

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САХАЛИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. В. МОИСЕЕВ

**МЕХАНИКА.
МОДУЛЬ «СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»**

*Учебное пособие
с методическими указаниями и контрольными заданиями
для студентов очной и заочной форм обучения*

Южно-Сахалинск
СахГУ
2020

Печатается по решению учебно-методического совета
Сахалинского государственного университета, 2018 г.

Рецензенты:

Кривуца Зоя Федоровна, доктор технических наук, доцент,
заведующая кафедрой физики и информатики
ФГБОУ ВО «Дальневосточный государственный аграрный университет»;
Мелкий Вячеслав Анатольевич, доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой нефтегазового дела
ФГБОУ ВО «Сахалинский государственный университет».

М74 Моисеев, В. В. Механика. Модуль «Сопrotивление материалов»: учебное пособие с методическими указаниями и контрольными заданиями для студентов очной и заочной форм обучения / В. В. Моисеев. – Южно-Сахалинск : СахГУ, 2020. – 184 с.
ISBN 978-5-88811-609-8

В учебном пособии с методическими указаниями и контрольными заданиями представлены программа дисциплины «Сопrotивление материалов», методические указания по изучению разделов дисциплины, задания для контрольных работ и примеры выполнения заданий для студентов, обучающихся по следующим направлениям подготовки: 20.03.01 «Техносферная безопасность»; 44.03.01 «Педагогическое образование», профиль «Технология»; 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»; 21.03.01 «Нефтегазовое дело»; 20.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов»; 08.03.01 «Строительство»; 05.03.01 «Геология».

Учебное пособие предназначено для студентов, самостоятельно изучающих дисциплину «Сопrotивление материалов», и может быть использовано для студентов очного отделения для выполнения самостоятельных расчетно-графических заданий.

Цель учебного пособия – способствовать формированию профессиональных компетенций у студентов по дисциплинам «Прикладная механика», «Механика», «Машиноведение», модуль «Сопrotивление материалов», приобретению ими навыков по самостоятельному выполнению расчетно-графических заданий, связанных с расчетом на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций, приспособлений, устройств при простых видах деформаций и сложном сопротивлении.

УДК 539.2./6(075.8)
ББК 30.121я73

СОДЕРЖАНИЕ

I. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ.....	4
II. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА.....	5
III. ПРОГРАММА КУРСА.....	6
IV. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ИЗУЧЕНИЮ КУРСА.....	8
V. УКАЗАНИЯ ПО ОФОРМЛЕНИЮ И ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ.....	90
VI. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ.....	92
Задача № 1. Расчет ступенчатого стержня.....	92
Задача № 2. Расчет статически неопределимого ступенчатого стержня.....	94
Задача № 3. Практические расчеты на срез и смятие.....	96
Задача № 4. Расчет вала на кручение.....	98
Задача № 5. Геометрические характеристики плоских сечений.....	99
Задача № 6. Расчет балки на изгиб.....	101
Задача № 7. Расчет статически неопределимых систем.....	103
Задача № 8. Расчет статически неопределимых балок.....	105
Задача № 9. Сложное сопротивление.....	107
Задача № 10. Сложное сопротивление.....	109
Задача № 11. Расчеты на устойчивость.....	111
Задача № 12. Расчеты на ударную нагрузку.....	113
Задача № 13. Расчеты на вибрационную нагрузку.....	114
VII. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ.....	115
Расчетно-графическое задание № 1.....	115
Расчетно-графическое задание № 2.....	118
Расчетно-графическое задание № 3.....	121
Расчетно-графическое задание № 4.....	124
Расчетно-графическое задание № 5.....	128
Расчетно-графическое задание № 6.....	132
Расчетно-графическое задание № 7.....	145
Расчетно-графическое задание № 8.....	149
Расчетно-графическое задание № 9.....	155
Расчетно-графическое задание № 10.....	161
Расчетно-графическое задание № 11.....	165
Расчетно-графическое задание № 12.....	168
Расчетно-графическое задание № 13.....	171
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	175

I. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Сопротивление материалов – наука о прочности, жесткости и устойчивости элементов конструкций (машин и сооружений), то есть она рассматривает вопросы механической надежности и методы ее обеспечения.

Знания, полученные в курсе сопротивления материалов, являются базой для дальнейшего изучения ряда общеинженерных и специальных дисциплин. Сопротивление материалов – одна из сложных дисциплин, сочетающая обширный теоретический и большой нормативный материал с практико-конструктивными соображениями.

Основной формой заочного изучения этой дисциплины является самостоятельная работа с рекомендованными учебниками и учебными пособиями, а также выполнение контрольных работ в виде расчетно-графических заданий. Поэтому успешное изучение дисциплины в большой степени зависит от интенсивности самостоятельной работы студентов. Сейчас в сети Интернет на YouNube имеется большое количество лекций, практических занятий в виде учебных фильмов, которые можно использовать как самостоятельную подготовку по сопротивлению материалов. Контрольные работы по сопротивлению материалов, помимо непосредственного изучения курса, преследуют развитие грамотного выполнения и оформления инженерных расчетов на прочность, жесткость и устойчивость. В период экзаменационной сессии предусматриваются очные виды занятий: лекции, лабораторные и практические занятия. Однако ввиду ограниченности очных занятий они не могут охватить всех основных вопросов курса и заменить самостоятельную работу.

При изучении сопротивления материалов необходимо составлять конспект, записывая в него основные положения, выводы и формулы.

Особое внимание нужно обращать на физическую сущность явлений, на допущения и ограничения, которые принимаются в процессе выводов и решения уравнений.

Для лучшего усвоения пройденного материала после проработки каждой темы следует ответить на вопросы для самопроверки и решить рекомендуемые задачи.

Важным условием практического изучения «Сопротивления материалов» является выполнение лабораторных работ. В лаборатории студенты-заочники знакомятся с испытательными машинами и приборами, с методикой экспериментального исследования свойств различных материалов, с обработкой экспериментальных данных. При подготовке к лабораторной работе студенты используют рекомендованные методические пособия.

Перед выполнением лабораторной работы преподаватель устанавливает подготовленность студентов к работе путем краткого опроса. Формы отчета по работе и контрольные вопросы, на которые необходимо дать ответ при защите работы, указаны в рекомендованных методических разработках.

II. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Александров, А. В. Сопротивление материалов : учебник для студ. вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин ; под ред. А. В. Александрова. – 2-е изд., испр. – М. : Высшая школа, 2009. – 559 с.
2. Андреев, В. И. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности : учебник / В. И. Андреев, Г. С. Варданян, А. А. Горшков. – М. : ИНФРА-М, 2013. – 638 с.
3. Аркуша, А. И. Техническая механика: теоретическая механика и сопротивление материалов : учебник / А. И. Аркуша. – М. : КД «Либроком», 2015. – 354 с.
4. Беляев, Н. М. Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. – М. : Альянс, 2015. – 608 с.
5. Березина, Е. В. Сопротивление материалов : учебное пособие / Е. В. Березина. – М. : Альфа-М ; НИЦ ИНФРА-М, 2013. – 208 с.
6. Биргер, И. А. Сопротивление материалов / И. А. Биргер, Р. Р. Мавлютов. – М. : Ленанд, 2015. – 560 с.
7. Дарков, А. В. Сопротивление материалов : учебник для вузов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М. : Альянс, 2014. – 624 с.
8. Кривошапко, С. Н. Сопротивление материалов. Практикум : учебное пособие для прикладного бакалавриата / С. Н. Кривошапко, В. А. Копнов. – Люберцы : Юрайт, 2016. – 353 с.
9. Межецкий, Г. Д. Сопротивление материалов : учебник / Г. Д. Межецкий, Г. Г. Загребин. – М. : Дашков и К, 2016. – 432 с.
10. Сапожников, А. Ф. Сопротивление материалов. Пособие по решению задач : учебное пособие / А. Ф. Сапожников, И. Г. Конопельцев, С. Д. Андреева [и др.]. – СПб. : Лань, 2014. – 512 с.
11. Сахновский, В. Г. Сопротивление материалов : учебник КПТ / В. Г. Сахновский. – СПб. : Лань КПТ, 2016. – 560 с.
12. Степин, П. А. Сопротивление материалов : учебник / П. А. Степин. – СПб. : Лань, 2014. – 320 с.
13. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов : учебник для студ. высш. техн. учеб. зав. / В. И. Феодосьев. – 10-е изд., перераб. и доп. – М. : изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2007. – 588 с.

III. ПРОГРАММА КУРСА

1. Основные понятия и определения.

Предмет, содержание и задачи курса. Связь науки о сопротивлении материалов с техническими дисциплинами, политехническим обучением. Значение курса в формировании компетенций, знаний и умений бакалавра техносферной безопасности. Краткая история развития и основные предпосылки науки о сопротивлении материалов.

Классификация тел. Расчетная схема. Классификация внешних сил. Деформации и перемещения. Внутренние силы. Метод сечений. Полное, нормальное и касательное напряжения. Простые виды деформации: растяжение, сжатие, сдвиг, кручение, изгиб. Понятие о сложном сопротивлении.

2. Растяжение и сжатие.

Понятие о деформации растяжения и сжатия. Продольные силы и нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса. Эпюры продольных сил и нормальных напряжений. Продольные и поперечные деформации. Закон Гука. Модуль продольной упругости. Коэффициент поперечной деформации. Перемещение поперечных сечений бруса. Работа внешних сил. Потенциальная энергия деформации.

Экспериментальное изучение механических свойств материалов. Виды механических испытаний. Диаграммы растяжения и сжатия пластичных и хрупких материалов. Механические характеристики материалов. Условная и истинная диаграммы растяжения. Краткие сведения о влиянии химического состава, температуры, времени и скорости нагружения, предварительного пластического деформирования (наклепа) и термической обработки на механические свойства материалов. Местные напряжения. Коэффициент концентрации напряжений.

Допускаемые напряжения. Коэффициент запаса прочности. Основные факторы, влияющие на величину коэффициента запаса прочности. Расчет на прочность при растяжении и сжатии. Виды расчетов на прочность. Примеры расчетов на прочность простейших деталей машин, работающих на растяжение и сжатие.

3. Сложное напряженное состояние.

Понятие напряженного состояния в точке. Виды напряженного состояния. Напряжения в наклонных сечениях при плоском напряженном состоянии. Закон парности касательных напряжений. Главные напряжения. Главные площадки. Экстремальные касательные напряжения. Площадки сдвига.

4. Теории прочности.

Назначение теории прочности. Теория наибольших касательных напряжений. Теория прочности Мора. Энергетическая теория прочности. Выбор теории прочности.

5. Сдвиг.

Понятие о деформации чистого сдвига. Поперечная сила. Деформации и напряжение при сдвиге. Закон Гука при сдвиге. Связь между тремя постоянными упругости. Расчеты на срез и смятие заклепочных соединений. Прочность сварочных соединений, виды расчетов. Примеры расчетов на прочность простейших деталей машин, работающих на срез и смятие.

6. Геометрические характеристики поперечных сечений.

Понятие о геометрических характеристиках поперечных сечений (площадь, статический момент площади, осевые или экваториальные моменты инерции, центробежный момент инерции, полярный момент инерции, моменты сопротивления сечения, радиусы инерции). Определение геометрических характеристик поперечных сечений в зависимости от формы сечения. Осевые и центробежные моменты инерции относительно параллельных осей и при повороте осей. Главные центральные оси и главные моменты инерции. Радиусы инерции.

7. Кручение.

Понятие о деформации кручения. Крутящие моменты в поперечных сечениях вала. Эпюры крутящих моментов. Связь крутящего момента с передаваемой валом мощностью и частотой вращения вала. Деформации и напряжения при кручении прямых валов круглого поперечного сечения. Характер распределения касательных напряжений по поперечному сечению. Главные напряжения и главные площадки.

Угол закручивания. Относительный угол закручивания. Полярный момент инерции и полярный момент сопротивления круглого и кольцевого поперечного сечения вала. Расчеты на прочность и жесткость валов круглого поперечного сечения. Расчеты на прочность и жесткость валов некруглого поперечного сечения. Виды расчетов на прочность и жесткость. Расчет цилиндрических винтовых пружин с малым шагом. Примеры расчетов на прочность и жесткость простейших деталей машин, работающих на кручение.

8. Изгиб.

Понятие о деформации изгиба. Чистый и поперечный прямой изгиб. Поперечные силы и изгибающие моменты в поперечных сечениях балки. Опоры и опорные реакции. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Деформации и нормальные напряжения при чистом изгибе. Касательные напряжения при поперечном изгибе. Формула Журавского. Характер распределения нормальных и касательных напряжений по поперечному сечению балки.

Главные напряжения и главные площадки при прямом поперечном изгибе. Осевой момент инерции и осевой момент сопротивления прямоугольного, треугольного, круглого и кольцевого поперечного сечения балки. Стандартные профили. Расчет на прочность по нормальным, касательным и эквивалентным напряжениям. Виды расчетов на прочность.

Деформация при изгибе. Упругая линия и ее дифференциальное уравнение. Определение линейных и угловых перемещений для простейших случаев нагружения статически определимых балок методом интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси балки. Метод начальных параметров. Интеграл Мора. Формула Верещагина. Расчет на жесткость при изгибе.

9. Сложное сопротивление.

Общий метод определения напряжений и деформаций при сложном сопротивлении. Косой изгиб. Изгиб с осевым растяжением и сжатием. Внецентренное растяжение или сжатие стержня большой жесткости. Совместное действие кручения и изгиба.

10. Продольный изгиб.

Понятие об устойчивости и критической силе. Формула Эйлера для определения критической силы. Влияние способа закрепления концов стержня на величину критической силы. Критические напряжения. Пределы применимости формулы Эйлера. Формула Ясинского. Расчеты сжатых стержней на устойчивость.

11. Прочность при переменных и динамических нагрузках.

Переменные нагрузки и их влияние на прочность деталей машин. Физическая сущность природы разрушения материалов при переменных напряжениях. Виды циклов напряжений. Определение предела выносливости. Кривая усталости. Факторы, влияющие на усталостную прочность. Напряжения при равноускоренном движении. Ударная проба стали. Расчеты на прочность при переменных и динамических нагрузках.

Лабораторные работы:

1. Испытание образцов из малоуглеродистой стали на растяжение.
2. Испытание на сжатие образцов из различных материалов.
3. Испытание на срез.
4. Испытание на кручение валов круглого поперечного сечения.
5. Испытание на растяжение (сжатие) винтовых и цилиндрических пружин с малым шагом.
6. Исследование прямого поперечного изгиба балки прямоугольного поперечного сечения.
7. Исследование косоугольного изгиба консольно заземленной балки.
8. Исследование пространственного бруса на сложное сопротивление.
9. Испытание на устойчивость стержней прямоугольного сечения.

IV. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ИЗУЧЕНИЮ КУРСА

1. Основные понятия и определения.

В начале изучения курса следует ознакомиться с его содержанием и задачами, а также с историей науки о сопротивлении материалов.

Сопротивление материалов – научная дисциплина, изучающая инженерные методы расчета на прочность, жесткость и устойчивость отдельных элементов конструкций (сооружений, машин и механизмов).

Прочность – это способность конструкции и ее элементов воспринимать заданную нагрузку не разрушаясь и без появления в ней пластической (остаточной) деформации.

Жесткость – это способность элемента конструкции под действием внешней нагрузки сопротивляться деформации.

Устойчивость – это способность конструкции или ее элемента под действием заданной нагрузки сохранять первоначальную форму упругого равновесия.

Прочность, жесткость и устойчивость должны быть обеспечены при минимальной материалоемкости конструкции, то есть конструкции должны быть не только надежными, но и экономичными.

В отличие от теоретической механики, в которой все тела считаются абсолютно твердыми, в сопротивлении материалов изучаются упругие и пластические (остаточные) деформации реальных твердых тел. В основу решения большинства задач, рассматриваемых в курсе сопротивления материалов, положены допущения о свойствах материалов (материал считается *однородным, сплошным, изотропным и абсолютно упругим*); допущения о характере деформаций (о независимости действия сил и деформаций, неизменности начальных размеров, о независимости распределения напряжений от способа приложения нагрузки и неизменности плоскостности поперечных размеров (гипотеза плоских сечений Бернулли), а также допущения к системе приложения сил (сила считается сосредоточенной либо распределенной нагрузкой). Применение указанных допущений и гипотез позволяет упростить решение задач сопротивления материалов с достаточной для практики точностью.

В сопротивлении материалов вводятся упрощения в форму тел. Все их многообразие сводится к брусу (стержень, вал, балка), оболочке (пластине) и массиву.

Следует обратить внимание на понятие нагрузки в сопротивлении материалов, под которой понимается совокупность внешних сил и реакций связей, действующих на конструкцию и образующих равновесную систему.

Внешние силы по способу приложения к конструкции делятся на объемные и поверхностные. Поверхностные силы, в свою очередь, подразделяются на сосредоточенные силы F , приложенные в точке и распределенные по поверхности p или длине q . По характеру изменения во времени поверхностные силы могут быть статические и динамические, а по продолжительности действия постоянные и временные.

Важнейшее значение в сопротивлении материалов занимает понятие внутренних сил. Материал в сопротивлении материалов считается состоящим из атомов, занимающих весь объем тела, которые при отсутствии действия внешних сил находятся в центрах упругого равновесия, между атомами действуют силы взаимного притяжения и отталкивания, которые при отсутствии внешних сил уравнивают друг друга. При действии на тело внешних сил тело деформируется (изменяются размеры и форма тела), при этом атомы смещаются относительно центров упругого равновесия, и между ними возникают дополнительные силы, которые стараются вернуть атомы к центрам упругого равновесия. Эти дополнительные силы, возникающие между атомами вследствие действия внешних сил, называются внутренними. Если внутренние силы уравнивают внешние силы, то прочность тела обеспечена, если не уравнивают, то происходит нарушение прочности материала элемента конструкции.

Особое внимание следует обратить на метод сечений, позволяющий определять внутренние силы или внутренние силовые факторы (ВСФ), возникающие в том или ином поперечном сечении твердого тела под действием внешних сил.

Для нахождения внутренних сил используют метод сечений (правило РОЗУ), который состоит в последовательном выполнении следующих действий.

Рассмотрим тело произвольной формы (рис. 1, а), находящееся в равновесии под действием внешних сил $F_1, F_2, F_3 \dots F_n$.

1. *Рассечем* мысленно тело на две части плоскостью Π там, где нужно определить внутренние силы (рис. 1, а). Так как связи между частями устранены (рис. 1, б), то действие одной части на другую следует заменить системой внутренних сил в сечении. Закон действия внутренних сил неизвестен, но, исходя из допущения о сплошности и однородности материала, можно сказать, что

внутренние силы непрерывно распределены по поперечному сечению и в соответствии с третьим законом Ньютона внутренние силы для левой части равны внутренним силам для правой части, но противоположны по направлению. Следовательно, внутренние силы в сечениях частей тела равны, но обратно направлены, то есть всегда взаимны.

2. *Отбрасываем* одну из частей. Например, левую. Внутренние силы стали как бы внешними, действующими по торцу детали. Внутренние силы распределены по сечению некоторым сложным образом. Однако их можно привести к какой-либо точке, например к центру тяжести сечения O , тогда для рассматриваемой части тела можно определить главный вектор R_r и главный момент M_r внутренних сил, действующих по поперечному сечению (рис. 1, в).

3. *Заменяем* действие отброшенной части главным вектором R_r и главным моментом M_r внутренних сил, действующих по поперечному сечению. Так как система внешних сил удовлетворяет условиям равновесия, а система внутренних сил взаимна, то мысленно отсеченная часть также должна находиться в равновесии. Проведем из центра тяжести оси координат, так чтобы ось z была перпендикулярна поперечному сечению и направлена от сечения, а оси x и y лежали в плоскости сечения.

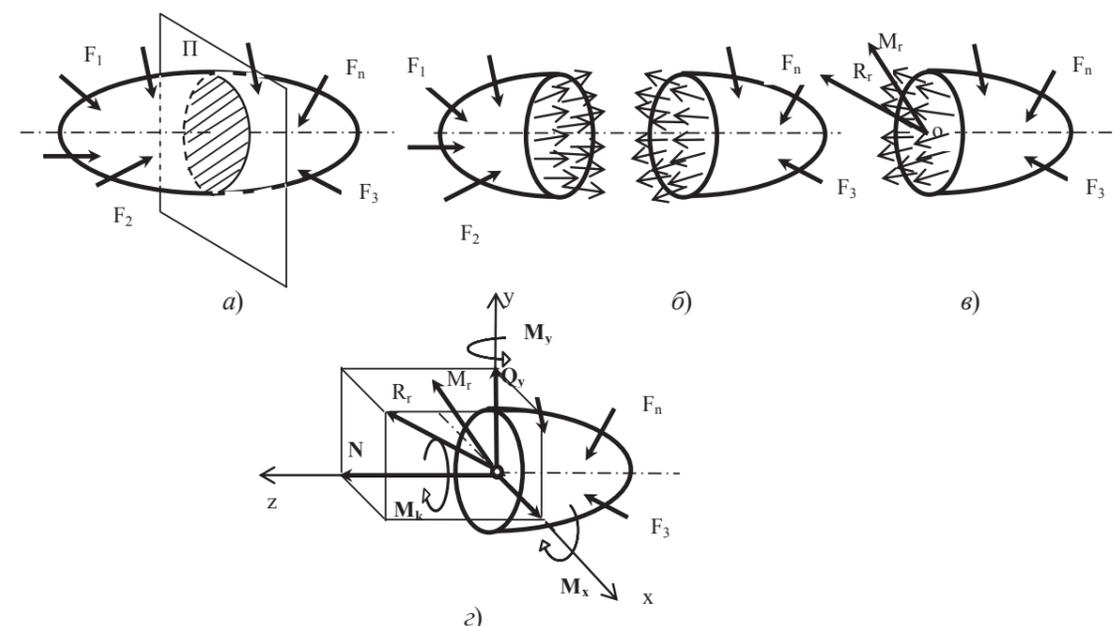


Рис. 1. Схемы последовательности определения внутренних силовых факторов

Проектируя главный вектор R_r на оси координат, получим проекции N – продольную силу, Q_x, Q_y – поперечные силы, а в результате проекции главного момента M_r внутренних сил получим моменты относительно осей: относительно оси z M_k – крутящий момент, относительно осей x и y M_x, M_y – изгибающие моменты. Продольная сила, поперечные силы, крутящий и изгибающие моменты являются внутренними силовыми факторами.

4. *Уравнение равновесия* составим для оставшейся части тела.

