касательной плоскости $z = z(x, y)$ и нормали к поверхности, определенной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$z - y - \ln \frac{x}{z} = 0, M(1; 1; 1).$$

2. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной системой, в данной точке:

$$\begin{cases} x = e^u + u \sin v, \\ y = e^u - u \cos v, \\ z = uv. \end{cases}$$

3. К поверхности $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ провести касательные плоскости, параллельные плоскости $12x - 3y + 2z = 0$.

4. Исследовать на экстремум функцию трех переменных:

$$u = \ln xy - z(x - y) - x^2 - y^2 + 2xy - y.$$

5. Исследовать на экстремум неявные функции $z = z(x, y)$, заданные уравнением:

$$\frac{x^3}{3} + 2y^2 - z^2x + z = 0.$$

6. Найти условный экстремум функции $z = z(x, y)$ при условии связи $\varphi(x, y) = 0$:

$$z = x^2 + 12xy + 2y^2, 4x^2 + y^2 = 25.$$

7. Найти условный экстремум функции $u = f(x, y, z)$ при условии связи $\varphi(x, y, z) = 0$:

$$u = x - 2y + 2z, x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

8. Найти условный экстремум функции $u = f(x, y, z)$ при условиях связи $\varphi_1(x, y, z) = 0, \varphi_2(x, y, z) = 0$:

$$u = xyz, x + y - z = 3 = 1, x - y - z = 8.$$

Вариант № 10

1. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = z(x, y)$, определенной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad M(a; b; c).$$

2. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной системой, в данной точке:

$$\begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, \\ z = u \operatorname{ctg} v. \end{cases}$$

3. К поверхности $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8$ провести касательные плоскости, параллельные координатным плоскостям.

4. Исследовать на экстремум функцию трех переменных:

$$u = z \ln z - z - z \ln xy + xy + x^2 + 2y^2 - 4x - 2y.$$

5. Исследовать на экстремум неявные функции $z = z(x, y)$, заданные уравнением:

$$2(x^2 + z^2) + 3(2y^2 + 1) + 8(xz - y) - 4x = 0.$$

6. Найти условный экстремум функции $z = z(x, y)$ при условии связи $\varphi(x, y) = 0$:

$$z = \cos^2 x + \cos^2 y, \quad x - y = \frac{\pi}{4}.$$

7. Найти условный экстремум функции $u = f(x, y, z)$ при условии связи $\varphi(x, y, z) = 0$:

$$u = x^2 y^3 z^4, \quad 2x + 3y + 4z = 2.$$

8. Найти условный экстремум функции $u = f(x, y, z)$ при условиях связи $\varphi_1(x, y, z) = 0$, $\varphi_2(x, y, z) = 0$:

$$u = x + y + z, \quad xyz = 8, \quad \frac{xy}{z} = 12.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Белько, И. В. Сборник задач по дифференциальной геометрии / И. В. Белько, В. И. Ведерников, В. Т. Воднев [и др.]. – М. : Наука, 1979. – 272 с.

2. Бутузов, В. Ф. Математический анализ в вопросах и задачах. Функции нескольких переменных / В. Ф. Бутузов, Н. Ч. Крутицкая, Г. Н. Медведев [и др.]. – М. : Высшая школа, 1988. – 288 с.

3. Бюшгенс, С. С. Дифференциальная геометрия / С. С. Бюшгенс. – М. : Комкнига, 2006. – 304 с.

4. Вернер, А. Л. Геометрия / А. Л. Вернер, Б. Е. Кантор, С. А. Франгулов. – Ч. II. – СПб. : Специальная литература, 1997. – 320 с.

5. Виноградова, И. А. Задачи и упражнения по математическому анализу / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. – М. : изд-во МГУ, 1988. – 416 с.

6. Запорожец, Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г. И. Запорожец. – СПб. : Лань, 2014. – 460 с.

7. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / К. Н. Лунгу. – М. : Айрис-пресс, 2004. – 592 с.

8. Математический анализ : учебное пособие / под ред. А. М. Кытманова. – М. : ЮРАЙТ, 2014. – 607 с.

9. Паньженский, В. И. Введение в дифференциальную геометрию : учебное пособие / В. И. Паньженский. – СПб. : Лань, 2015. – 240 с.

10. Сборник задач по высшей математике для экономистов : учебное пособие / под ред. В. И. Ермакова. – М. : ИНФРА-М, 2004. – 575 с.

11. Степаньянц, К. В. Классическая теория поля : учебное пособие / К. В. Степаньянц. – М. : Физматлит, 2009. – 544 с.

12. Шаров, Г. С. Сборник задач по дифференциальной геометрии : учебное пособие / Г. С. Шаров, А. М. Шелехов, М. А. Шестакова. – М. : МЦНМО, 2005. – 112 с.

13. Шипачев, В. С. Математический анализ. Теория и практика / В. С. Шипачев. – М. : ИНФРА-М, 2015. – 350 с.

Учебное издание

ЧУВАНОВА Галина Михайловна

**ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
ИСЧИСЛЕНИЯ В ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ**

Практикум

Корректор В. А. Яковлева.

Верстка О. А. Надточий.

Подписано в печать 22.06.2021. Бумага «Е-BRITE».

Гарнитура «Myriad Pro». Формат 60х84^{1/16}.

Тираж 500 экз. (1-й завод 1–100 экз.).

Объем 7 усл. п. л. Заказ № 742-19.

Сахалинский государственный университет.
693008, г. Южно-Сахалинск, ул. Ленина, 290, каб. 32.
Тел./факс (4242) 45-23-16. E-mail: izdatelstvo@sakhgu.ru,
polygraph@sakhgu.ru