В различных поперечных сечениях возникают различные внутренние силы. Главный вектор и главный момент внутренних сил будут удовлетворять векторным уравнениям составляющих проекций по осям (рис. 1, г):

$$\begin{aligned} \vec{R}_r &= \vec{N} + \vec{Q}_x + \vec{Q}_y \\ \vec{M}_r &= \vec{M}_k + \vec{M}_x + \vec{M}_y \end{aligned}$$

Чтобы вычислить силовые факторы, необходимо решить шесть уравнений равновесия для одной из отсеченных частей:

$$\begin{cases} \sum F_z = N + \sum Fe_z = 0 \\ \sum F_y = Q_y + \sum Fe_y = 0 \\ \sum F_x = Q_x + \sum Fe_x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sum M_z = M_k + \sum M_z(Fe) = 0 \\ \sum M_y = M_y + \sum M_y(Fe) = 0 \\ \sum M_x = M_x + \sum M_x(Fe) = 0 \end{cases}$$

Таким образом, если внешние силы заданы, то внутренние силовые факторы вычисляются на основании уравнений равновесия как алгебраические суммы проекций сил и моментов, действующих на мысленно отсеченную часть тела. Правило РОЗУ определяется первыми буквами действий, которые необходимо выполнить при определении внутренних силовых факторов:

Р ассеекаем
О тбрасываем
З аменяем
У равнение равновесия составляем.

Метод сечений позволяет определить внутренние силовые факторы, однако, чтобы определить сами внутренние силы и установить закон их распределения, нужно ввести меру интенсивности распределения внутренних сил по поперечному сечению. За такую меру интенсивности принято *напряжение*. Или за *напряжение* принимается усилие внутреннего силового фактора, приходящего на единицу характеристики поперечного сечения в данной точке рассматриваемого сечения.

Для понимания характеристики напряжения рассмотрим второй этап метода сечений. Пусть имеем оставшуюся часть тела (рис. 2, а). Выделим на поперечном сечении элементарную площадку площадью ΔA вокруг произвольной точки K . Пусть равнодействующая внутренних сил на этой площадке равна ΔR .

Отношение равнодействующей внутренних сил, возникающих на элементарной площадке, к площади этой площадки называют *средним напряжением* p в окрестности рассматриваемой точки по приведенному сечению $p_{cp} = \frac{\Delta R}{\Delta A}$.

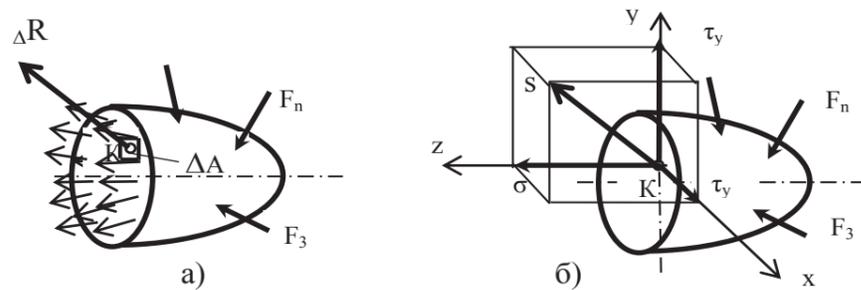


Рис. 2. Схемы действия внутренних сил и напряжений в сечении тела

Чем точнее нужно знать интенсивность внутренних сил в данной точке сечения, тем меньше должна быть выделена площадка. В пределе при стремлении ΔA к нулю получим *истинное или полное напряжение* s рассматриваемого сечения:

$$s = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}$$

Напряжение измеряется в Па $\left[\frac{H}{M^2} \right]$ или МПа. Раньше использовалась размерность: кгс/мм²; кгс/см². Полное напряжение может быть разложено на три составляющих (рис. 2, б). Нормальную составляющую полного напряжения к поперечному сечению обозначают σ и называют *нормальным напряжением*, составляющие, лежащие в плоскости сечения, называют *касательными напряжениями* и обозначаются τ_x, τ_y .

Связь между напряжениями и внутренними силовыми факторами устанавливается используя уравнение статики, учитывая, что элементарные внутренние силы равны:

$$dN = \sigma \cdot dA; dQ_x = \tau_x \cdot dA; dQ_y = \tau_y \cdot dA \text{ (рис. 3).}$$

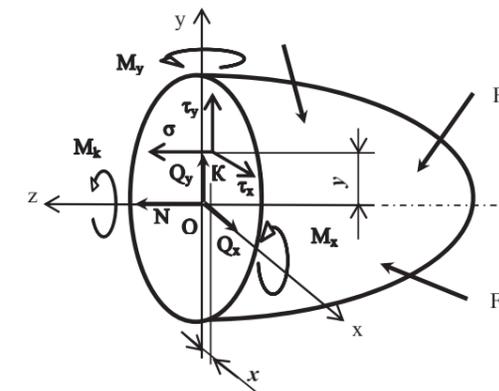


Рис. 3. Схема для определения связи между напряжениями и внутренними силовыми факторами

Суммируя по всему сечению тела проекции этих сил, а также моменты относительно осей x, y, z , будем иметь шесть уравнений равновесия:

$$\begin{cases} N = \int_A \sigma \cdot dA \\ Q_y = \int_A \tau_y \cdot dA \\ Q_x = \int_A \tau_x \cdot dA \\ M_k = T = \int_A (\tau_y x - \tau_x y) \cdot dA \\ M_y = \int_A x \cdot \sigma \cdot dA \\ M_x = \int_A y \cdot \sigma \cdot dA \end{cases}$$

где A – площадь поперечного сечения тела.

Нормальные и касательные напряжения являются мерой оценки внутренних сил тела, так как материалы различным образом им сопротивляются. Нормальные напряжения стремятся сблизить или удалить отдельные частицы тела по направлению нормали к плоскости сечения, а касательные напряжения стремятся сдвинуть одни частицы тела относительно других по плоскости сечения. Поэтому касательные напряжения называют еще напряжениями сдвига.

Через точку K тела можно провести и другие секущие плоскости. Напряжения в каждой из них для точки K будут различными. Совокупность напряжений для множества площадок, проходящих через точку, определяет напряженное состояние в точке. Для полной характеристики напряженного состояния в данной точке надо знать не только величину и направление напряжения, но и ориентацию сечения, по которому они действуют.

Следует уяснить, что вид деформации тела связан с внутренними силовыми факторами, возникающими в поперечном сечении. Если в поперечном сечении возникает только продольная сила N , а остальные внутренние силовые факторы равны нулю, то такая деформация называется растяжением (сжатием). Растяжение (сжатие) относится к простым видам деформации так же, как деформация – сдвиг (в поперечном сечении возникает только поперечная сила Q), кручение (в поперечном сечении возникает только крутящий момент M_k) и изгиб (в поперечном сечении возникает изгибающий момент M_x или M_y или изгибающий момент и поперечная сила). Под сложным сопротивлением будем понимать такой вид нагружения твердого тела, при котором в поперечном сечении будет возникать одновременно несколько внутренних силовых факторов. К сложному сопротивлению относятся кривой изгиб, внецентренное растяжение или сжатие, изгиб с кручением и другие.

Вопросы для самопроверки:

1. Какие основные задачи решаются наукой о сопротивлении материалов?
2. Дать определения упругих и пластических (остаточных) деформаций.

3. В чем заключается сущность расчетов на прочность, жесткость и устойчивость?
4. Какие объекты (элементы конструкций) исследуются в сопротивлении материалов?
5. Дать классификацию внешних сил.
6. Привести основные допущения и гипотезы, применяемые в сопротивлении материалов.
7. Объяснить применение метода сечений для определения внутренних усилий в твердых телах, находящихся под внешней нагрузкой.
8. Какие внутренние силовые факторы возникают (в общем случае) в поперечном сечении бруса?
9. Что называется напряжением в данной точке сечения тела?
10. На какие составляющие раскладывается вектор полного напряжения?

2. Растяжение и сжатие.

В этой теме рассматривается деформация осевого растяжения и сжатия стержня.

Под растяжением (сжатием) понимается такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях стержня возникает только продольная сила N , а все прочие внутренние силовые факторы (поперечные силы, крутящий и изгибающий моменты) равны нулю.

Если рассмотреть прямой стержень прямоугольного поперечного сечения, к концу которого приложена центральная сила F , то до нагружения стержень имел длину l , после нагружения длина увеличилась на Δl и стала равной $\Delta l + l$ (рис. 4, а). Удлинение бруса в осевом направлении сопровождается уменьшением его поперечных размеров на величину Δb и Δh (рис. 4, б). Величина Δl называется абсолютным удлинением (укорочением) стержня. Отношение приращения длины стержня к его первоначальной длине называют продольной деформацией:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

Отношение приращения размеров поперечного сечения к его первоначальному значению называется поперечной деформацией:

$$\varepsilon' = -\frac{\Delta b}{b} = -\frac{\Delta h}{h}.$$

В пределах упругих деформаций отношение поперечной деформации к продольной постоянно для данного материала, называется коэффициентом Пуассона и обозначается μ и характеризует упругие свойства материала:

$$\mu = \frac{|\varepsilon'|}{|\varepsilon|}.$$

Поперечные и продольные деформации всегда противоположны по знаку.

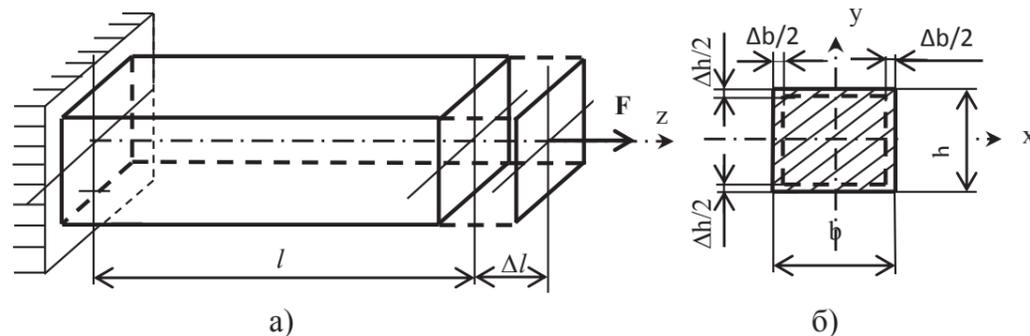


Рис. 4. Схема для определения деформации при растяжении (сжатии) стержня

Если воспользоваться методом сечений, то становится очевидным, что во всех сечениях стержня возникает продольная сила $N = F$. В общем случае значение $N = \sum F_{iz}$. Сжатие от растяжения отличается лишь формально направлением силы F , а значит, и N , то есть при анализе растяжения и сжатия сохраняется единство подхода рассмотрения вопросов.

При растяжении и сжатии поперечные сечения до деформации и во время деформации оста-

ются плоскими и параллельными продольной оси стержня (гипотеза Бернулли), следовательно, напряжения в них распределяются равномерно и равны:

$$\sigma = \frac{N}{A}, \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right] [\text{Па}].$$

Значение продольных сил и напряжений в различных сечениях одного и того же стержня, имеющего различную площадь поперечного сечения и действующие внешние силы, различно.

Графическое изображение изменения продольной силы и напряжения вдоль оси стержня в определенном масштабе называется эпюрой. Эпюры дают возможность найти наибольшее значение продольной силы, напряжения и определить положение опасного сечения.

Составление уравнений равновесия при определении продольной силы N методом сечений реализуется двумя путями: введением местных координат и с помощью правила знаков для продольной силы при растяжении, сжатии.

Пример: рассмотрим ступенчатый стержень, нагруженный внешними сосредоточенными силами $F, 4F, 2F$, направленными вдоль оси. Требуется определить продольную силу на третьем участке.

При использовании метода местных координат после мысленного рассечения стержня плоскостью на участке III (рис. 5, а) и отбрасывания одной из частей (в нашем случае правой), для оставшейся части стержня проводим местные координаты. Из рассматриваемого сечения проводим продольную ось z так, чтобы она была направлена всегда от сечения и текущая продольная сила совпадала с направлением оси z (рис. 5, б). Для оставшейся части тела составляется уравнение равновесия, проектируя внешние и внутренние силы на ось z . Уравнение равновесия записываем, используя законы теоретической механики:

$$\sum F_{z_{ин}} = 0; N_{III} + F - 4F + 2F = 0. \text{ Откуда } N_{III} = -F + 4F - 2F = F.$$

В нашем случае она положительна, значит деформация стержня на III участке – растяжение, если была бы отрицательна, то сжатие.

При определении продольной силы N с помощью правила знаков учитываем, что по правилу знаков продольная сила N положительна, если относительно рассматриваемого сечения внешняя сила, ее вызывающая, растягивает стержень, и отрицательна, если сжимает. Тогда для сечения на участке располагаемся так, чтобы видеть оставшееся сечение (см. человечка на рис. 5, а). Продольная сила N_{III} для левого оставшегося сечения будет равна внешней силе $-F$, так как она сжимает стержень, $+4F$ – растягивает стержень и $-2F$ – сжимает стержень относительно рассматриваемого сечения. В итоге:

$$N_{III} = -F + 4F - 2F = F.$$

При применении правила знаков для продольной силы упрощается составление уравнений равновесия для оставшейся части стержня, не нужно делать дополнительные построения в виде рис. 5, б.

Последовательность действий при построении эпюры:

1. Изобразить расчетную схему в определенном масштабе, указав внешнюю нагрузку, поперечные размеры и длину стержня с приведением числовых значений.
2. Разбить брус на участки. Границами участков являются точки приложения сосредоточенных сил, начало и конец приложения распределенных усилий и сечения, где изменяется площадь поперечного сечения стержня. Провести через границы участков линии, перпендикулярные оси бруса.
3. Присвоить номер каждому участку. Нумерацию участков следует вести со свободного конца стержня, чтобы не искать реакцию в заделке. Если реакция в заделке известна или определена с помощью уравнений равновесия, то нумерацию можно вести с любого конца стержня.
4. Методом сечений определить для каждого участка величину и знак продольной силы.
5. Построить эпюру. Для этого провести линию, параллельную оси бруса, а на перпендикулярных линиях отложить в масштабе величину N и через эти точки провести линии. Внутри образовавшихся фигур поставить знак продольной силы и заштриховать фигуру линиями, перпендикулярными оси бруса. На ординатах конца участков эпюр поставить числовые значения без указания знаков.
6. Подписать эпюру, указав наименование и размерность (рис. 5, в). Аналогичным образом строятся эпюры напряжений и перемещений. Большое значение в сопротивлении материалов имеет закон Гука, который позволяет оценить

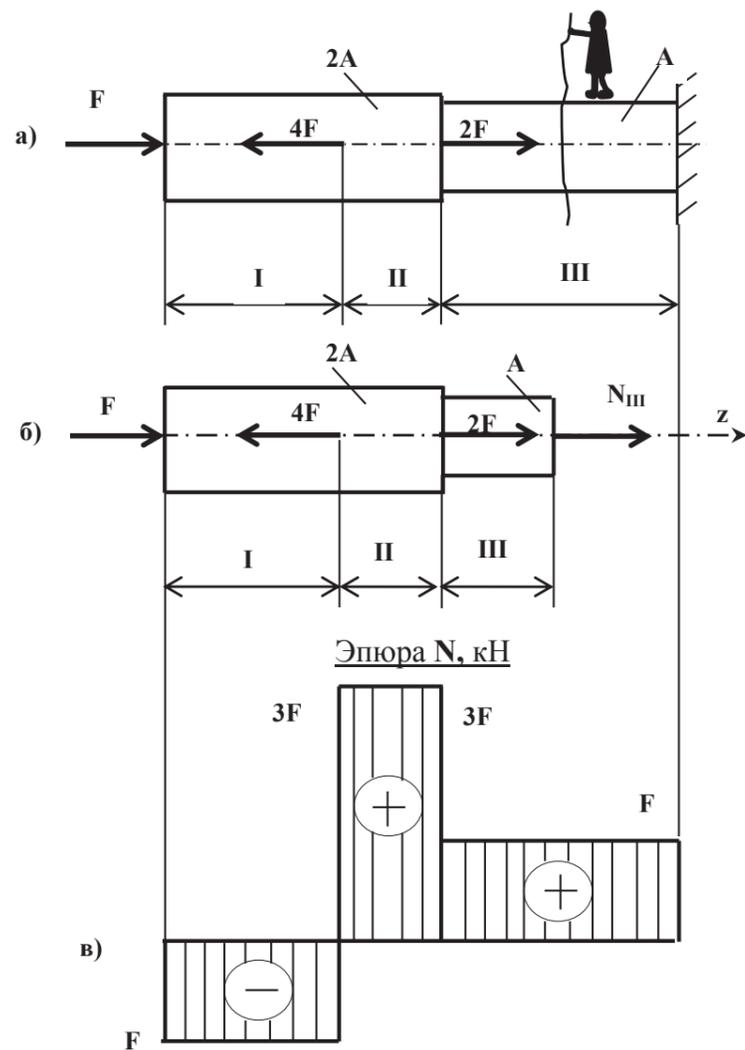


Рис. 5. Определение продольной силы методом местных координат

влияние материала на напряжения и деформации. Между величиной относительного удлинения и величиной нормальных напряжений, возникающих в поперечных сечениях в пределах упругости материала, существует прямо пропорциональная зависимость $\sigma = E \cdot \varepsilon$, которая называется законом Гука. Здесь σ – напряжение [МПа], ε – относительная деформация [б/р].

Величина E , входящая в формулу Гука, является одной из важнейших величин, характеризующих жесткость материала, то есть сопротивляемость упругим деформациям. Эта величина называется модулем продольной упругости первого рода, или модулем Юнга, определяется экспериментально. Каждому материалу присущ свой модуль упругости. Для стали $E = 210$ ГПа, дерева $E = 14$ ГПа, алюминия $E = 70$ ГПа.

Учитывая, что $\sigma = \frac{N}{A}$, а $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ и подставляя эти значения в формулу Гука и решая ее относительно абсолютной деформации Δl , получим:

$$\frac{N}{A} = E \frac{\Delta l}{l}; \quad \Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}.$$

Величина $E \cdot A$ называется жесткостью сечения стержня при растяжении (сжатии). Следует заметить, что перемещения, возникающие в стержне, подчиняются принципу суперпозиции, то есть они не зависят от порядка приложения внешних сил. То есть если к конструкции приложено несколько сил, то можно определить перемещение от каждой силы в отдельности, а затем результат действия сил получить как алгебраическое действие каждой силы.

Внешние силы, приложенные к телу, совершают работу A_F , в результате которой в теле накапливается внутренняя потенциальная энергия деформированного тела W . При медленном нагружении стержня внешней силой F работа внешней силы целиком преобразуется во внутреннюю потенциальную энергию:

$$A_F = W.$$

Работа силы на участке Δl равна $A_F = W = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l$. Учитывая, что $\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$; а $N = F$, внутренняя потенциальная энергия деформации стержня будет равна:

$$A_F = W = \frac{1}{2} \cdot \frac{F \cdot F \cdot l}{E \cdot A} = \frac{N^2 \cdot l}{2E \cdot A}.$$

Если стержень ступенчатый и продольная сила N меняется вдоль оси стержня, то внутренняя потенциальная энергия деформации стержня определяется суммированием по участкам:

$$W = \int_0^l \frac{N_i^2 dz}{E \cdot A_i}.$$

При проектировании конструкции, модели, детали важно знать механические свойства материала, из которого она изготовлена.

Величины, характеризующие количественную сторону механических свойств, называются механическими характеристиками материала. Для получения их числовых значений проводят различные испытания. К ним относятся: определение твердости, испытание на растяжение и сжатие, испытание на сдвиг, испытание при знакопеременных напряжениях, испытания на ударную вязкость и др. Чтобы сделать результаты испытаний сравнимыми, устанавливается определенное соотношение размеров для образцов на испытание.

Необходимо усвоить методику статического испытания на растяжение малоуглеродистой стали путем построения и обработки диаграммы растяжения и определения прочностных характеристик (рис. 6): предел пропорциональности $\sigma_{пр} = F_{пр}/A_0$; предел упругости $\sigma_{ур} = F_{ур}/A_0$; предел текучести $\sigma_{тп} = F_{тп}/A_0$ или условный предел текучести $\sigma_{0,2} = F_{0,2}/A_0$, для материалов на диаграмме которых отсутствует площадка текучести; временное сопротивление или предел прочности $\sigma_{вр} = F_{вр}/A_0$.

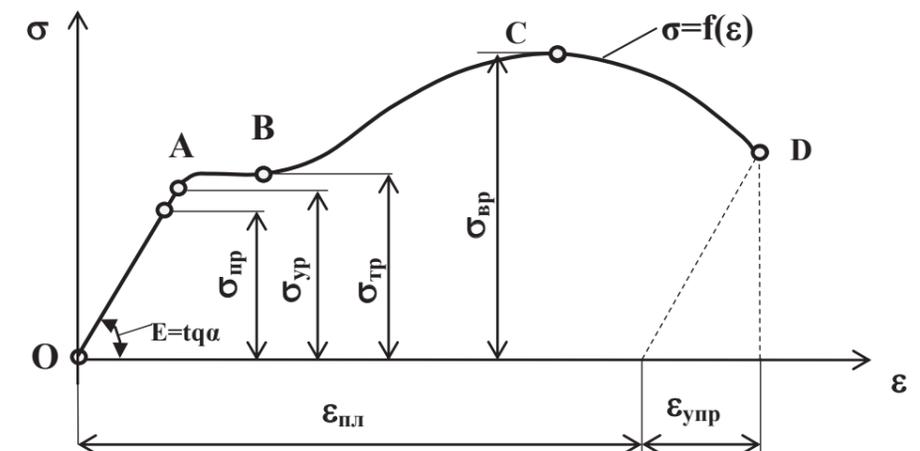


Рис. 6. Механические характеристики малоуглеродистой стали

К показателям пластичности стали относятся: относительное остаточное удлинение $\delta = \frac{l_k - l_0}{l_0} \cdot 100\%$ и относительное сужение поперечного сечения $\psi = \frac{A_0 - A_k}{A_0} \cdot 100\%$, а к характеристике жесткости материала относится модуль продольной упругости материала $E = \frac{\sigma_{пр}}{\varepsilon_{пр}} = \text{tg} \alpha$.

Следует правильно путем сравнения охарактеризовать поведение пластичных и хрупких материалов при растяжении (сжатии), их чувствительность к концентраторам напряжений.

Необходимо уяснить определение допускаемых напряжений, которые равны частному предельных напряжений $\sigma_{пред}$ на нормативный коэффициент запаса прочности $[n]$, то есть $[\sigma] = \frac{\sigma_{пред}}{[n]}$. Для пластичных материалов, у которых предельные напряжения равны пределу текучести при

растяжении и сжатии, допускаемые напряжения равны $[\sigma] = \frac{\sigma_{тп}}{[n]} = \frac{\sigma_{тс}}{[n]}$. У хрупко-пластичных ма-

териалов, которые лучше работают на сжатие, чем на растяжение, допускаемые напряжения сле-

дует различать при сжатии $[\sigma_c] = \frac{\sigma_{0,2c}}{[n]}$ и растяжении $[\sigma_p] = \frac{\sigma_{0,2p}}{[n]}$. Хрупкие материалы в три-четыре

раза лучше работают на сжатие, чем на растяжение. У них отсутствует пластическая деформация, поэтому предельными напряжениями для них является предел прочности. Допускаемые напря-

жения при сжатии равны $[\sigma_c] = \frac{\sigma_{вс}}{[n]}$, при растяжении $[\sigma_p] = \frac{\sigma_{0,2p}}{[n]}$. Нормативный коэффициент запаса прочности $[n]$ зависит от точности определяемых нагрузок, применяемых методов расчетов, степени однородности применяемых материалов, вида механической обработки и ответственности детали. В каждой области техники сложились свои методики назначения нормативных коэффициентов. В рамках применяемых материалов нормативный коэффициент запаса прочности для пластичных материалов лежит в пределах $[n] = 1,4 \dots 2$, для хрупко-пластичных $[n] = 1,6 \dots 2,5$, для хрупких $[n] = 2 \dots 3$.

Уметь записать условие прочности на растяжение (сжатие), знать методику расчета стержней на прочность с учетом собственного веса.

При изучении деформации растяжение (сжатие) необходимо уметь записать условие прочности, которое формулируется в виде выражения: максимальные нормальные расчетные напряжения в поперечных сечениях бруса должны быть меньше или равны допускаемым нормальным

напряжениям $\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq [\sigma]$. С помощью этой формулы выполняют три вида расчетов на прочность:

- 1) проверочный расчет на прочность $\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq [\sigma]$;

- 2) проектный расчет на прочность или определение поперечных размеров стержня:

$$A \geq \frac{N_{max}}{[\sigma]}$$

- 3) определение допустимой нагрузки $N_{max} \leq [\sigma] \cdot A$.

При изучении явлений упругого последствия, ползучести, релаксации напряжений, влияния химического состава и температуры на механические свойства стали следует прежде всего понять физическую сущность этих явлений.

Надо знать, что в ряде случаев необходимые для расчета бруса усилия невозможно найти только из уравнения равновесия статики. Такие задачи называют статически неопределенными. При решении таких задач составляют дополнительные уравнения из условий совместности деформаций.

Вопросы для самопроверки:

1. Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечных сечениях стержня при осевом растяжении (сжатии)?

2. Объяснить на примере построения эпюры продольных сил.

3. Что такое продольная и поперечная деформации стержня, какова зависимость между ними?

4. По какой формуле вычисляется величина напряжений в поперечном сечении стержня?

5. Сформулировать закон Гука и привести формулу, выражающую этот закон.

6. По какой формуле определяется удлинение (укорочение) участка стержня постоянного сечения при осевом растяжении (сжатии)?

7. Объяснить физический смысл модуля продольной упругости и коэффициента поперечной деформации (Пуассона).

8. Объяснить диаграмму растяжения малоуглеродистой стали и ее характерные точки.

9. Как определяются условные и истинные напряжения?

10. Какое напряжение называют допустимым и как оно определяется для пластичных и хрупких материалов?

11. Какие напряжения считаются предельными для пластичных и хрупких материалов?

12. Сформулировать и записать в математической форме условие прочности при расчетах на растяжение (сжатие).

13. Дать определение статически определимых и статически неопределимых конструкций.

14. Как составляются дополнительные уравнения для статически неопределимых конструкций?

15. Как определить температурные напряжения в статически неопределимых конструкциях?

16. Как определяются продольные силы, напряжения и площади сечения в стержнях с учетом собственного веса?

17. Объяснить влияние химического состава и температуры на механические свойства стали.

18. Как определяется потенциальная энергия упругой деформации при растяжении (сжатии)?

19. Как определить полную и удельную работу деформации с помощью диаграммы растяжения стали?

20. По каким формулам определяются нормальные и касательные напряжения, возникающие на наклонных площадках при осевом растяжении (сжатии)?

3. Сложное напряженное состояние.

В этой теме следует усвоить понятие напряженного состояния в данной точке тела, а это совокупность нормальных и касательных напряжений для множества площадок, проходящих через заданную точку тела. Если выделить элементарный объем в виде куба вокруг точки тела, на которое действуют внешние силы, для которой известны истинные напряжения на трех взаимно-перпендикулярных площадках куба, то, разложив истинные напряжения на нормальные и касательные напряжения, получим картину действия напряжений при сложном напряженном состоянии (рис. 7).

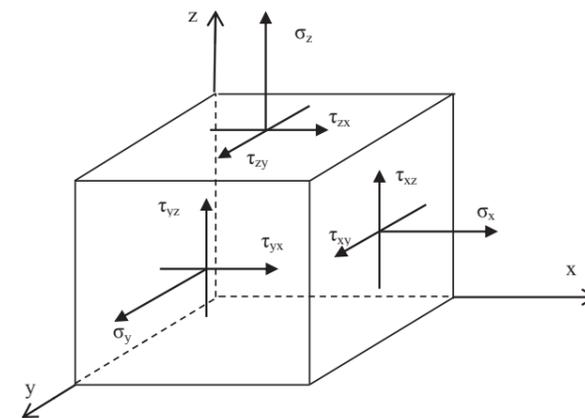


Рис. 7. Схема напряженного состояния в точке

Нормальные напряжения имеют один индекс, который показывает, какой оси перпендикулярна площадка, на которой действует данное нормальное напряжение. Знак нормального напряжения положителен, если напряжение – растягивающее и изображается направленным от площадки, знак отрицателен, если напряжение сжимающее, направление напряжения к площадке.

Касательное напряжение имеет два индекса. Первый индекс показывает, какой оси перпендикулярна площадка, на которой действует данное касательное напряжение. Вторым индексом показывает, какой оси параллельно само касательное напряжение. Знак касательного напряжения считается положительным, если оно вращает выделенный элемент по часовой стрелке, и отрицателен, если вращает против часовой стрелки. Необходимо уяснить, что выделенный элемент будет находиться в состоянии равновесия под действием сил, только в том случае если выполняется закон парности касательных напряжений (касательные напряжения, действующие на взаимно-перпендикулярных площадках, должны быть равны друг другу и направлены к общему ребру либо от ребра: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$; $\tau_{zy} = \tau_{yz}$; $\tau_{xz} = \tau_{zx}$).

Из множества площадок, проведенных через заданную точку, найдется три взаимно-перпендикулярных площадки, на которых будут действовать только нормальные напряжения, а касательные напряжения будут равны нулю. Такие площадки называются главными площадками, а нормальные напряжения – главными напряжениями. Эти напряжения являются экстремальными, и

в порядке возрастания значения напряжений им присваивается индекс $\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1$, причем $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. В зависимости от того, сколько главных напряжений отлично от нуля, напряженное состояние делится на объемное или трехосное ($\sigma_3; \sigma_2; \sigma_1 \neq 0$, рис. 8, а), плоское или двухосное, при котором хотя бы одно главное напряжение равно нулю ($\sigma_3 = 0; \sigma_1; \sigma_2 \neq 0$, рис. 8, в) и линейное, одноосное, когда два главных напряжения равны нулю ($\sigma_1 \neq 0; \sigma_2 = \sigma_3 = 0$, рис. 8, с).

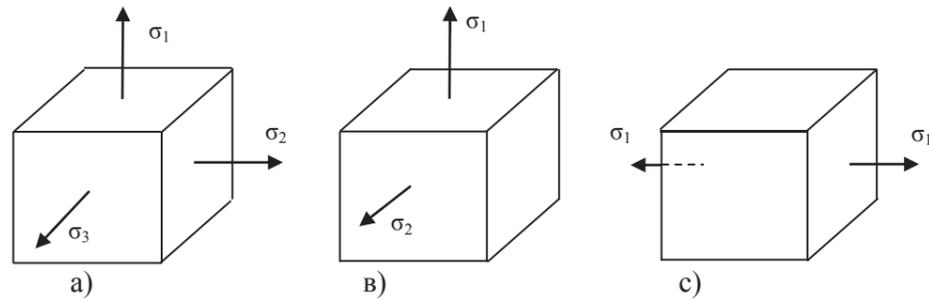


Рис. 8. Виды напряженного состояния

Из множества площадок, проведенных через заданную точку, найдется три взаимно-перпендикулярных площадки, на которых будут действовать только касательные напряжения, а нормальные напряжения будут равны нулю. Такие площадки называются площадками сдвига, а касательные напряжения – главными напряжениями сдвига. На рисунке 9 показано объемное напряженное состояние, заданное главными напряжениями сдвига. Главные напряжения сдвига будут подчиняться закону парности касательных напряжений.

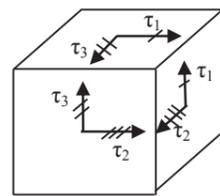


Рис. 9. Площадки сдвига и главные напряжения сдвига при объемном напряженном состоянии

Нужно освоить вывод формул, по которым определяются напряжения на наклонных площадках при плоском напряженном состоянии. Конечный вид этих формул для наклонной площадки (рис. 10) будет таким:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau \cos 2\alpha$$

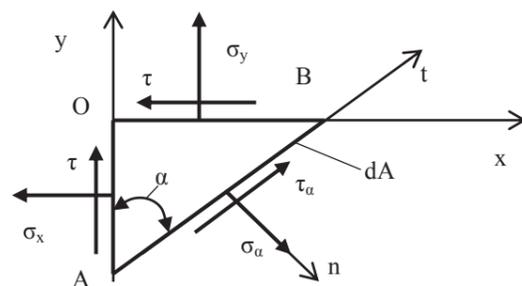


Рис. 10. Схема для определения напряжений в наклонной площадке при плоском напряженном состоянии

С помощью приведенных формул после их преобразования можно определить положение главных площадок по формуле: $\text{tg } 2\alpha_0 = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}$ и значение экстремальных нормальных напряжений, действующих на этих площадках: $\sigma_{\min}^{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}$. Здесь α_0 – это угол

меньше 45° , на который необходимо повернуть площадку, параллельную оси x против часовой стрелки, если угол $\alpha_0 > 0$, и по часовой стрелке, если угол $\alpha_0 < 0$ (рис. 11, а). Для присвоения индекса главным напряжениям экстремальные напряжения σ_{\min}^{\max} сравниваются с главным напряжением $\sigma = 0$, и им присваивается индекс в порядке убывания значения $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Также можно определить положение площадок сдвига $\text{tg } 2\alpha_1 = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau}$ и значение экстремальных касательных напряжений $\tau_{\min}^{\max} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}$. Здесь α_1 – это угол меньше 45° ,

на который необходимо повернуть площадку, параллельную оси x , против часовой стрелки, если угол $\alpha_1 > 0$, и по часовой стрелке, если угол $\alpha_1 < 0$ (рис. 11, б).

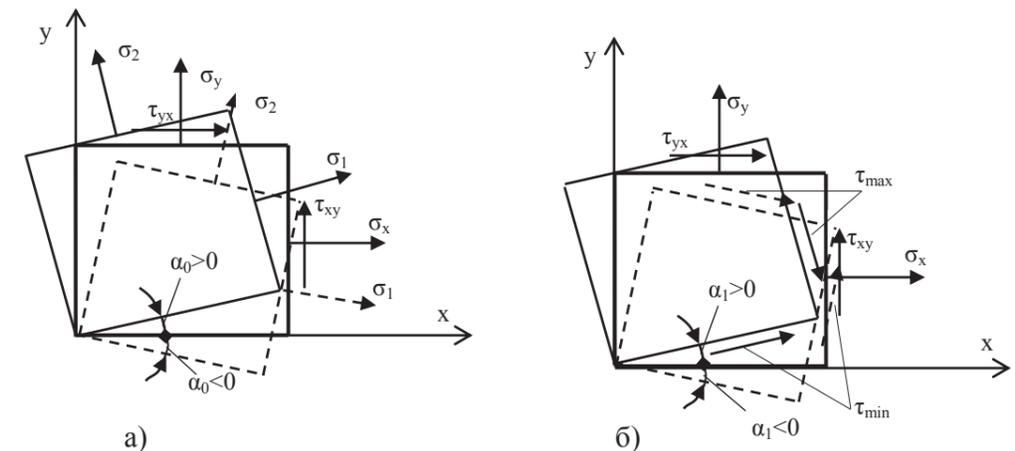


Рис. 11. Схемы определения (а) главных площадок и (б) площадок сдвига

Направление экстремальных касательных напряжений идет от σ_{\min} к σ_{\max} . Для проверки правильности расчетов используют соотношения, сумма углов $\alpha_0 + \alpha_1 = 45^\circ$, и $\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{\max} + \sigma_{\min}$, либо строят круг Мора.

В теории сложного напряженного состояния в точке решаются две основные задачи.

Первая задача сводится к определению по известным нормальным и касательным напряжениям действующих на двух взаимно перпендикулярных площадках главных нормальных напряжений σ_{\min}^{\max} , экстремальных касательных напряжений τ_{\min}^{\max} и положения главных площадок и площадок сдвига.

Вторая задача состоит в определении для заданной площадки, наклоненной под углом α к главным площадкам, по известным главным напряжениям $\sigma_1 = \sigma_{\max}$, $\sigma_3 = \sigma_{\min}$ нормальных и касательных напряжений $\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha$; $\sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_3 \cos^2 \alpha$ и касательных напряжений $\tau_\alpha = \tau_\beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha$. Круг Мора (круг напряжений) позволяет решать первую и вторую задачи или может применяться для проверки правильности решения этих задач.

Построение круга Мора для первой задачи. Для заданного напряженного состояния (рис. 12, а) берется система координат. По оси абсцисс откладываются нормальные напряжения σ_x, σ_y , а по оси ординат касательные напряжения τ_{xy}, τ_{yx} (рис. 12, б) с учетом их знаков. На пересечении координат σ_x и τ_{xy} получаем точку А, через которую проводим вертикальную площадку, по которой

действуют эти напряжения. На пересечении координат σ_y и τ_{yx} получаем точку В и проводим горизонтальную площадку. Соединяем точки А и В и на пересечении с осью σ получаем центр окружности и проводим круг Мора. На продолжении линий исходных площадок на круге Мора получим точку С, которая называется полюсом. Координаты точек круга Мора соответствуют нормальным и касательным напряжениям на различных площадках. Для определения положения главных площадок соединяем полюс С с точками, где круг Мора пересекает ось σ , тогда линии, соединяющие полюс с точками пересечения круга с осью σ , показывают положение главных площадок. Угол α_0 – это угол между площадкой, где действуют напряжения σ_x и τ_{xy} , и главной площадкой (рис. 12, б). Значение главных напряжений – это абсциссы пересечения круга Мора с осью σ . Для определения положения главных площадок сдвига соединяем полюс С с точками, где круг Мора пересекает вертикальную линию, проведенную через центр круга, тогда линии, соединяющие полюс с точками пересечения, показывают положение площадок сдвига (пунктирные линии на рис. 12, б). Угол α_1 – это угол между площадкой, где действуют напряжения σ_x и τ_{xy} , и площадкой сдвига (рис. 12, б). Значение экстремальных касательных напряжений – это ординаты пересечения круга с вертикальной линией. Сумма углов $\alpha_0 + \alpha_1 = 45^\circ$.

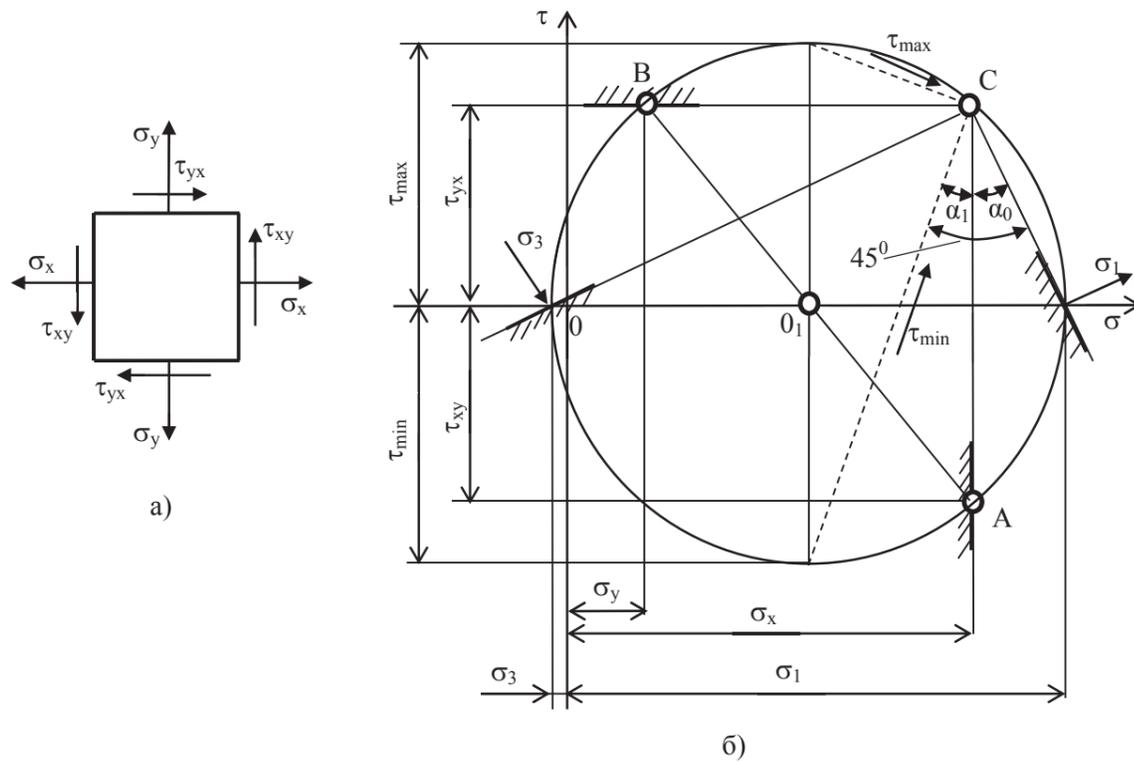


Рис. 12. Схема плоского напряженного состояния а) и круг Мора б)

Построение круга Мора для второй задачи. Для заданного напряженного состояния (рис. 13, а) берется система координат как в первой задаче. По оси абсцисс откладываются главные напряжения σ_1, σ_3 . Расстояние между ними делится пополам, что определяет центр круга Мора, и проводится окружность.

Откладываем от оси σ из центра O_1 луч под углом 2α (при $\alpha > 0$, откладываем против часовой стрелки, при $\alpha < 0$, откладываем по часовой стрелке), находим точку D, координаты которой: $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$.

Нужно знать вывод формул обобщенного закона Гука при сложном напряженном состоянии, который связывает главные деформации ϵ с главными напряжениями σ .

$$\begin{cases} \epsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \epsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \epsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{cases}$$

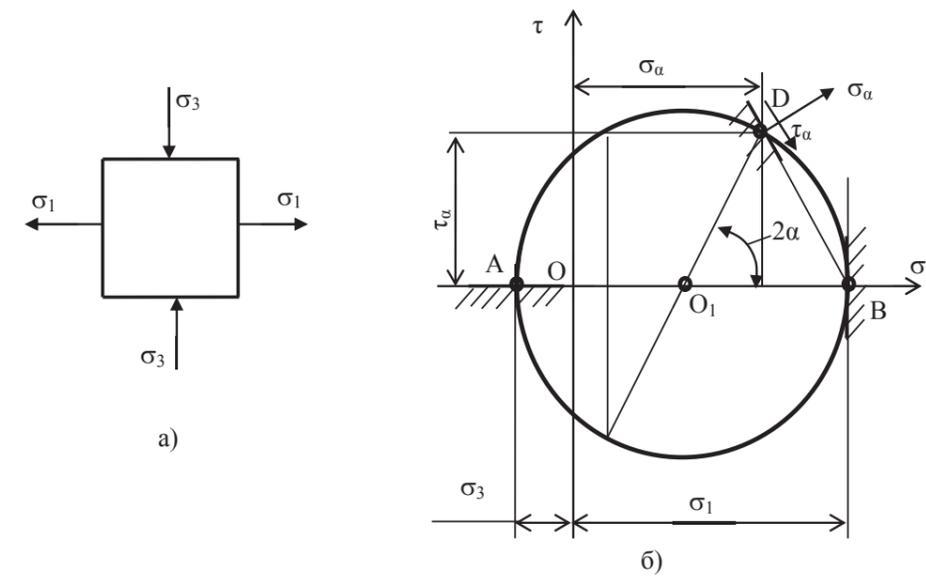


Рис. 13. Схема плоского напряженного состояния (а) и круг Мора при решении второй задачи (б)

Аналогичные уравнения можно написать для общего случая объемного напряженного состояния, когда на гранях выделенного элемента действуют нормальные и касательные напряжения:

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{cases}$$

В формулы не входят касательные напряжения, так как они не влияют на изменение объема, а влияют на изменение формы.

Относительное изменение объема определяется суммой главных деформаций:

$$v = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \text{ а для произвольно ориентированных площадок}$$

$$v = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

Для случая объемного напряженного состояния удельная потенциальная энергия деформации определяется как полусумма слагаемых трех произведений главных напряжений на главные деформации:

$$u = \frac{(\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3)}{2E} = \frac{[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3)]}{2E}.$$

Удельную потенциальную энергию деформации u условно можно разделить на удельную потенциальную энергию изменения объема u_0 и удельную потенциальную энергию изменения формы u_ϕ . Тогда $u = u_0 + u_\phi$, где удельная потенциальная энергия изменения объема будет равна:

$$u_0 = \frac{1 - 2\mu}{6E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2),$$

а удельная потенциальная энергия изменения формы:

$$u_\phi = \frac{1 + \mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1).$$

Вопросы для самопроверки:

1. Дать определение напряженного состояния в данной точке твердого тела.
2. Привести схему напряженного состояния, когда по граням элемента действуют и нормальные, и касательные напряжения.
3. Дать определение главных напряжений и порядок их индексации.
4. Привести схемы одноосного, двухосного и трехосного видов напряженного состояния.
5. Привести формулы для определения σ_a и τ_a при плоском напряженном состоянии.
6. Пояснить на примере графический способ Мора для определения σ_a и τ_a при плоском напряженном состоянии и показать величину главных напряжений и экстремальных касательных напряжений.
7. Привести формулы записи обобщенного закона Гука для плоского и объемного напряженного состояний.
8. Привести формулу для относительного изменения объема при объемном напряженном состоянии.

4. Теории прочности.

При изучении этой темы важно уяснить, что в общем случае опасное напряженное состояние элемента конструкции зависит от соотношения между тремя главными напряжениями ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$). То есть для каждого соотношения нужно экспериментально определять величину предельного напряжения, при котором произойдет разрушение или пластическая деформация образца, что нереально. Поэтому прочность при сложном напряженном состоянии оценивается по уже известным механическим характеристикам, полученным на основе испытаний на растяжение (сжатие). Теории, отвечающие этим задачам, получили название теорий прочности. Смысл теорий прочности заключается в замене сложного напряженного состояния, заданного главными напряжениями $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, эквивалентным линейным напряженным состоянием, а эквивалентные напряжения сравниваем с допустимыми напряжениями (рис. 14).

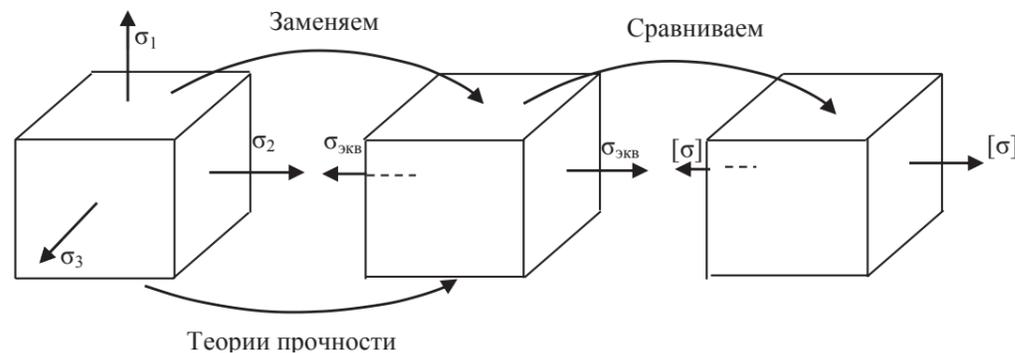


Рис. 14. Последовательность действий при использовании теорий прочности

В качестве эквивалентных напряжений $\sigma_{экв}$ приняты такие растягивающие напряжения, которые необходимо создать в растянутом образце, чтобы его состояние было равноопасно заданному напряженному состоянию. Условие прочности оценивается как $\sigma_{экв} \leq [\sigma]$. При сложном напряженном состоянии приняты критерии разрушения и пластичности. Коэффициент запаса прочности для хрупких материалов $n = \frac{\sigma_{вр}}{\sigma_{экв}}$, коэффициент запаса прочности для пластичных материалов $n = \frac{\sigma_{тр}}{\sigma_{экв}}$.

Первая теория прочности (теория наибольших нормальных напряжений) названа так потому, что предельное состояние материала наступает тогда, когда наибольшие нормальные напряжения достигают предельного значения при линейном напряженном состоянии $\sigma_{экв} = \sigma_1 \leq [\sigma]$. Главным недостатком является то, что не учитываются два других главных напряжения. Теория подтверждается экспериментально только при растяжении весьма хрупких материалов (стекло, гипс) и в настоящее время практически не применяется.

Вторая теория прочности (теория наибольших относительных деформаций) базируется на том,

что в качестве критерия прочности принимаются напряжения, соответствующие наибольшей линейной деформации $\epsilon_{max} = \epsilon_1 \leq [\sigma]$. Учитывая, что $\epsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$, получаем условие прочности $\sigma_{экв} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$. Вторая теория прочности используется редко, только для хрупких материалов (бетон, камень).

Третья теория прочности (теория наибольших касательных напряжений) основана на предположении, что причиной наступления предельного напряженного состояния являются наибольшие касательные напряжения. Два напряженных состояния равноопасны, если имеется равенство касательных напряжений при линейном и сложном напряженном состоянии. При линейном напряженном состоянии $\tau_{max} = \frac{\sigma_{экв}}{2}$, при сложном напряженном состоянии $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$. Условие проч-

ности $\tau_{max} \leq [\tau]$. Откуда прочность по третьей теории прочности $\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$. При плоском напряженном состоянии эта теория записывается через исходные напряжения, действующие на

гранях выделенного элемента как $\sigma_{эквIII} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$. Теория хорошо описывает

экспериментальные данные и сейчас достаточно широко применяется для пластичных материалов.

Четвертая теория прочности (энергетическая теория) основана на том, что переход материала к предельному состоянию связан с уровнем накопленной в нем удельной потенциальной энергии формоизменения $u_\phi \leq [u_\phi]$. Эквивалентные напряжения по четвертой теории прочности равны:

$$\sigma_{эквIV} = \sqrt{0,5[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma].$$

Теория прочности учитывает все три главных напряжения. При плоском напряженном состоянии энергетическая теория прочности записывается через исходные напряжения

$\sigma_{эквIV} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$. Теория достаточно широко используется для оценки проч-

ности пластичных материалов.

Теория прочности Мора основана на предположении, что главное напряжение σ_2 не влияет на прочность при сложном напряженном состоянии и учитывает неодинаковость работы материала на растяжение и сжатие. Эквивалентные напряжения определяются по формуле

$$\sigma_{эквM} = \sigma_1 - \frac{[\sigma]_p}{[\sigma]_c} \cdot \sigma_3 \leq [\sigma].$$

Используется при расчетах хрупких материалов, у которых допу-

скаемые напряжения на растяжение $[\sigma]_p$ и сжатие $[\sigma]_c$ не одинаковы.

Для пластичных материалов $[\sigma]_p = [\sigma]_c$ теория Мора превращается в третью теорию прочности.

Вопросы для самопроверки:

1. Привести краткие сведения о теории наибольших касательных напряжений и формулу для определения $\sigma_{экв}$ по этой теории.
2. Привести краткие сведения о теории прочности Мора и формулу для определения $\sigma_{экв}$ по этой теории.
3. Привести краткие сведения об энергетической теории и формулу для определения $\sigma_{экв}$ по этой теории.
4. Привести краткие сведения о современных теориях прочности.
5. Пояснить области применения различных теорий прочности.

5. Сдвиг.

Необходимо уяснить определение чистого сдвига, под которым понимается такой случай плоского напряженного состояния, когда на гранях выделенного элемента действуют только касательные напряжения τ , а нормальные напряжения σ равны нулю (рис. 15, а). Касательные напряжения являются экстремальными.

Главные площадки наклонены к направлению площадок чистого сдвига под углом $\alpha = 45^\circ$ (рис. 15, б), а главные напряжения на них равны по величине и противоположны по знаку $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$.

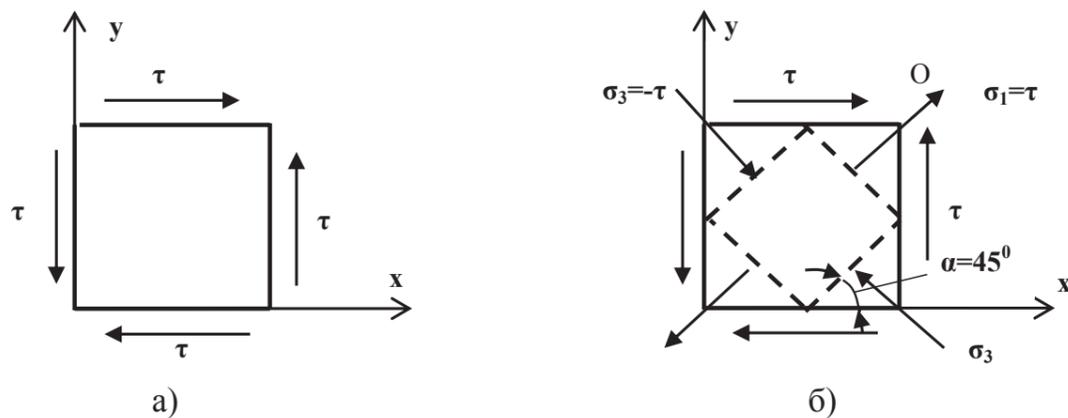


Рис. 15. Чистый сдвиг по площадкам сдвига (а) и по главным площадкам (б)

То есть под чистым сдвигом можно понимать такой случай плоского напряженного состояния, когда на главных площадках действуют одинаковые по величине и противоположные по знаку главные напряжения.

Касательные напряжения определяются по формуле $\tau = \frac{Q}{A}$, где Q – поперечная сила, действующая вдоль грани, A – площадь грани. При деформации элемента, ограниченного площадками чистого сдвига, квадрат превращается в ромб, происходит изменение формы без изменения линейных размеров (рис. 16). $tq\varphi \approx \varphi = \frac{\delta}{a} \approx \gamma$, где δ – линейное перемещение, φ – угол сдвига, γ – относительный сдвиг. При чистом сдвиге угол сдвига φ равен относительному сдвигу γ . Круг Мора при чистом сдвиге представлен на рисунке 16, б.

При чистом сдвиге между касательными напряжениями τ и относительным сдвигом γ существует прямо пропорциональная зависимость, называемая законом Гука $\tau = G\gamma$, где G – модуль сдвига или модуль упругости второго рода, характеризует жесткость материала, то есть способность материала сопротивляться деформации сдвига, измеряется в МПа. Для стали $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Между модулем сдвига и модулем продольной упругости E существует зависимость $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$, которая называется связью между тремя постоянными.

Удельная потенциальная энергия деформации при сдвиге определяется по формуле: $u = \frac{\tau^2}{2G}$.

Вся потенциальная энергия при чистом сдвиге расходуется только на изменение формы, изменение объема при деформации сдвига равно нулю.

Необходимо рассмотреть примеры практического применения теории сдвига в расчетах на срез заклепочных, шпоночных, штифтовых и других видов соединений, при которых конечная стадия деформации сдвига характеризуется срезом и смятием (рис. 17). Следует усвоить допущения, положенные в основу этого расчета.

Нужно уяснить, что срез вызывается двумя близко расположенными друг к другу силами, направленными в противоположные стороны и перпендикулярно оси срезаемого элемента конструкции. Смятие – это местная деформация сжатия по площадкам передачи давления от одного элемента конструкции к другому. Считается, что касательные напряжения в плоскости среза распределены равномерно, а нормальные напряжения смятия действуют перпендикулярно поверхности смятия. За площадь смятия криволинейной поверхности принимается проекция этой поверхности на плоскость, перпендикулярную линии действия внешней силы. Для нормальной работоспособности таких конструкций необходимо одновременное выполнение условий прочности на срез и смятие, которые записываются в виде:

$$\begin{cases} \tau_{ср} = \frac{4F}{\pi d_3^2 \cdot mn} \leq [\tau_{ср}] \\ \sigma_{см} = \frac{F}{d_3 \delta n} \leq [\sigma_{см}], \end{cases}$$

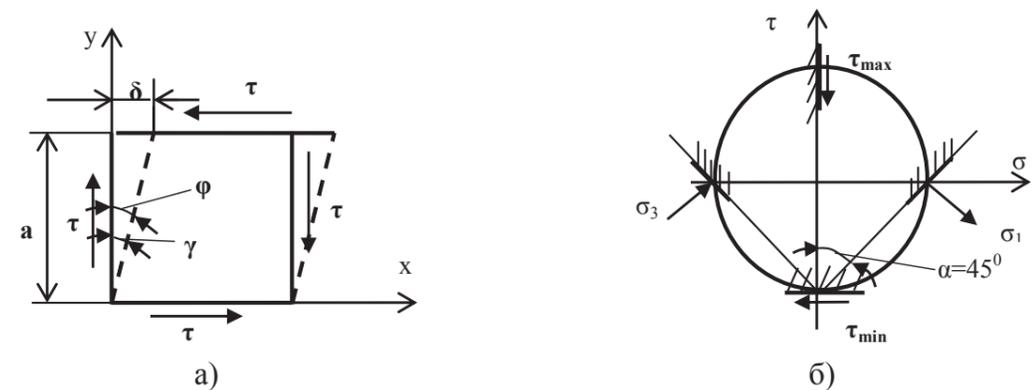


Рис. 16. Схема деформации при чистом сдвиге (а) и круг Мора при чистом сдвиге (б)

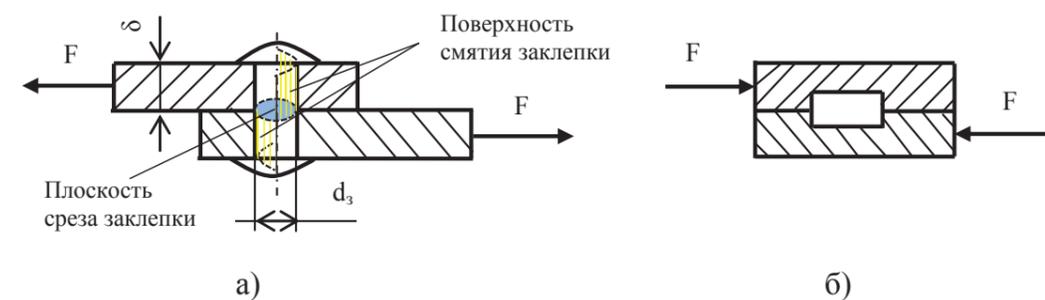


Рис. 17. Заклепочное (а) и шпоночное соединения (б)

где m – количество плоскостей среза, n – количество заклепок, δ – толщина соединяемых листов, которая берется минимальной, приходящей на внешнюю силу. Допустимые напряжения на срез принимают равными $[\tau_{ср}] = 0,5 \dots 0,55 [\sigma_p]$, допустимые напряжения смятия $[\sigma_{см}] = 1,8 \dots 2,2 [\sigma_p]$.

Сварочные соединения выполняются встык и нахлестку с помощью валиковых угловых швов. В зависимости от расположения сварочные швы делятся на лобовые (сварочный шов перпендикулярен линии действия силы), фланговые (сварочный шов параллелен линии действия силы) и косые (сварочный шов направлен под углом к линии действия силы). Сварочные соединения, выполненные внахлестку (рис. 18), рассчитываются на прочность по касательным напряжениям среза. За плоскость среза принимается плоскость, расположенная под углом 45° к плоскости соединяемых пластин.

Условие прочности сварочного соединения, выполненного внахлестку, записывается в виде:

$$\tau_{св} = \frac{F}{A_{св}} = \frac{F}{0,7\delta l_{св}} \leq [\tau_{св}], \text{ где } \delta - \text{толщина соединяемого листа, } l_{св} - \text{суммарная длина сварочных швов.}$$

Складывается из длины лобовых и фланговых швов. Величина допускаемых касательных напряжений в сварочном шве принимается $[\tau_{св}] = 0,5 \dots 0,55 [\sigma]$.

Сварочное соединение, выполненное встык, рассчитывается по нормальным напряжениям, так как испытывает напряжение растяжения (рис. 19). Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{св} = \frac{F}{A_{св}} = \frac{F}{\delta B} \leq [\sigma_{св}].$$

Следует учитывать, что вследствие перегрева металла (роста зерна аустенита) в районе сварочного шва его прочность снижается на 15...20%. Для обеспечения равнопрочности сварочного соединения сварочный шов для стыкового соединения выполняют косым под углом $\alpha = 50 \dots 55^\circ$.

Вопросы для самопроверки:

1. Дать определение напряженного состояния чистого сдвига.
2. Дать определение деформациям абсолютного и относительного сдвига.
3. Составить условие прочности при расчетах заклепок на срез.

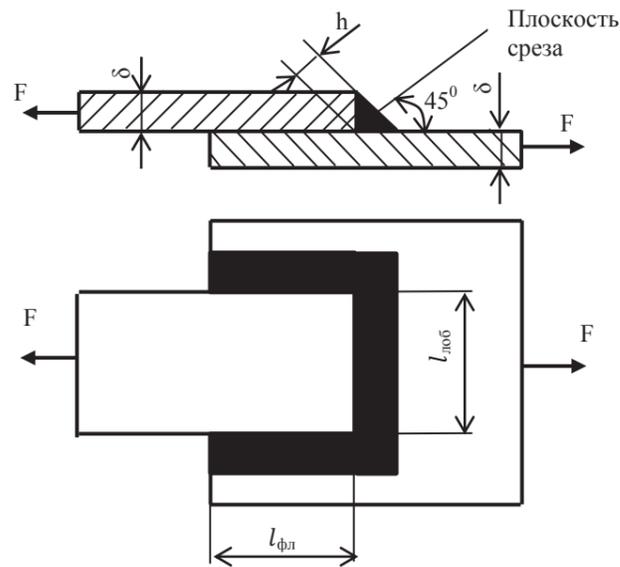


Рис. 18. Сварочное соединение, выполненное внахлестку

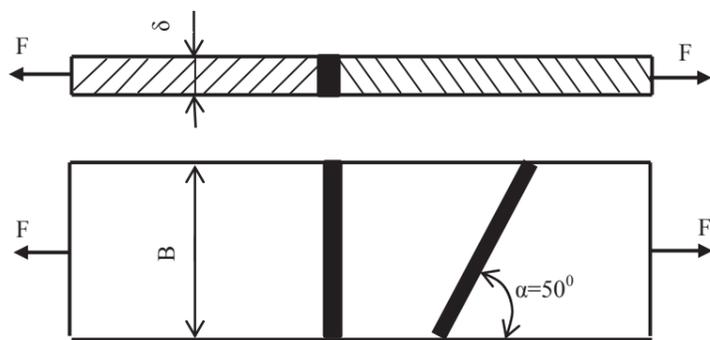


Рис. 19. Сварочное соединение, выполненное встык

4. Составить условие прочности при расчетах заклепок на смятие.
5. Как определить площадь среза и площадь смятия?
6. Сформулировать закон Гука при сдвиге. Каков физический смысл модуля сдвига?
7. Какова взаимосвязь между модулем продольной упругости и модулем сдвига?
8. Записать условие прочности для заклепочного соединения. Какие виды расчетов на прочность выполняют для заклепочных соединений?
9. Составить условие прочности при расчетах на срез сварных соединений.
10. Как определить площадь среза сварного шва?

6. Геометрические характеристики плоских сечений.

В этом разделе нужно повторить известные из теоретической механики формулы для определения статических моментов сечения плоских фигур и правила определения центров тяжести плоских фигур.

При растяжении (сжатии) стержня нормальные напряжения равномерно распределены по поперечному сечению. Поэтому нормальные напряжения определяются отношением внутренней продольной силы к площади поперечного сечения стержня и не зависят от формы поперечного сечения.

При кручении и изгибе стержней напряжения в точках поперечного сечения зависят как от размеров, так и от формы тела. Размеры и форма поперечных сечений определяют значения та-

ких геометрических характеристик, как статический момент сечения, осевые, полярный, центральный моменты инерции сечения и моменты сопротивления сечения.

Статическим моментом сечения S относительно какой-либо оси называется геометрическая характеристика, определяемая интегралом вида $S_x = \int_A y \cdot dA$, или это сумма произведений площадей элементарных площадок на расстояния их до оси (рис. 20), где y – расстояние от элементарной площадки dA до оси Ox .

Статический момент может быть положительным, отрицательным и равным нулю.

Если отождествить элементарную площадь с силой, действующей перпендикулярно плоскости чертежа, то интеграл можно рассматривать как сумму моментов сил относительно оси Ox .

По известной из теоретической механики теореме о моменте равнодействующей можно записать:

$$S_x = \int_A y \cdot dA = A \cdot y_c,$$

где A – площадь всей фигуры (равнодействующая), y_c – расстояние от центра тяжести фигуры до оси Ox .

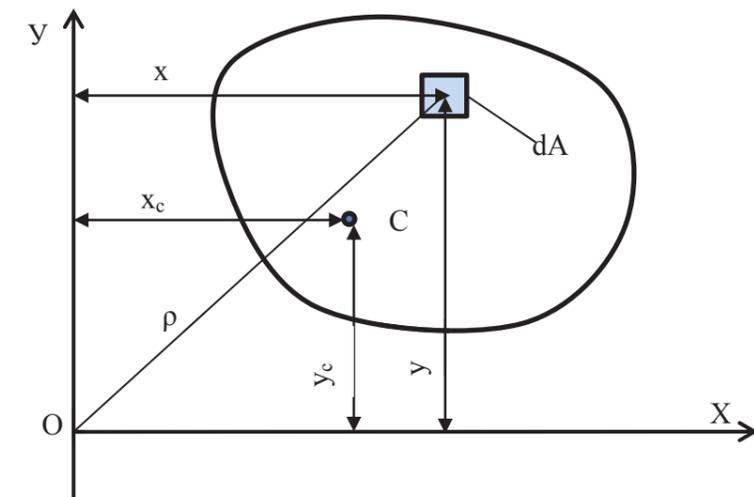


Рис. 20. Схема для определения геометрических характеристик поперечных сечений

Координаты центра тяжести: $y_c = \frac{S_x}{A}$; $x_c = \frac{S_y}{A}$.

Центр тяжести обладает свойством, что если тело опереть в этой точке, то оно будет находиться в равновесии.

Из формул $y_c = \frac{S_x}{A}$; $x_c = \frac{S_y}{A}$ следует, что если центр тяжести лежит на оси, то статический момент равен нулю. Такие оси называются центральными осями.

Если фигуру можно представить в виде отдельных простых фигур (квадратов, треугольников и т. д.), для которых известно положение центра тяжести, то в этом случае статический момент всей фигуры можно получить как сумму статических моментов этих простых фигур, а координаты центра тяжести определяются по формулам:

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{A_1 \cdot x_{c1} + A_2 \cdot x_{c2} + A_3 \cdot x_{c3} + \dots + A_n \cdot x_{cn}}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n},$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{A_1 \cdot y_{c1} + A_2 \cdot y_{c2} + A_3 \cdot y_{c3} + \dots + A_n \cdot y_{cn}}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n}.$$

Осевым или экваториальным моментом инерции сечения называется сумма произведений площади элементарных площадок на квадрат расстояния их до оси или геометрическая харак-

теристика, определяемая интегралом вида $I_x = \int_A y^2 dA$ относительно оси x ; $I_y = \int_A x^2 dA$ относительно оси y .

Полярным моментом инерции сечения называется сумма произведений площади элементарных площадок на квадрат расстояния до точки (полюса) или геометрическая характеристика, определяемая интегралом вида:

$$I_p = \int_A \rho^2 dA.$$

Осевой и полярный моменты инерции всегда положительны.

Центробежным моментом инерции I_{xy} называется сумма произведений площадей элементарных площадок на расстояния их до осей x и y или геометрическая характеристика, определяемая интегралом вида:

$$I_{xy} = \int_A xy dA.$$

Если взаимно перпендикулярные оси x и y или одна из них являются осями симметрии фигуры, то относительно таких осей центробежный момент инерции равен нулю.

Полярный момент инерции относительно какой-либо точки равен сумме осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей, проходящих через заданную точку (полюс). Из рисунка 20 можно записать $\rho^2 = x^2 + y^2$. Тогда

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_x + I_y.$$

При определении момента инерции фигуры относительно какой-либо оси x_1 , которая параллельна центральной оси x_0 и для которой известны моменты инерции (рис. 21) при $y_1 = y_0 + a$.

Осевой момент инерции относительно оси x_1 равен:

$$I_{x1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y_0 + a)^2 dA = \int_A y_0^2 dA + \int_A 2y_0 a \cdot dA + \int_A a^2 dA = I_{x0} + a^2 A.$$

Осевой момент инерции относительно любой оси равен осевому моменту инерции относительно центральной оси, параллельно данной, плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между осями. Момент инерции относительно центральной оси всегда меньше, чем момент инерции относительно нецентральной оси.

Центробежный момент инерции относительно параллельной оси равен:

$$I_{x_1 y_1} = I_{x_0 y_0} + ab \cdot A.$$

При повороте осей зависимость (рис. 22) между моментами инерции записывается в виде:

$$I_{x1} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha; \quad I_{y1} = I_y \cos^2 \alpha + I_x \sin^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha;$$

$$I_{x_1 y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha.$$

При угле $\alpha > 0$ переход от старой системы координат к новой происходит против часовой стрелки. Осевые моменты инерции для старой и новой системы координат должны удовлетворять равенству: $J_{y1} + J_{x1} = J_y + J_x$.

Оси, проходящие через центр тяжести, называются главными осями инерции. Экстремальные (максимальное и минимальное) значения моментов инерции называются главными моментами инерции. Оси, относительно которых осевые моменты инерции имеют экстремальные значения, называются главными центральными осями инерции. Главные оси инерции взаимно перпендикулярны. Центробежные моменты инерции относительно главных осей равны нулю. Если одна из осей совпадает или обе совпадают с осью симметрии, то они главные центральные оси инерции.

Конечной целью вычисления геометрических характеристик сечения является определение значения главных моментов инерции и положения главных центральных осей инерции, так как при расположении плоскости действия силовой нагрузки по направлению главных центральных

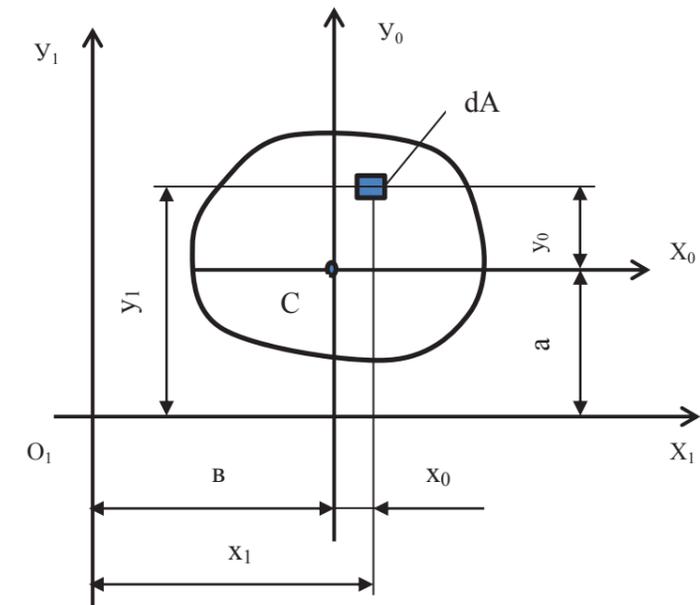


Рис. 21. Схема определения осевого момента инерции относительно параллельных осей

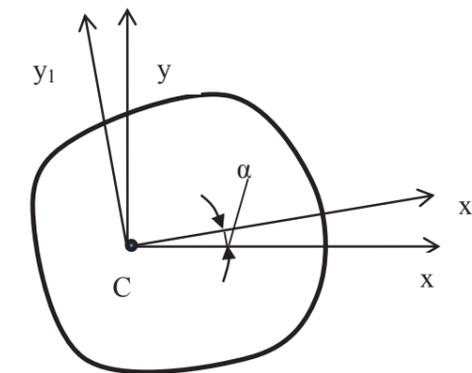


Рис. 22. Схема для определения моментов инерции при повороте осей

осей инерции будет происходить более рациональное использование материала.

Угол, определяющий положение главных центральных осей: $\tan 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x}$, если $\alpha_0 > 0$,

то исходные оси поворачиваются против часовой стрелки, если $\alpha_0 < 0$, то по часовой стрелке.

Ось максимума всегда составляет меньший угол с той из осей, относительно которой момент инерции имеет большее значение. Моменты инерции относительно главных центральных осей:

$$I_{max/min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 \cdot I_{xy}^2}.$$

При этом должно сохраняться равенство $J_{max} + J_{min} = J_x + J_y$.

Центробежный момент инерции относительно главных центральных осей инерции равен нулю.

В качестве характеристик поперечного сечения определяется радиус инерции

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \text{ и } i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}.$$

Эллипс, построенный на главных радиусах инерции как на полуосях, называется эллипсом инерции (рис. 23). При помощи эллипса инерции можно графически найти радиус инерции i_{x1} для любой оси x_1 . Для этого надо провести касательную к эллипсу, параллельную оси x_1 , и измерить расстояние от этой оси до касательной. Зная радиус инерции, можно найти момент инерции сечения относительно оси x_1 : $I_{x1} = A \cdot i_{x1}^2$. Для сечений, имеющих более двух осей сим-

метрии (например: круг, квадрат, кольцо и др.), осевые моменты инерции относительно всех центральных осей равны между собой, $J_{xy} = 0$, эллипс инерции обращается в круг инерции.

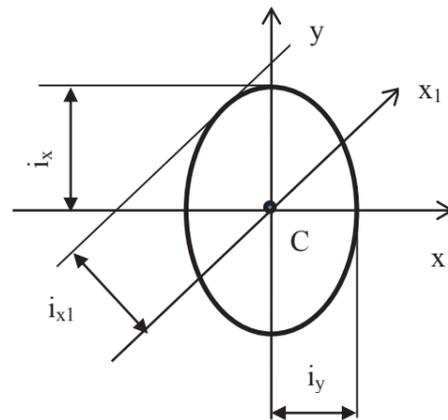


Рис. 23. Схема для определения радиусов инерции

Моменты сопротивления сечения W – это отношение момента инерции сечения к расстоянию до наиболее удаленной точки сечения.

Для осевого момента сопротивления – отношение момента инерции относительно оси к расстоянию от нее до наиболее удаленной точки сечения $W_x = \frac{I_x}{y_{max}}$ [M^3, CM^3].

Полярный момент сопротивления сечения – отношение полярного момента инерции к расстоянию от полюса до наиболее удаленной точки сечения $W_p = \frac{I_p}{\rho_{max}}$ [M^3, CM^3].

Геометрические характеристики сечения простых форм сечений вычисляются по формулам, сложных сечений определяются по таблицам, например для стандартных профилей находятся из таблиц сортамента для уголка, двутавра, швеллера и других.

Необходимо разобраться в выводе формул геометрических характеристик простых форм сечений.

Для прямоугольного сечения (рис. 24, а) с поперечными размерами B и H моменты инерции в конечном виде равны: $I_x = \frac{BH^3}{12}$; $I_y = \frac{HB^3}{12}$; $I_{x1} = \frac{BH^3}{3}$; $I_{y1} = \frac{HB^3}{3}$; $I_{x1y1} = \frac{B^2H^2}{4}$, моменты

сопротивления сечения: $W_x = \frac{I_x}{y_{max}} = \frac{I_x}{H/2} = \frac{BH^2}{6}$; $W_y = \frac{HB^2}{6}$.

Для круглого поперечного сечения (рис. 24, б) полярный момент инерции сечения равен:

$I_p = \frac{\pi D^4}{32} \approx 0,1D^4$, осевые моменты инерции $I_x = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi D^4}{64} \approx 0,05D^4$. Полярный мо-

мент сопротивления сечения равен: $W_p = \frac{I_p}{D/2} = \frac{\pi D^3}{16} \approx 0,2D^3$.

Для кольцевого поперечного сечения (рис. 24, в) при $\alpha = \frac{d}{D}$ полярный момент инерции сечения равен: $I_p^k = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1D^4(1 - \alpha^4)$, осевые моменты инерции

$I_x^k = I_y^k = \frac{I_p^k}{2} = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4) \approx 0,05D^4(1 - \alpha^4)$. Полярный момент сопротивления сечения

равен: $W_p^k = \frac{I_p^k}{D/2} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \approx 0,2D^3(1 - \alpha^4)$.

Для полукруглого поперечного сечения (рис. 24, г) осевые моменты инерции $I_{x1} = I_y = \frac{\pi}{8} R^4$; $I_x = 0,11R^4$, центробежный момент инерции $I_{xy} = 0$.

Для четверти круглого поперечного сечения (рис. 24, д) осевые моменты инерции $I_x = I_y = 0,055R^4$; $I_{x0} = 0,0714R^4$; $I_{y0} = 0,038R^4$; центробежный момент инерции $I_{xy} = \pm 0,0165R^4$.

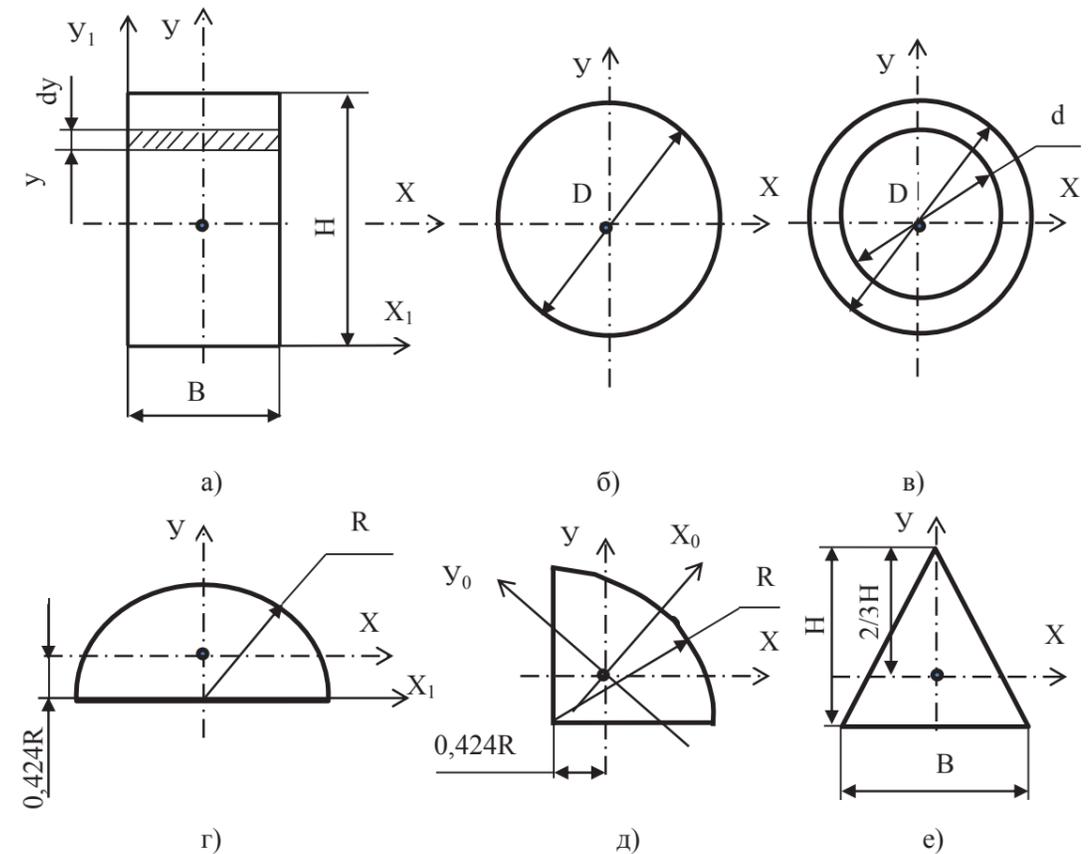


Рис. 24. Виды поперечных сечений

Для треугольного сечения (рис. 24, е) осевые моменты инерции $I_x = \frac{BH^3}{36}$, $I_y = \frac{HB^3}{48}$, центробежный момент инерции $I_{xy} = 0$.

Вопросы для самопроверки:

1. Дать определение статического момента сечения относительно произвольной оси, привести формулы для определения центра тяжести сечения сложной плоской фигуры.
2. Определить на примере центр тяжести сложной фигуры.
3. Привести определение осевого, полярного и центробежного моментов инерции сечения. Какова зависимость между осевым и полярным моментом инерции?
4. Что такое главные центральные оси инерции и главные моменты инерции?
5. Как определить положение главных центральных осей инерции для фигуры, имеющей одну ось симметрии и не имеющей ни одной оси симметрии?
6. Привести формулы для определения главного осевого момента инерции прямоугольника и круга.
7. Разобрать теорему о зависимости между осевыми моментами инерции относительно параллельных осей.

7. Кручение.

При изучении темы нужно усвоить допущения (гипотезы), лежащие в основе теории кручения стержней круглого поперечного сечения.

Кручением называется такой вид нагружения вала, при котором в поперечных сечениях возникает только один внутренний силовой фактор – крутящий момент M_k , а все остальные внутренние силовые факторы равны нулю.

Внешние моменты носят название вращающих, или скручивающих, моментов, а внутренний силовой фактор от них – крутящие моменты. Определение крутящих моментов производят на основании метода сечений.

Крутящий момент в произвольном сечении вала численно равен алгебраической сумме внешних вращающих (скручивающих) моментов, приложенных к оставшейся части вала после его мысленного рассечения на две части.

Знак крутящего момента не играет существенной роли в расчетах на прочность, но для удобства построения эпюры крутящих моментов M_k им присваивают знаки.

Крутящий момент M_k считается положительным, если при взгляде в торец оставшейся части вала он направлен против часовой стрелки, то есть алгебраическая сумма внешних вращающих (скручивающих) моментов, действующих на оставшуюся часть вала, направлена по часовой стрелке. Крутящий момент отрицателен, если он будет направлен по часовой стрелке, то есть сумма внешних вращающих (скручивающих) моментов направлена против часовой стрелки.

Изменение крутящих моментов удобно изображать в виде графика – эпюры крутящих моментов. Каждая ордината эпюры M_k в принятом масштабе равна крутящему моменту, действующему в этом поперечном сечении вала, которому соответствует эта ордината.

Эпюра M_k строится по участкам, границами которых являются сечения, где приложены внешние моменты и сечения, где изменяется площадь поперечного сечения вала. Составление уравнений равновесия при определении крутящего момента методом сечений реализуется двумя путями: введением местных координат или с помощью правила знаков для крутящего момента.

При составлении уравнения равновесия с помощью местных координат для произвольного сечения оставшейся части вала проводятся местные оси координат в пределах каждого участка. Причем ось z направляется от сечения и перпендикулярно поперечному сечению, оси x и y лежат в плоскости сечения. Крутящий момент в рассматриваемом сечении всегда проводится положительным, то есть направленным против часовой стрелки, и составляется условие статического равновесия для оставшейся части вала в виде $\sum M_z = 0$, из которого находится знак и значение внутреннего крутящего момента.

Пример: имеется вал, нагруженный внешними скручивающими моментами (рис. 25, а). Определим крутящие моменты методом местных координат и с помощью правила знаков.

1. Определим из уравнения равновесия реактивный момент в заделке:

$$\sum M_z = 0: -M_A - 5M + 3M + 5M - 5M - 2M = 0. \text{ Откуда } M_A = -5M + 3M + 5M - 2M = M.$$

2. Делим вал на участки. Границами участков являются сечения, где приложены внешние моменты и сечения, где изменяется площадь поперечного сечения вала. Проводим через границы участков вертикальные линии.

3. Присваиваем номер каждому участку. Если определены реакции связей (реакции опор), нумерацию участков можно вести как слева направо, так и справа налево. Если реакции связей не определены, то нумерацию участков следует вести со свободного конца вала.

4. Определим методом сечений крутящий момент на II участке методом местных координат. Для этого мысленно рассекаем второй участок. Отбрасываем одну из частей вала. Например, правую. Для оставшейся левой части (рис. 25, б) в рассматриваемом сечении проводим местную систему координат. Ось z направляем от сечения, оси x и y в плоскости сечения. Крутящий момент в рассматриваемом сечении M_k проводим положительным, то есть направленным против направления часовой стрелки.

5. Для оставшейся части вала составляем уравнение равновесия, используя законы теоретической механики: $\sum M_z = 0: M_{кII} + 3M - 5M - M = 0$. Откуда $M_{кII} = -3M + 5M + M = 3M$. Получили положительное значение крутящего момента. Значит, $M_{кII}$ направлен против часовой стрелки.

6. Определим методом сечений крутящий момент на III участке, используя правило знаков для крутящего момента. Для этого располагаемся таким образом, чтобы видеть сечение оставшейся части вала (см. рис. 25, а), и составляем уравнение для определения крутящего момента. Согласно правилу знаков, внешний момент $3M$ направлен против часовой стрелки, значит, крутящий момент, противодействующий ему, направлен по часовой стрелке и он отрицателен. Моменты $5M$ и реактивный момент M направлены по часовой стрелке, а значит, противодействующий им крутящий момент направлен против часовой стрелки и он положителен. С учетом сказанного получим $M_{кIII} = -3M + 5M + M = 3M$.

Эпюра крутящего момента, соответствующая схеме нагружения вала, изображена на рисунке 25, в.

Часто приходится определять величину вращающих моментов, действующих на вал по мощности N , передаваемой валом и от частоты вращения вала n , которая выражается зависимостью

$$M_{вр} = \frac{30 \cdot N}{\pi n}.$$

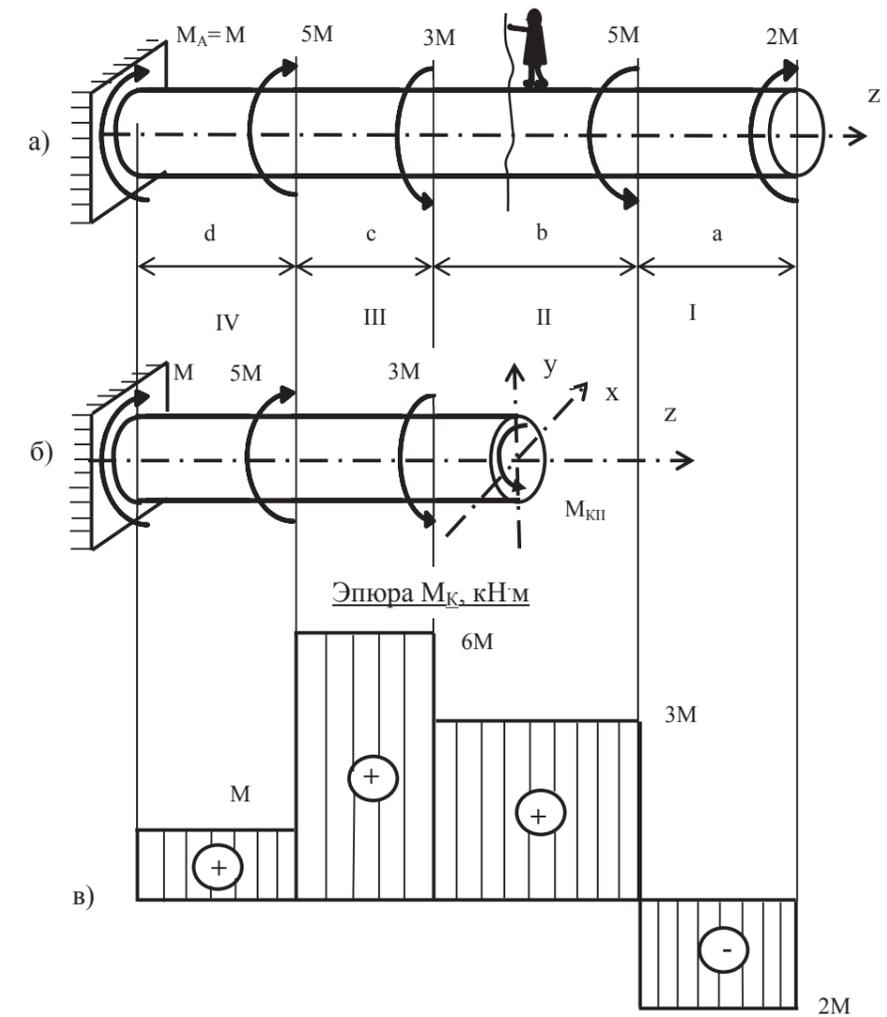


Рис. 25. Схемы расчетная (а), для определения крутящего момента (б) и эпюра крутящих моментов (в)

Теория кручения вала круглого поперечного сечения основана на следующих допущениях:

- поперечные сечения вала плоские и нормальные к его оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси и при деформации;
- радиусы поперечных сечений при деформации не искривляются;
- продольная ось вала до и после деформации остается прямой и не искривляется;
- материал вала при деформации следует закону Гука.

Представление о характере деформации при кручении можно получить подвергая скручиванию резиновую модель вала с нанесенной на его поверхность сетки продольных и поперечных рисок (рис. 26). Под действием скручивающего момента прямоугольники на поверхности искривляются по продольным линиям, а поперечные линии остаются параллельными.

Таким образом, деформация кручения вала круглого поперечного сечения происходит в результате сдвига за счет взаимного поворота поперечных сечений относительно друг друга.

Между углом сдвига γ и углом закручивания φ (рис. 27) существует зависимость

$$\gamma = \frac{R \cdot d\varphi}{dz} = R \cdot \theta = \frac{R \cdot \varphi}{l}, \text{ где } \theta = \frac{d\varphi}{dz} \left[\frac{\text{рад}}{\text{м}} \right] - \text{относительный угол закручивания.}$$

Если радиус вала заменить на его текущее значение ρ , то изменение угла сдвига будет равно

$$\gamma_\rho = \frac{\rho \cdot d\varphi}{dz} = \rho \cdot \theta = \frac{\rho \cdot \varphi}{l}. \text{ Деформация сдвига элементов поперечного сечения сопровождается возникновением касательных напряжений, которые могут быть определены по закону Гука}$$

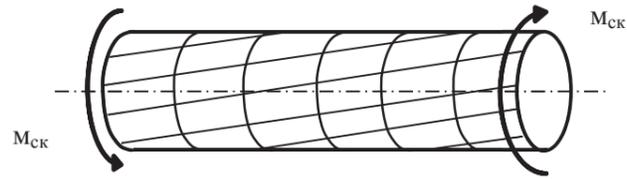


Рис. 26. Характер деформации модели резинового вала

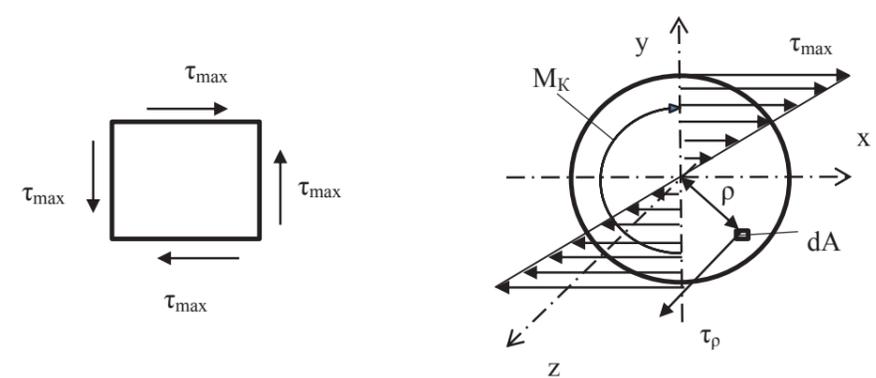


Рис. 28. Эпюра распределения касательных напряжений

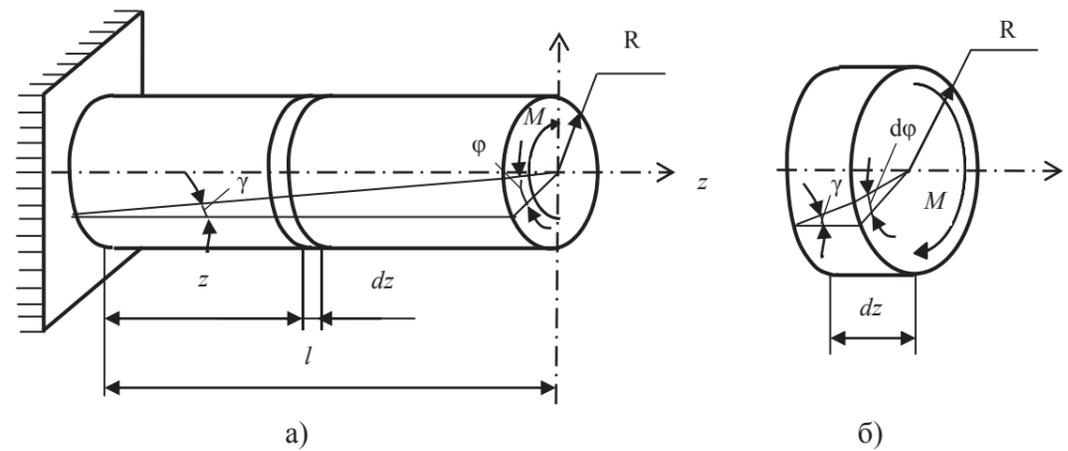


Рис. 27. Характер деформации вала круглого поперечного сечения

$$\tau = G \cdot \gamma_\rho = G \cdot \frac{\rho \cdot d\varphi}{dz} = G \cdot \rho \cdot \theta = G \cdot \frac{\rho \cdot \varphi}{l}$$

Так как ρ изменяется от 0 до R , то закон распределения касательных напряжений по поперечному сечению вала запишется в виде: $\tau = \tau_{max} \frac{\rho}{R}$. Максимальных значений касательные напряжения достигают на поверхности вала, а минимальные равны нулю на оси вала. Касательные напряжения возникают в каждой точке вала и распределены непрерывно.

Касательные напряжения направлены в сторону крутящего момента M_k и перпендикулярны радиусу. Они подчиняются закону парности касательных напряжений, то есть парные касательные напряжения возникают в поперечных и продольных сечениях вала. Эпюра касательных напряжений представлена на рисунке 28, б.

При кручении во всех точках стержня возникает состояние чистого сдвига (рис. 28, а). Следует помнить, что сдвиг будет неоднородным, так как τ изменяется с изменением радиуса.

Если для чистого сдвига изменить ориентацию секущих площадок на угол 45° , то на этих площадках будут присутствовать только нормальные напряжения, равные по величине касательным, то есть $\sigma = \tau$, но одно из них растягивающее, а другое сжимающее.

Необходимо знать зависимость между величиной касательных напряжений и крутящего момента, возникающего в поперечном сечении, которая выражается формулой $\tau = \frac{M_k \cdot \rho}{I_\rho}$, а максимальные касательные напряжения на поверхности вала определяются по формуле

$$\tau_{max} = \frac{M_{kmax} \cdot R}{I_\rho} = \frac{M_{kmax}}{W_\rho}$$

Величина угла закручивания φ измеряется в радианах и определяется $\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot I_\rho}$, относительного угла закручивания $\theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_k}{G \cdot I_\rho}$.

Произведение $G \cdot J_\rho$ (модуль сдвига на полярный момент инерции сечения) называется жесткостью вала при кручении, то есть способностью вала сопротивляться скручиванию.

Потенциальная энергия при кручении $U = \frac{M_k \cdot \varphi}{2} = \frac{M_k^2 \cdot l}{2GI_\rho}$.

При кручении вала прямоугольного поперечного сечения нарушается гипотеза плоских сечений. Сечения некруглой формы при кручении искривляются – депланируются. Если искривлению поперечных сечений ничто не мешает, то кручение называется свободным, или чистым. Распределение касательных напряжений для таких сечений представлено на рисунке 29. Опасными точками поперечного сечения с точки зрения прочности являются точки А и В, расположенные на середине длинных сторон прямоугольника, где действуют максимальные касательные напряжения. Величина касательных напряжений в этих точках определяется $\tau_{max} = \frac{M_k}{W_k}$, угол закручивания вала определяется $\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot I_k}$, W_k и I_k – условно называют моментом сопротивления сечения и моментом инерции сечения при кручении и определяются $W_k = \alpha hb^2$ и $I_k = \beta hb^3$. Напряжения на середине короткой стороны будут равны: $\tau = \gamma \cdot \tau_{max}$. Коэффициенты α, β, γ приводятся в справочниках в зависимости от отношения сторон поперечного сечения h/b (например, при $h/b = 2$, $\alpha = 0,246$; $\beta = 0,229$; $\gamma = 0,795$).

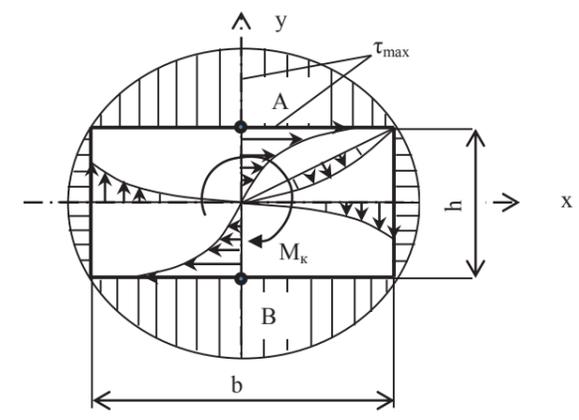


Рис. 29. Распределение касательных напряжений в вале прямоугольного поперечного сечения

Необходимо понять расчет на прочность и жесткость при кручении. Соблюдение прочности при проектировании валов является недостаточным. Валы должны одновременно удовлетворять условиям прочности и требованиям жесткости:

$$\begin{cases} \tau_{max} = \frac{M_{kmax}}{W_\rho} \leq [\tau_k] \\ \theta_{max} = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_{kmax}}{G \cdot I_\rho} \leq [\theta] \end{cases}$$

Верхняя формула выражает условие прочности, что наибольшая величина касательного напряжения в поперечном сечении не должна превышать допустимого напряжения на кручение.

Нижняя формула выражает требование жесткости вала, чтобы максимальный относительный угол закручивания вала не превышал допустимого относительного угла закручивания вала при кручении.

При расчетах валов на кручение величину значений допускаемого касательного напряжения $[\tau_k]$ принимают для стали $[\tau_k] = (0,5 - 0,55)[\sigma_p]$, для чугуна $[\tau_k] = [\sigma_p]$.

В зависимости от назначения вала относительный угол закручивания принимают $[\theta] = (0,45 - 1,75) \cdot 10^{-2}$ рад/м, что примерно равно $[\theta^\circ] = (0,25 - 1,0)$ град/м.

По вышеприведенным формулам проводят три вида расчетов:

– проверка прочности и жесткости (проверочный расчет на прочность и жесткость). Проверка проводится по формулам условий прочности и жесткости:

$$\begin{cases} \tau_{max} = \frac{M_{kmax}}{W_\rho} \leq [\tau_k] \\ \theta_{max} = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_{kmax}}{G \cdot I_\rho} \leq [\theta]; \end{cases}$$

– подбор сечения вала (проектный расчет). Из условий прочности и жесткости определяется диаметр вала:

$$W_\rho \geq \frac{M_{kmax}}{[\tau_k]} = 0,2D^3; \quad \begin{cases} D \geq \sqrt[3]{\frac{M_{kmax}}{0,2[\tau_k]}}, \\ D \geq \sqrt[4]{\frac{M_{kmax}}{0,1 \cdot G \cdot [\theta]}}. \end{cases}$$

$$I_\rho \geq \frac{M_{kmax}}{G \cdot [\theta]} = 0,1D^4;$$

Из двух видов расчетов принимается больший диаметр вала;

– определение допускаемого крутящего момента. Из условий прочности и жесткости определяется допускаемый крутящий момент:

$$\begin{cases} M_{kmax} \leq W_\rho \cdot [\tau_k]; \\ M_{kmax} \leq I_\rho \cdot G \cdot [\theta]. \end{cases}$$

Из двух видов расчетов принимается меньшее значение крутящего момента.

Нужно уметь выбирать рациональные формы сечений при кручении. Середина поперечного сечения вала незначительно влияет на прочность материала (касательные напряжения в середине вала равны нулю, а область вала, прилегающая к середине, испытывает минимальные касательные напряжения), поэтому материал середины следует перераспределить на поверхность вала, где действуют максимальные касательные напряжения. Из двух сечений с одним и тем же I_ρ и M_k будет выгодно то, где площадь поперечного сечения будет минимальна, так как это обеспечивает меньший расход материала.

Для сравнения различных сечений при расчете на прочность удобно применять удельный момент сопротивления при кручении $\omega_\rho = \frac{W_\rho}{\sqrt{A^3}}$. При подборе сечений по жесткости в качестве

критерия экономичности профиля служит удельный полярный момент инерции: $i_\rho = \frac{I_\rho}{A^2}$. Чем больше ω_ρ и i_ρ , тем прочнее и жестче сечение.

При изучении темы кручения необходимо разобрать методику определения деформаций и напряжений при кручении стержней некруглого сечения и цилиндрических винтовых пружин малого шага.

При кручении тонкостенных стержней замкнутого профиля (рис. 30) считается, что толщина стенки t плавно изменяется вдоль линии контура. Геометрическое место точек, равноотстоящих от внешнего и внутреннего контура, называется средней линией сечения. Ввиду незначительной толщины стенки касательные напряжения принимаются равномерно распределенными по поперечному сечению и направленными по касательной к средней линии сечения.

Для элементарной площадки длиной dS поперечная сила, действующая на этой площадке, равна $dQ = \tau \cdot t \cdot dS$. Элементарный крутящий момент относительно точки O от поперечной силы будет равен $dM_k = \tau \cdot t \cdot \rho \cdot dS$, а крутящий момент будет $M_k = \int \tau \cdot t \cdot \rho \cdot dS$, где интегрирование распространяется на всю длину контура.

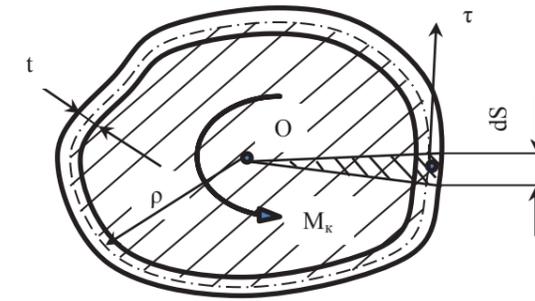


Рис. 30. Схема при кручении тонкостенных стержней замкнутого профиля

Произведение $\rho \cdot dS = 2dA$ равно удвоенной площади треугольника, следовательно, выносим за знак интеграла: $M_k = \int_A \tau \cdot t \cdot 2dA = \tau \cdot t \cdot 2 \int_A dA = \tau \cdot t \cdot 2A$. Интеграл $\int_A dA$ – площадь сплошного сечения, ограниченного средней линией сечения. Откуда $\tau = \frac{M_k}{t \cdot 2A}$. Максимальные напряжения будут там, где толщина сечения минимальна:

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{2A \cdot t_{min}}$$

Угол закручивания этих сечений определяется по формуле:

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{4G \cdot A^2} \int_0^l \frac{dS}{t}$$

Здесь M_k – крутящий момент; l – длина участка вала; G – модуль сдвига; A – площадь, ограниченная средней линией; dS – длина контура; t – толщина сечения.

При расчете цилиндрических винтовых пружин с малым шагом вводятся следующие обозначения (рис. 31, а): D – средний диаметр витка пружины; d – диаметр поперечного сечения проволоки, из которого навита пружина; n – число витков пружины; α – угол подъема витков пружины ($\alpha < 10^\circ$).

При определении деформаций витков пружины применяем метод сечений, мысленно рассекаем пружину сечением, перпендикулярным винтовой оси стержня, и оставляем одну из частей (в нашем случае верхнюю часть – рис. 31, б).

При малом угле подъема витков пружины можно сказать, что проведенное сечение лежит в вертикальной плоскости, то есть ось z перпендикулярна плоскости чертежа, а ось y совпадает с линией действия силы F .

Сила F проектируется в точку на оси x и z (перпендикулярна плоскости чертежа и не дает моментов относительно осей x и y). Поэтому из шести внутренних силовых факторов остается два – поперечная сила и крутящий момент:

$$\begin{cases} \sum F_y = 0; Q = F \\ \sum M_z = 0; M_k = F \cdot \frac{D}{2} \end{cases}$$

Касательные напряжения среза в сечении, связанные с наличием поперечной силы, можно определить как $\tau_{ср} = \frac{Q}{A_{ср}} = \frac{F}{\pi \cdot d^2 / 4} = \frac{4F}{\pi \cdot d^2}$. Они равномерно распределены по поперечному сечению и направлены по направлению поперечной силы Q (рис. 32, а).

Касательные напряжения кручения изменяются вдоль радиуса по закону прямой линии и рав-

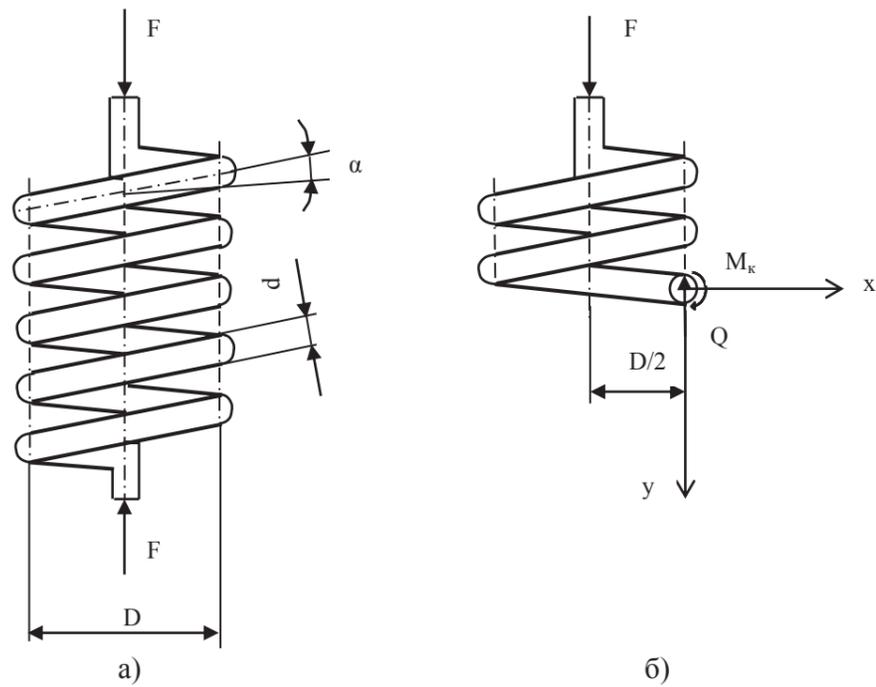


Рис. 31. Схема цилиндрической винтовой пружины с малым шагом (а) и оставшаяся часть пружины при определении внутренних сил по методу сечений (б)

ны $\tau_{k\max} = \frac{M_k}{W_\rho} = \frac{FD/2}{\pi d^3/16} = \frac{8FD}{\pi d^3}$ и достигают наибольшей величины на наружной поверхности проволоки пружины (рис. 32, б).

При алгебраическом сложении касательных напряжений опасной оказывается точка С, расположенная на внутренней поверхности, на контуре сечения в которой напряжения τ_{cp} и $\tau_{k\max}$ совпадают по направлению (рис. 32, в), полное касательное напряжение в этой точке равно:

$$\tau_{max} = \tau_{k\max} + \tau_{cp} = \frac{8FD}{\pi d^3} + \frac{4F}{\pi \cdot d^2} = \frac{8FD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{2D}\right) = k \cdot \frac{8FD}{\pi d^3}.$$

Выражение, стоящее в скобках, заменяется коэффициентом $k = \frac{4C+1}{4C-4}$, где $C = \frac{D}{d}$ – индекс пружины. Коэффициент k отражает влияние кривизны витков и наличие поперечной силы на величину напряжений в пружине.

Условие прочности для витков пружины примет вид: $\tau_{max} = k \cdot \frac{8FD}{\pi d^3} \leq [\tau]$.

Для стальных пружин применяют материал повышенного качества, допускаемое напряжение составляет $[\tau] = 200 - 800$ МПа при статической нагрузке и нормальной температуре.

Изменение высоты пружины под нагрузкой (для пружин сжатия эту величину называют осадкой) определяют по формуле: $\lambda = \frac{8FD^3}{Gd^4}$.

Вопросы для самопроверки:

1. Привести основные допущения, лежащие в основе теории кручения круглого стержня.
2. Дать определения крутящего момента в сечении вала и угла закручивания сечений.
3. Построить для определенного примера эпюру крутящих моментов.
4. Какие напряжения возникают в поперечном сечении круглого стержня при кручении? По какой формуле они определяются?
5. Привести формулы для определения крутящего момента и угла закручивания, относительного угла закручивания сечения вала при кручении.

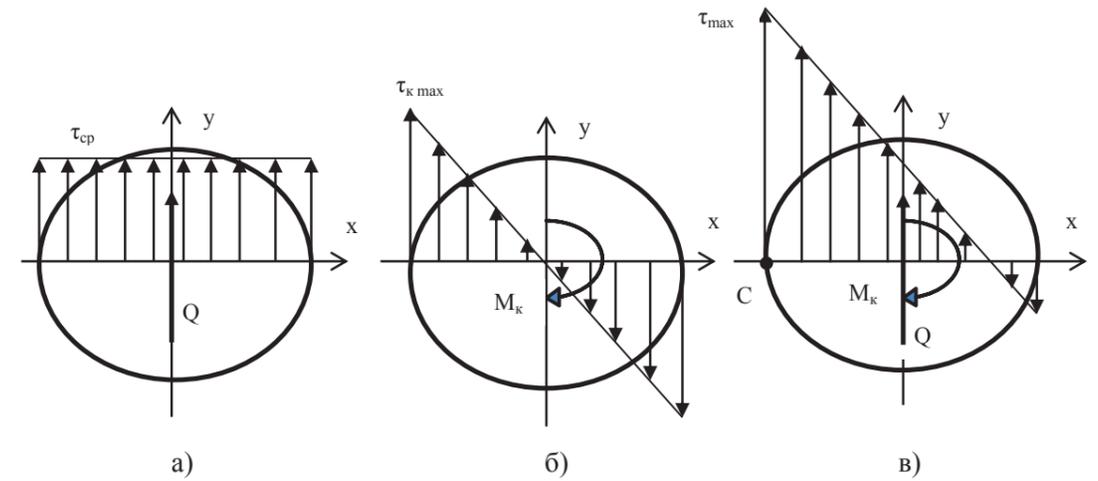


Рис. 32. Эпюры распределения касательных напряжений в поперечном сечении цилиндрической винтовой пружины

6. Построить эпюру касательных напряжений в сечении вала при кручении.
7. Привести формулы для определения полярного момента инерции круга и кольца.
8. Написать условия прочности и жесткости при кручении вала.
9. Привести формулы для определения касательных напряжений и угла закручивания при кручении стержня прямоугольного сечения.
10. Привести формулы для определения касательных напряжений и деформаций при осевом растяжении (сжатии) цилиндрических пружин с малым шагом.

8. Изгиб.

При изучении темы необходимо разобраться в понятии деформации изгиба и видах изгиба. Характер деформации брусьев при изгибе можно представить на модели резинового бруса прямоугольного сечения, на боковых гранях которого нанесена сетка линий, параллельных и перпендикулярных продольной оси бруса (рис. 33).

Под действием внешних моментов M , которые действуют в плоскости симметрии бруса по одной из главных центральных осей инерции сечения, линии, параллельные продольной оси бруса, искривляются, сохраняя между собой прежнее расстояние v . Нижняя часть бруса будет удлиняться ($a + \Delta a$), испытывать деформацию растяжения, а верхняя – укорачиваться ($a - \Delta a$) и испытывать деформацию сжатия. Средняя часть бруса по осевой линии будет неизменной и не испытывать деформации растяжения – сжатия.

Линии, перпендикулярные продольной оси бруса, можно рассматривать как след плоскости некоторого поперечного сечения бруса. Поперечные сечения, плоские и перпендикулярные продольной оси бруса, до деформации остаются плоскими и перпендикулярными к оси бруса в процессе деформации (подтверждается гипотеза плоских сечений Бернулли) и поворачиваются относительно первоначального положения на некоторый угол φ .

При деформации изгиба следует учитывать гипотезу о ненадавливании продольных волокон друг на друга (волокна, параллельные оси бруса, испытывают деформацию растяжения – сжатия и не оказывают давления друг на друга в поперечном направлении).

Под изгибом понимается такой вид нагружения бруса, при котором в его поперечных сечениях возникают изгибающие моменты M_x и поперечные силы Q , остальные внутренние силовые факторы равны нулю.

В зависимости от количества внутренних силовых факторов, возникающих в поперечных сечениях бруса, изгиб делится на чистый (в поперечных сечениях возникает только изгибающий момент M_x) и поперечный (в поперечных сечениях возникает изгибающий момент M_x и поперечная сила Q).

В зависимости от положения плоскости действия внутренних силовых факторов изгиб делится на прямой (плоскость действия изгибающего момента проходит через центр тяжести сечения и совпадает с одной из главных осей инерции сечения) и косой (плоскость действия изгибающе-

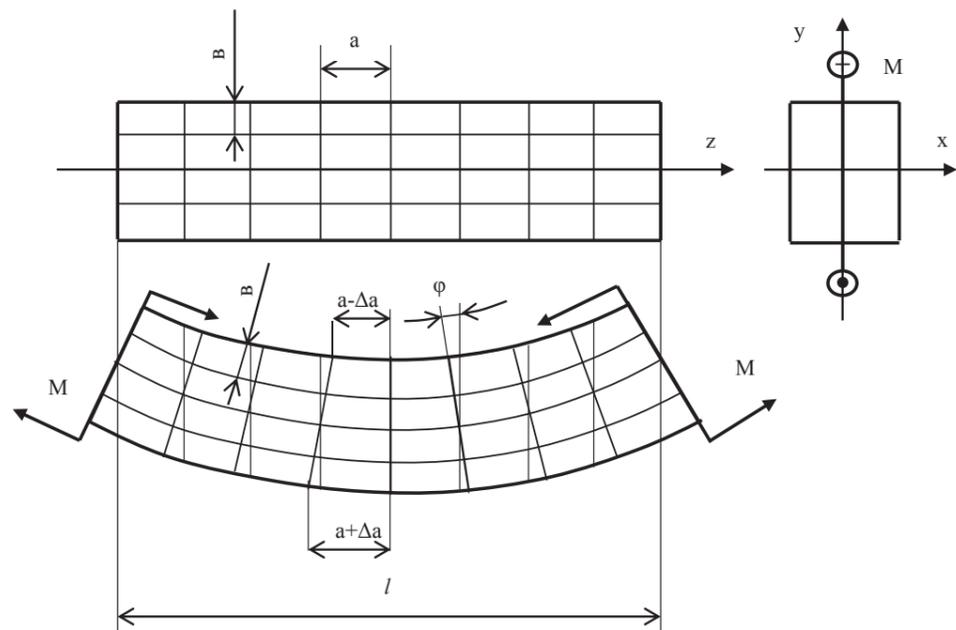


Рис. 33. Резиновая модель бруса при изгибе

го момента проходит через центр тяжести сечения, но не совпадает ни с одной из главных осей инерции сечения). Виды изгибов представлены на рисунке 34.

Брус, испытывающий деформацию изгиба, называется балкой.

Деформацию изгиба часто испытывают элементы различных конструкций (прогоны и плиты перекрытий зданий, мосты, рельсы, шпалы и т. д.). Все эти устройства имеют место, на которое опираются или закрепляются, то есть опорные устройства.

Различают следующие виды опор:

- шарнирно-подвижная опора допускает поворот вокруг оси шарнира и линейное перемещение, параллельное опорной плоскости. В этой опоре известны точка приложения опорной ре-

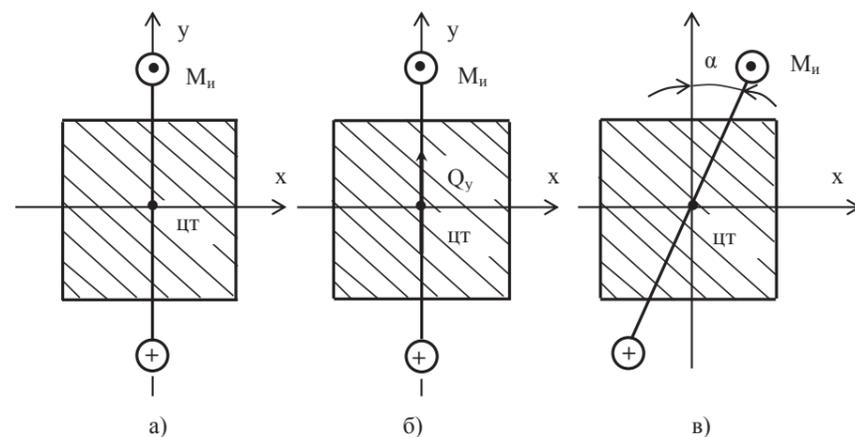


Рис. 34. Виды изгибов: а) чистый прямой; б) поперечный прямой; в) косой

акции – центр шарнира и его направление – нормаль к опорной поверхности (трением пренебрегают). Такая опора имеет одну реакцию R_A , которая направлена перпендикулярно к опорной поверхности;

- шарнирно-неподвижная опора допускает поворот вокруг оси шарнира, но не допускает никаких линейных перемещений. Для этой опоры известна только точка приложения опорной реакции – центр шарнира, направление и величина опорной реакции не известны. Обычно вме-

сто определения величины и направления реакции (полной) находят ее горизонтальную и вертикальную составляющие H_A и V_A . На мостах ставится одна неподвижная, другая шарнирно-подвижная опоры для компенсации термических и других перемещений;

- жесткая заделка (защемление) не допускает ни линейных перемещений, ни поворота. Неизвестными в данном случае являются не только величина и направление реакции, но и точка ее приложения. Для определения опорной реакции следует найти три неизвестные составляющие H_A и V_A на осях x , y и реактивный момент M_A относительно центра тяжести опорного сечения. Опорные реакции определяются исходя из уравнений равновесия при проекции всех внешних сил на оси или моменты относительно точек или осей.

При изучении темы изгиба особое внимание следует обратить на определение внутренних силовых факторов – поперечной силы Q и изгибающего момента $M_{из}$, действующих в сечении балки, которые определяются методом сечений (правило РОЗУ).

Поперечная сила в произвольном сечении балки численно равна алгебраической сумме внешних сил, приложенных к оставшейся части балки после ее мысленного рассечения на две части. Знак поперечной силы считается положительным, если внешняя сила вращает оставшуюся часть балки относительно рассматриваемого сечения по часовой стрелке, и отрицательна, если против (рис. 35, а).

Изгибающий момент в произвольном сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов внешних сил, приложенных к оставшейся части балки после ее мысленного рассечения на две части. Изгибающий момент $M_{из}$ считается положительным, если внешние силы изгибают балку относительно рассматриваемого сечения выпуклостью вниз, то есть растянутые волокна находятся на нижней части балки. Изгибающий момент отрицателен, если внешние силы изгибают балку относительно рассматриваемого сечения выпуклостью вверх, то есть растянутые волокна находятся на верхней части балки (рис. 35, б).

Изменение поперечной силы и изгибающих моментов удобно изображать в виде графиков – эпюр. Каждая ордината эпюры Q и $M_{из}$ в принятом масштабе равна поперечной силе и изгибающему моменту, действующим в этом поперечном сечении балки, которому соответствует эта ордината.

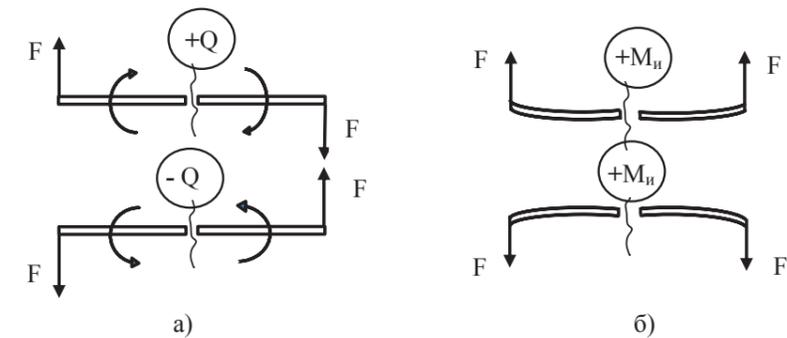


Рис. 35. Правило знаков а) для поперечной силы; б) для изгибающего момента

Эпюры Q и $M_{из}$ строятся по участкам, границами которых являются сечения, где приложены внешние силы и моменты, а также и сечения, где изменяется площадь поперечного сечения балки. Составление уравнений равновесия при определении поперечной силы и изгибающего момента методом сечений реализуется с помощью местных координат и правила знаков.

При составлении уравнения равновесия с помощью местных координат для произвольного сечения для оставшейся части балки проводятся местные оси координат в пределах каждого участка. Ось z направляется от сечения и перпендикулярно поперечному сечению, оси x и y лежат в плоскости сечения. Поперечная сила Q и изгибающий момент в рассматриваемом сечении всегда проводятся положительными, то есть поперечная сила совпадает по направлению с осью y , а изгибающий момент $M_{из}$ направляют против часовой стрелки относительно оси x . Для оставшейся части балки составляется условие статического равновесия в виде:

$\sum F_y = 0$ и $\sum M_x = 0$, из которых находится знак и значение поперечной силы и изгибающего момента.

Определим внутренние силовые факторы на примере балки, изображенной на рисунке 36, а. Это прямая балка прямоугольного поперечного сечения, на которую действует внешняя нагрузка. Определим для данной балки на участке II внутренние силовые факторы методом сечений с использованием местных координат (рис. 36, б).

Для оставшейся части балки (рис. 36, б) составляем уравнение равновесия:

$$\sum F_y = 0; Q_{II} - F - q \cdot z_{II} = 0; Q_{II} = F + q \cdot z_{II}; \text{ где } 0 \leq z_{II} \leq b.$$

$$\sum M_x = 0; M_{II} - M + F \cdot (a + z_{II}) + q \cdot \frac{z_{II}^2}{2}; M_{II} = M - F \cdot (a + z_{II}) - q \cdot \frac{z_{II}^2}{2};$$

где $0 \leq z_{II} \leq b$.

Для левой оставшейся части балки (рис. 36, в) оси координат будут иметь обратное направление.

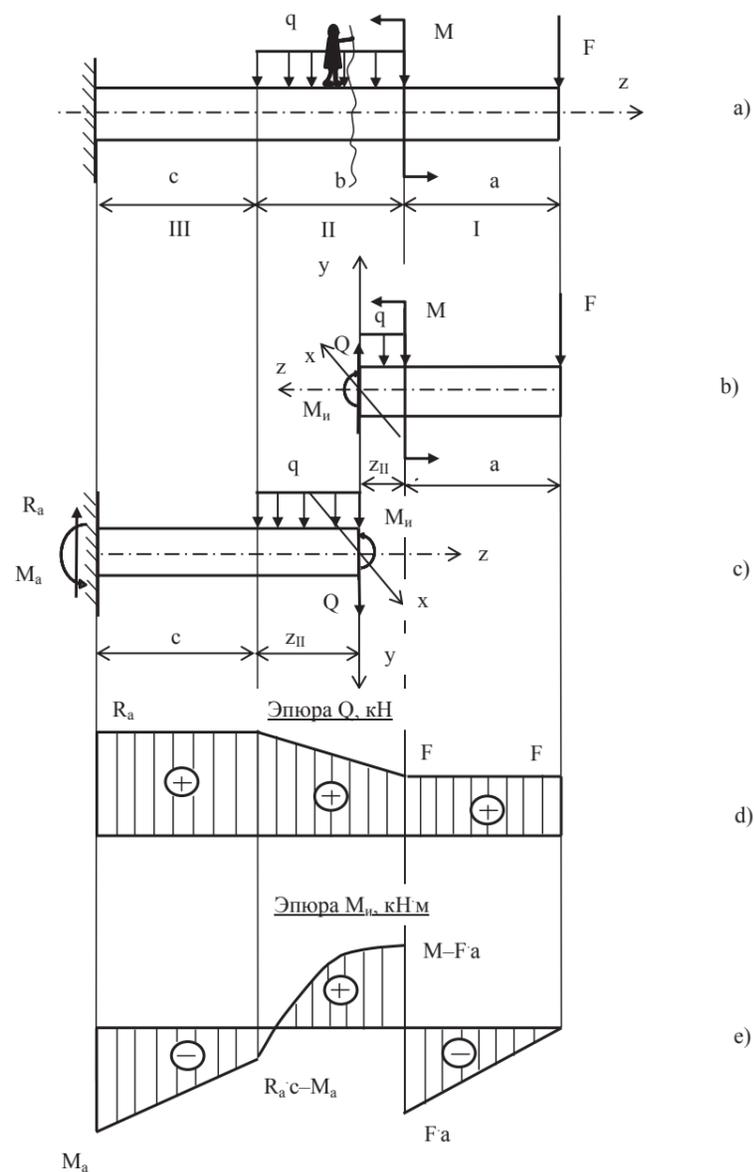


Рис. 36. Расчетная схема балки и эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Составление уравнений равновесия для определения внутренних силовых факторов упрощается при использовании правила знаков. Определим поперечную силу для второго участка для правой оставшейся части балки: $Q_{II} = F + q \cdot z_{II}$, где $0 \leq z_{II} \leq b$. Силу F берем со знаком плюс, так как она вращает оставшуюся часть балки относительно рассматриваемого сечения по часовой стрелке, по этой же причине положительна и сила $q \cdot z_{II}$.

Изгибающий момент в рассматриваемом сечении (рис. 36, б) будет равен алгебраической сумме моментов внешних сил, действующих на оставшуюся часть балки, с учетом правила знаков:

$M_{II} = M - F \cdot (a + q \cdot z_{II}) - q \cdot \frac{z_{II}^2}{2}$, где $0 \leq z_{II} \leq b$. Внешний момент M берем со знаком плюс, так как изгиб балки относительно сечения идет выпуклостью вниз, а знак момента от силы F и распределенной нагрузки q берем со знаком минус, выпуклость балки будет направлена вверх. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для данной балки представлены на рисунке 36, г, д.

Последовательность действий при построении эпюр:

- 1) изобразить расчетную схему в определенном масштабе, указав внешнюю нагрузку, длину балки с приведением числовых значений;
- 2) из уравнений равновесия определить опорные реакции балки;
- 3) разбить балку на участки. Границами участков являются сечения, где приложены внешние силы и моменты, начало и конец приложения распределенных усилий, а также сечения, где изменяется площадь поперечного сечения балки. Провести через границы участков линии, перпендикулярные оси балки;
- 4) присвоить номер каждому участку. Для консольно закрепленной балки нумерацию участков следует вести со свободного конца балки, чтобы не искать реакцию в заделке. Если реакции определены, то нумерацию можно вести с любого конца балки;
- 5) методом сечений определить для каждого участка величину и знак поперечной силы и изгибающего момента;
- 6) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Для этого провести линию, параллельную оси балки, а на перпендикулярных линиях отложить в масштабе величину Q в начале и конце участка и через эти точки провести линии. Внутри образовавшихся фигур поставить знак поперечной силы и заштриховать фигуру линиями, перпендикулярными оси балки. На ординатах конца участков эпюр поставить числовые значения без указания знаков. То же проделать и для эпюры изгибающих моментов;
- 7) подписать эпюры, указав наименование и размерность.

Между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки существуют следующие зависимости:

- первая производная от поперечной силы по абсциссе сечения балки равна интенсивности распределенной нагрузки $q = \frac{dQ}{dz}$;

- производная от изгибающего момента по абсциссе сечения балки равна поперечной силе

$$Q = \frac{dM_{II}}{dz};$$

- вторая производная от изгибающего момента равна интенсивности распределенной на-

$$\text{грузки } q = \frac{d^2M_{II}}{dz^2}.$$

Необходимо понять вывод формул для определения деформаций и нормальных напряжений при чистом изгибе, при котором в поперечных сечениях отсутствуют поперечные силы, а действует только изгибающий момент.

Если у балки, испытывающей чистый изгиб (рис. 37, а), выделить двумя поперечными сечениями элементарный объем, центральный угол которого равен $\Delta\varphi$ (рис. 37, б), то для полученного радиуса кривизны балки ρ абсолютное удлинение слоя длиной S_1 , расположенного на расстоянии y от нейтральной оси, будет равно: $\Delta S = S_1 - S$, а относительная деформация слоя равна:

$$\varepsilon = \frac{\Delta S}{S} = \frac{S_1 - S}{S} = \frac{(\rho + y)\Delta\varphi - \rho \cdot \Delta\varphi}{\rho \cdot \Delta\varphi} = \frac{y}{\rho}.$$

Величина нормальных напряжений в этом слое в пределах упругих деформаций определится из закона Гука $\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{y}{\rho}$ и будет представ-

лять собой закон распределения нормальных напряжений по поперечному сечению (рис. 38).

Элементарная продольная сила, действующая на элементарной площадке, будет равна $dN = \sigma \cdot dA$, а элементарный изгибающий момент от продольной силы будет равен: $dM_{II} = dN \cdot y = \sigma y dA$. Изгибающий момент в поперечном сечении определится как сумма элементарных изгибающих моментов, действующих в поперечном сечении балки:

$$M_{II} = \int_A \sigma y dA = \int_A \frac{E}{\rho} y^2 \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 \cdot dA = \frac{E}{\rho} \cdot I_x.$$

Откуда можно определить кривизну балки $\frac{1}{\rho} = \frac{M_{II}}{E \cdot I_x}$. Подставляя полученное выражение в формулу закона распределения нормальных на-

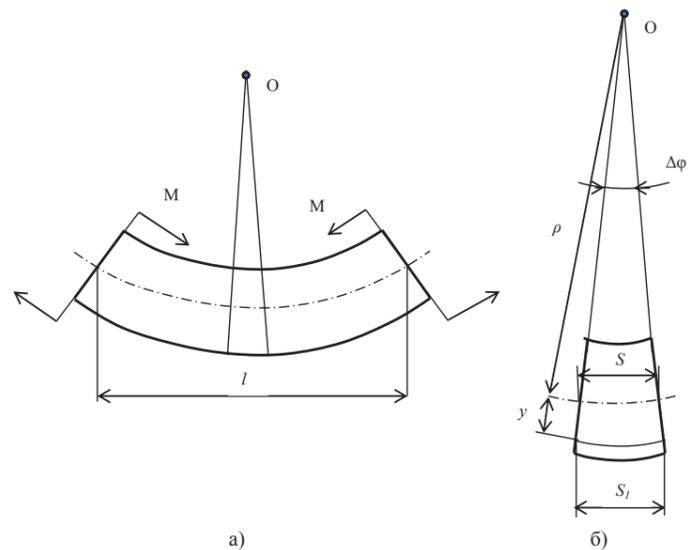


Рис. 37. Схема балки с чистым изгибом (а) и элементарный объем (б)

пряжений по поперечному сечению, получим $\sigma = E \frac{y}{\rho} = \frac{E \cdot y \cdot M_{и}}{E \cdot I_x} = \frac{M_{и} \cdot y}{I_x}$ – формулу, связывающую внутренний силовой фактор, изгибающий момент $M_{и}$ с нормальными напряжениями σ , действующими в поперечном сечении.

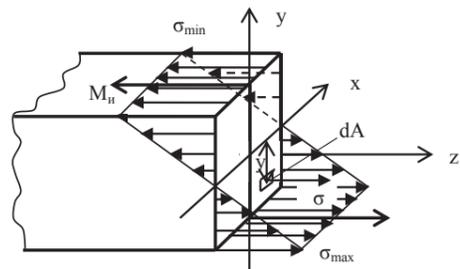


Рис. 38. Схема распределения нормальных напряжений в поперечном сечении балки

При расчетах на прочность нужно знать экстремальные нормальные напряжения, действующие в поперечном сечении балки, а они располагаются на наибольшем удалении от нейтральной оси. Величина максимальных напряжений определится по формуле $\sigma_{max} = \frac{M_{и} \cdot y_{max}}{I_x} = \frac{M_{и}}{W_x}$, где $W_x = \frac{I_x}{y_{max}}$ – осевой момент сопротивления сечения.

При прямом поперечном изгибе в поперечном сечении кроме изгибающего момента возникает и поперечная сила Q, от которой в поперечных и продольных сечениях балки будут действовать касательные напряжения (рис. 39, а), которые подчиняются закону парности касательных напряжений и определяются формулой И. Д. Журавского $\tau = \frac{Q \cdot S_x^{ост}}{b \cdot I_x}$, где $S_x^{ост}$ – статический момент сечения, расположенного по одну сторону от рассматриваемых волокон. Для прямоугольного поперечного сечения статический момент для волокон, расположенных на расстоянии y от нейтральной оси (рис. 39, б), будет равен $S_x^{ост} = A^{ост} \cdot y_{цр}$, где $A^{ост}$ – часть площади поперечного сечения, расположенного выше рассматриваемых волокон $A^{ост} = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right)$.

Характер распределения нормальных и касательных напряжений по поперечному сечению балки при поперечном изгибе представлен на рисунке 40. Нормальные напряжения σ достигают максимального напряжения на наибольшем удалении от нейтральной оси, касательные напряжения в этих волокнах балки равны нулю. Балка испытывает напряжения растяжения для выпу-

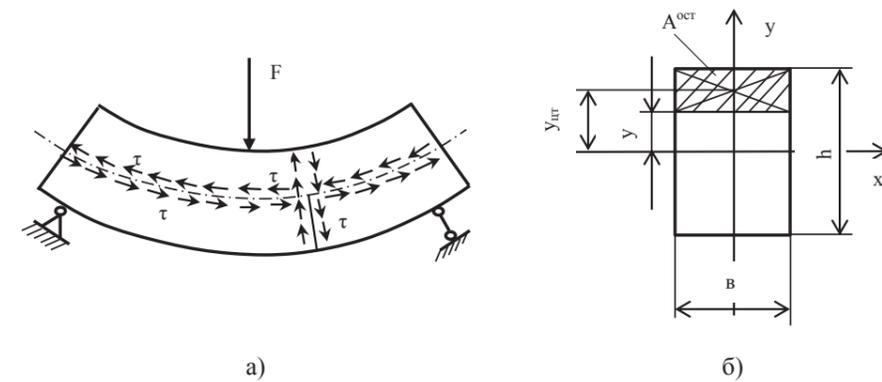


Рис. 39. Схема распределения касательных напряжений в сечениях балки (а), поперечное сечение для определения статического момента сечения (б)

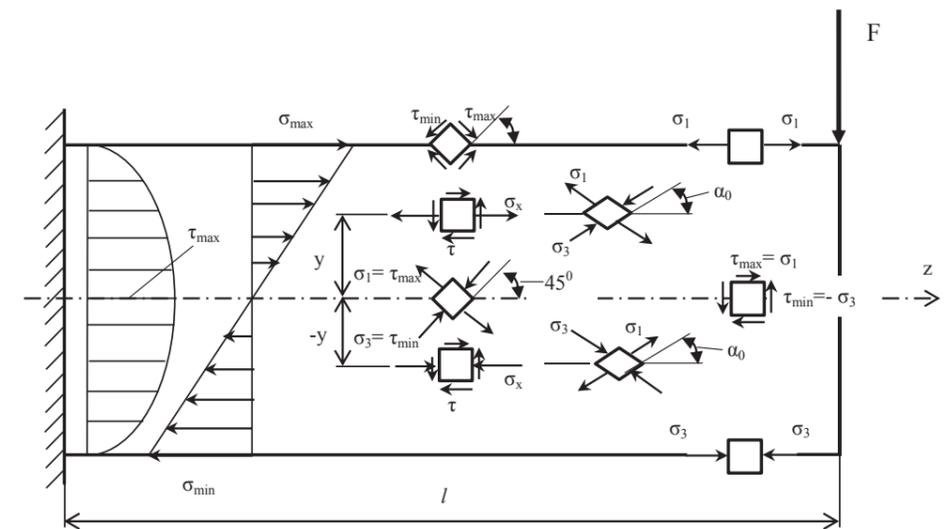


Рис. 40. Характер распределения нормальных и касательных напряжений по поперечному сечению балки

лых волокон и сжатия для вогнутых волокон. На оси балки нормальные напряжения равны нулю (нейтральный слой балки не деформируется), а касательные напряжения достигают экстремума. Нейтральный слой балки испытывает деформацию чистого сдвига.

При прямом поперечном изгибе материал балки находится в плоском напряженном состоянии. На расстоянии y от нейтральной оси величина нормальных напряжений определится по формуле $\sigma_x = \frac{M_{и} \cdot y}{I_x}$, величина касательных напряжений $\tau = \frac{Q \cdot S_x^{ост}}{b \cdot I_x}$. Главные напряжения будут равны: $\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}$, $\sigma_3 = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}$, а положение главных площадок определится $tg 2\alpha_0 = \frac{2\tau}{\sigma_x}$. Учитывая, что продольные волокна при изгибе не надавливают друг на друга, напряжение $\sigma_y = 0$. Величина экстремальных касательных напряжений определяется по формуле $\tau_{max} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}$, а положение площадок сдвига $tg 2\alpha_1 = -\frac{\sigma_x}{2\tau}$. На уровне оси балки нейтральный слой испытывает деформацию чистого сдвига. Величина касательных напряжений для прямоугольного сечения: $\tau_{max} = \frac{3Q}{2A}$, для круглого сечения: $\tau_{max} = \frac{4Q}{3A}$, для сечения любой формы $\tau_{max} = k \frac{Q}{A}$, где k – коэффициент, зависящий от формы сечения (прямоугольник: k = 1,5; круг – 1,33).

Эпюры распределения главных напряжений и экстремальных касательных напряжений по поперечному сечению балки при прямом поперечном изгибе представлены на рисунке 41.

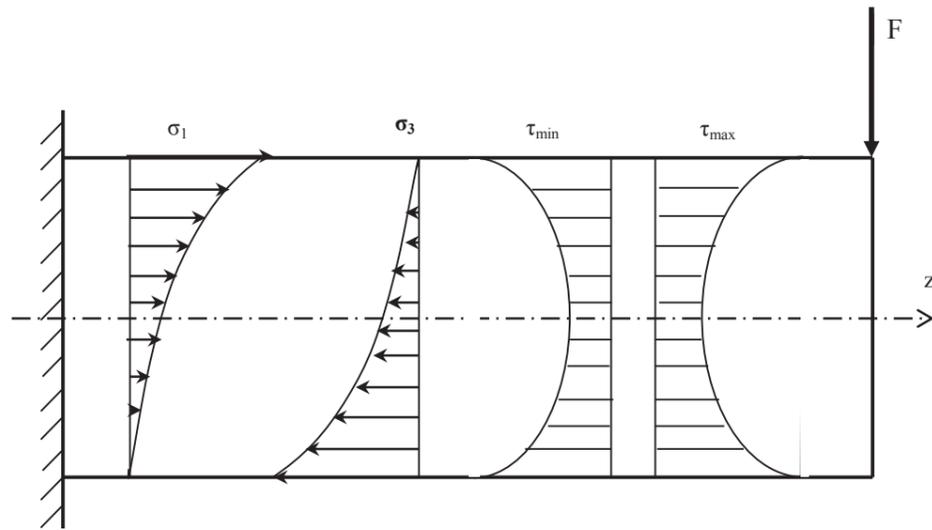


Рис. 41. Эпюры распределения главных нормальных и экстремальных касательных напряжений по поперечному сечению балки

При изгибе проверку прочности и подбор сечения балки обычно производят исходя из условия, что наибольшие нормальные напряжения в поперечных сечениях не превосходят допустимых напряжений $[\sigma]$ на растяжение и сжатие для материала балки. Максимум нормальные напряжения в балке по длине достигают в сечении, где действует наибольший по абсолютной величине изгибающий момент (M_{max}), а в поперечном сечении – в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси. Для балок, изготовленных из пластичных материалов, которые одинаково работают на растяжение (сжатие), выбирают симметричные сечения относительно нейтральной оси (прямоугольное, круглое, двутавровое), чтобы максимальные растягивающие и сжимающие напряжения были равны между собой.

Условие прочности по нормальным напряжениям запишется:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Для балок, изготовленных из материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию (хрупких, хрупко-пластичных), выгодны несимметричные сечения относительно нейтральной оси (тавр, треугольник). В этом случае прочность по нормальным напряжениям проверяют для растянутой области $\sigma_{max\text{раст}} = \frac{M_{max} \cdot y_{раст}}{I_x} \leq [\sigma_p]$; для сжатой области $\sigma_{max\text{сж}} = \frac{M_{max} \cdot y_{сж}}{I_x} \leq [\sigma_c]$, где $y_{раст}$; $y_{сж}$ – расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленных точек в растянутой и сжатой области сечения. Сечения располагают таким образом, что толстый конец поперечного сечения располагался в растянутой зоне.

С помощью приведенных уравнений и в зависимости от поставленной цели расчет на прочность может быть представлен тремя видами решаемых задач:

- проверочный расчет на прочность или проверка напряжений в балке при известных размерах поперечных сечений и заданных прочностных характеристиках материала. Расчет проводится по формулам условий прочности;

- проектный расчет на прочность или определение поперечных размеров балки выполняется по формуле: $W_x = \frac{M_{i\text{max}}}{[\sigma]}$. По осевому моменту сопротивления сечения в зависимости

от формы сечения определяются его поперечные размеры; определение допустимой нагрузки проводят по формуле: $M_{i\text{max}} \leq W_x \cdot [\sigma]$. Затем по максимальному изгибающему моменту определяют внешнюю нагрузку, действующую на балку на данном участке.

После расчета балки по нормальным напряжениям производят проверку на прочность по наибольшим касательным напряжениям. Балки, имеющие постоянную ширину сечения по высоте

(прямоугольник, квадрат и т. п.), обычно не рассчитываются на касательные напряжения (за исключением коротких балок $\frac{h}{l} \leq \frac{1}{10}$), так как определяющими их прочностью являются нормальные напряжения.

Балки, у которых возникают большие поперечные силы или сечение имеет резкое изменение ширины (двутавр, швеллер, уголок), рассчитываются и по максимальным касательным напряжениям.

Опасным является то сечение, где действует максимальная поперечная сила Q_{max} . Условие прочности по касательным напряжениям записывается в виде:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S_x^{ост}}{I_x \cdot b} \leq [\tau],$$

где $[\tau]$ – допустимые касательные напряжения сдвига берутся в пределах $[\tau] = (0,5 \dots 0,55) [\sigma_p]$.

В поперечном сечении в точках, расположенных на различном расстоянии от нейтральной оси, величины σ и τ различны, значит, будет различна величина главных нормальных и экстремальных касательных напряжений.

Расчет по эквивалентным напряжениям производится в основном для балок, имеющих поперечное сечение в виде двутавра, швеллера, составного сечения и других случаях.

При произвольной внешней нагрузке сечения, в которых действует максимальный $M_{i\text{max}}$ и максимальная Q_{max} , обычно не совпадают, поэтому опасным сечением будет то сечение, где одновременно действуют большой величины изгибающий момент M_u и поперечная сила Q .

Опасными точками поперечного сечения будут те, в которых эквивалентное напряжение достигает наибольшего значения. Наибольшего значения эквивалентные напряжения в балке двутаврового сечения возникают в точках сопряжения вертикальной стенки с горизонтальными полками (сечение а–а рис. 42).

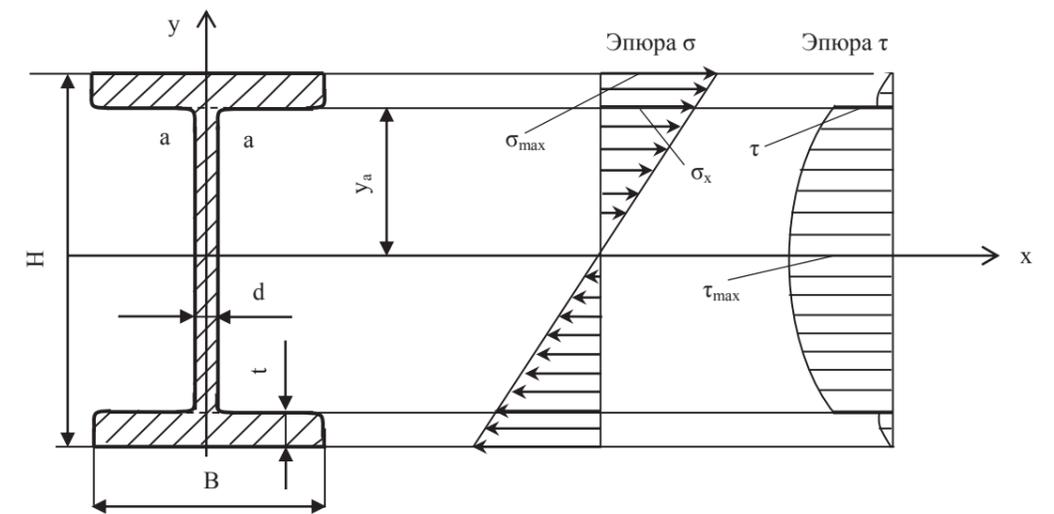


Рис. 42. Схема двутаврового сечения и распределение напряжений в поперечном сечении

Эквивалентные напряжения при расчете стальных балок вычисляются по теории наибольших касательных напряжений или энергетической теории прочности. По теории наибольших касательных напряжений через главные напряжения эквивалентные напряжения определяются по формуле: $\sigma_{эквIII} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$, а через напряжения, действующие на исходных площадках:

$$\sigma_{эквIII} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma].$$

По энергетической теории прочности через главные напряжения

$$\sigma_{эквIV} = \sqrt{\frac{1}{2}[\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} \leq [\sigma] \text{ и через напряжения, действующие на исходных площадках,}$$

$$\sigma_{эквIV} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

Для балок, изготовленных из хрупких материалов (чугун), проверку выполняют по теории прочности Мора: $\sigma_{\text{эквМ}} = \sigma_1 - m\sigma_3 \leq [\sigma]$ или $\sigma_{\text{эквМ}} = \frac{1-m}{2} \cdot \sigma_x + \frac{1+m}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$, где $m = \frac{\sigma_{\text{вр}}}{\sigma_{\text{вс}}} = \frac{\sigma_{0,2\text{p}}}{\sigma_{0,2\text{с}}}$.

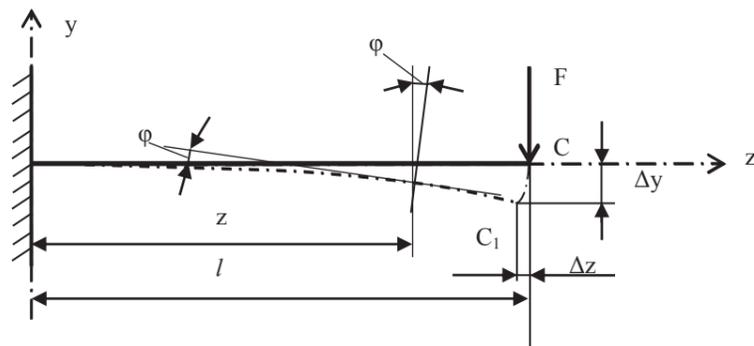


Рис. 43. Схема балки, испытывающей деформацию изгиба

Деформации изгиба балки сопровождаются линейными и угловыми перемещениями (рис. 43). Линейным перемещением Δy (или прогибом балки) следует считать величину между деформированной и недеформированной продольной осью, то есть перемещение точек оси балки, перпендикулярно к ее недеформированной оси.

От действия внешней нагрузки балка изгибается. Нейтральная ось балки, прямая до деформации, переходит в плоскую кривую, которая называется изогнутой осью, или упругой линией балки.

Так как длина продольной оси не изменяется ($\sigma = 0$ на нейтральной оси), то точка С центра тяжести крайнего поперечного сечения консольно закрепленной балки под действием нагрузки займет положение C_1 , не только опустится на величину Δy , но и сместится от горизонтали на величину Δz . Величина горизонтального смещения является величиной второго порядка и много меньше величины Δy , то есть Δz можно пренебречь.

Поперечные сечения балки, плоские и перпендикулярные к оси до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными к оси балки в процессе деформации и поворачиваются вокруг своих нейтральных осей на угол φ . Углы поворота φ сечений называются угловыми перемещениями. Их можно определить как угол между касательной, проведенной к изогнутой оси в заданной точке, и недеформированной осью балки.

При напряжениях, не превышающих предела пропорциональности, упругая линия представляет собой непрерывную плавную кривую, характер которой зависит от внешней нагрузки, геометрических размеров балки, материала и вида опорной связи.

Зависимость прогибов, углов поворота упругой линии может быть выражена некоторой функцией от расположения сечения.

В прямоугольной системе координат уравнение прогибов можно представить как функцию от координаты z , то есть от абсциссы сечения (расстояния от выбранного начала координат до рассматриваемого сечения): $y = f(\varphi(z))$.

Так как угол поворота φ сечения равен углу между касательной к упругой линии и осью oz , то можно записать $\text{tg} \varphi \cong \varphi = \frac{dy}{dz} = \frac{f(\varphi(z))}{dz}$. Следовательно, чтобы определить прогибы в любом сечении балки, необходимо найти аналитическое выражение изогнутой оси или упругой линии балки, тогда первая производная функции прогибов по z будет являться уравнением углов поворота поперечных сечений.

Для вывода уравнения прогибов приравнивают кривизну балки при чистом изгибе $\frac{1}{\rho} = \frac{M_{\text{и}}}{E \cdot I_x}$

с кривизной плоской кривой с производными функциями этой кривой из курса математики $\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dz^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}}$. Величиной $\left(\frac{dy}{dz}\right)^2$ по сравнению с единицей можно пренебречь, так как угол

поворота в реальных объектах очень мал, а квадрат ее еще меньше. Приравнявая правые части,

получим дифференциальное уравнение изогнутой оси балки: $\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M_{\text{и}}}{E \cdot I_x}$.

Перед решением полученного дифференциального уравнения необходимо изгибающие моменты в балке $M_{\text{и}}$ представить в виде аналитической функции от координаты z .

Интегрируя полученное уравнение изогнутой оси балки один раз, получим уравнение углов поворота поперечных сечений: $\varphi = \frac{dy}{dz} = \int \frac{M_{\text{и}}}{E \cdot I_x} dz + C$.

Интегрируя это уравнение второй раз, получим уравнение прогибов:

$$y = \iint \left(\frac{M_{\text{и}}}{E \cdot I_x} + C \right) dz + D,$$

где C и D – постоянные интегрирования, находятся из начальных условий в зависимости от условий закрепления балки.

Метод непосредственного интегрирования приемлем, если балка имеет один участок. При двух и более участках задача становится трудоемкой, так как для каждого участка появляются свои постоянные интегрирования и необходимо составлять уравнения совместности деформаций для сопряженных участков (условие непрерывности упругой линии балки).

Для упрощения способа определения линейных и угловых перемещений балки был разработан метод начальных параметров. Для этого метода вводятся следующие допущения:

- 1) начало координат помещается на левом конце балки;
- 2) за положительное направление силы и момента принимают для сил – совпадение с осью y , направленной вверх, а за положительный момент – выпуклость балки от действия внешних нагрузок относительно рассматриваемого сечения направлена вниз;
- 3) при действии рассреденной нагрузки, не доходящей до правого конца рассматриваемого участка, вводится фиктивная рассреденная нагрузка. Ее продолжают до сечения и уравновешивают такой же рассреденной нагрузкой, действующей в противоположном направлении;
- 4) интегрирование составленных выражений, содержащих скобки, производится без раскрытых скобок;
- 5) при наличии сосредоточенного момента m его значение представляется в виде произведения $m(z-a)^0$, где z – текущая координата рассматриваемого сечения; a – расстояние от начала координат до момента m .

Для консольно нагруженной балки (рис. 44) определим величину момента в произвольном сечении, отстоящем от начала координат на расстоянии z . Для этого продолжим рассреденную нагрузку до рассматриваемого сечения и введем фиктивную нагрузку. Все внешние силовые факторы имеют положительное направление.

Изгибающий момент в сечении z будет равен:

$$M(z) = m(z-a)^0 + F(z-b) + \frac{q(z-c)^2}{2} - \frac{q(z-d)^2}{2}.$$

Подставляем его выражение в дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

$$E \cdot I_x \cdot \frac{d^2y}{dz^2} = M_{\text{и}}, \text{ получим: } E \cdot I_x \cdot y''(z) = m(z-a)^0 + F(z-b) + \frac{q(z-c)^2}{2} - \frac{q(z-d)^2}{2}.$$

Производя двукратное интегрирование, получим:

$$E \cdot I_x \cdot y'(z) = \frac{m(z-a)}{1} + \frac{F(z-b)^2}{2} + \frac{q(z-c)^3}{6} - \frac{q(z-d)^3}{6} + C;$$

$$E \cdot I_x \cdot y(z) = \frac{m(z-a)^2}{2} + \frac{F(z-b)^3}{6} + \frac{q(z-c)^4}{24} - \frac{q(z-d)^4}{24} + Cz + D,$$

где C и D – постоянные интегрирования, находятся из начальных условий. Для нашей балки при $z = l; y(z) = 0; y'(z) = 0$.

$C = E \cdot I_x \cdot \varphi_0; D = E \cdot I_x \cdot y_0$ – геометрический смысл C и D . C – это угол поворота балки в начале координат, а D – это прогиб балки в начале координат.

С учетом постоянных интегрирования уравнение углов поворота и прогибов поперечных се-

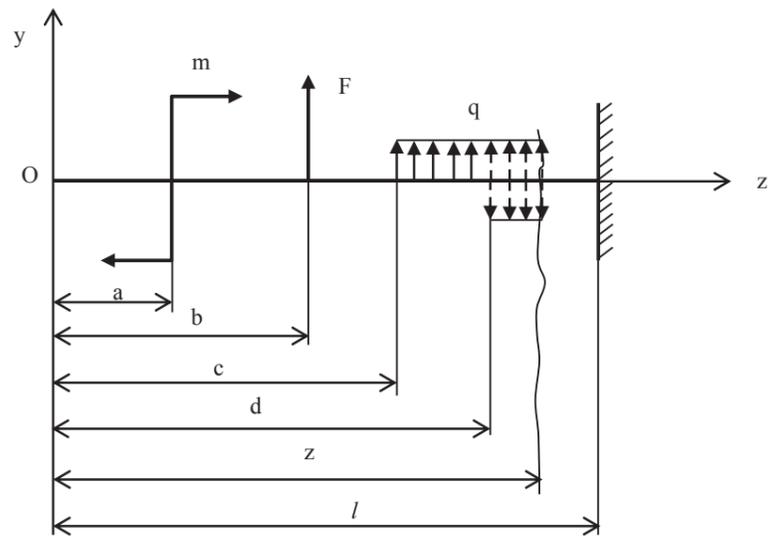


Рис. 44. Схема балки для определения перемещений методом начальных параметров

чений балки запишется:

$$\begin{cases} E \cdot I_x \cdot y'(z) = EI_x \varphi_0 + \sum \frac{m(z-a)}{1} + \sum \frac{F(z-b)^2}{2} + \sum \frac{q(z-c)^3}{6} - \sum \frac{q(z-d)^3}{6}; \\ E \cdot I_x \cdot y(z) = EI_x y_0 + EI_x \varphi_0 \cdot z + \sum \frac{m(z-a)^2}{2} + \sum \frac{F(z-b)^3}{6} + \sum \frac{q(z-c)^4}{24} - \sum \frac{q(z-d)^4}{24}. \end{cases}$$

Эти формулы называются универсальными уравнениями перемещений при изгибе. Если нагрузки имеют противоположное направление, то слагаемые следует брать со знаком «минус».

При использовании универсальных уравнений метода начальных параметров выполняют действия в следующей последовательности:

- 1) из уравнений равновесия балки определяются реакции связей (реакции опор);
- 2) в левом конце балки устанавливается начало координат;
- 3) для заданной нагрузки балки записываются универсальные уравнения метода начальных параметров;
- 4) из начальных условий определяются значения $EI_x \varphi_0$ и $EI_x y_0$;
- 5) записываются универсальные уравнения метода начальных параметров с учетом значений $EI_x \varphi_0$ и $EI_x y_0$;
- 6) для заданных значений текущей координаты z определяются углы поворота и прогибы поперечных сечений балки.

Энергетический метод определения перемещений основан на условии равенства работы внешних сил, приложенных к линейно деформируемой упругой системе, и внутренней потенциальной энергии деформации.

Работа произвольной совокупности статически приложенных внешних сил, согласно теории Клайперона, равна полусумме произведений конечного значения каждой силы F_i на конечное значение перемещения y_i по ее направлению (в данном случае прогиба): $W = \frac{1}{2} \sum F_i \cdot y_i$.

При поперечном изгибе в элементе дополнительно накапливается обусловленная поперечной силой энергия деформации сдвига. Однако, как показывают исследования, они пренебрежительно малы по сравнению с энергией чистого изгиба.

Внутренняя потенциальная энергия деформации при изгибе определяется по формуле:

$$U = \sum \int_{l_i} \frac{M_x^2 dz}{2E \cdot I_x}.$$

Из равенства работ внешних сил на перемещении и внутренней потенциальной энергии деформации определяют перемещение $\frac{1}{2} \sum F_i \cdot y_i = \sum \int_{l_i} \frac{M_x^2 dz}{2E \cdot I_x}$.

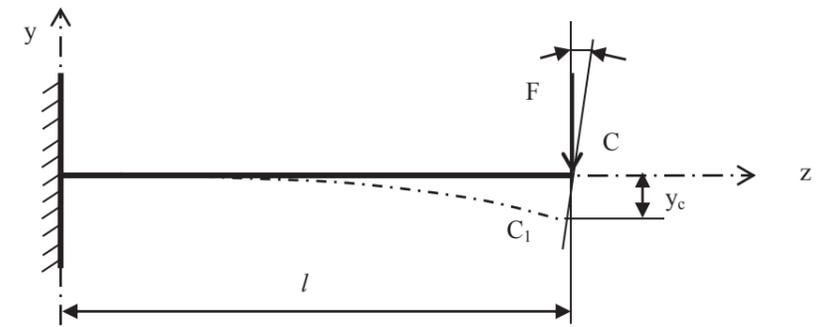


Рис. 45. Схема балки для определения перемещений энергетическим методом

Пример. Определить стрелу прогиба консоли, нагруженной на свободном конце сосредоточенной силой F (рис. 45).

Наибольший прогиб балки испытывает в точке C , точке приложения силы F . Работа внешней силы здесь будет равна: $W = \frac{1}{2} F y_c$.

Балка имеет один участок, внутренняя потенциальная энергия будет равна:

$$U = \int_0^l \frac{M_x^2 \cdot dz}{2E \cdot I_x} = \int_0^l \frac{(-F \cdot z)^2 dz}{2E \cdot I_x} = \frac{F^2 \cdot l^3}{6E \cdot I_x}.$$

Учитывая, что $W = U$, получим $y_c = \frac{F^2 \cdot l^3 \cdot 2}{6E \cdot I_x \cdot F} = \frac{F \cdot l^3}{3E \cdot I_x}$. Положительное значение прогиба

показывает, что он направлен в сторону действия внешней силы.

Рассмотренный энергетический метод определения перемещений для балки носит частный характер. Он применим лишь в тех случаях, когда на балку действует одна сила и необходимо определить прогиб в точке ее приложения. Для определения перемещения любой точки балки по действием заданной нагрузки можно использовать интеграл Мора.

Пусть требуется найти прогиб в произвольной точке K балки от силы F (рис. 46, а). Приложим к ненагруженной балке силу P в точке K (рис. 46, б). Соответствующее состояние балки является вспомогательным. Оно не существует в действительности, поэтому называется фиктивным.

Работа силы на перемещении Δ_{kP} (первая буква индекса указывает точку, где определяется перемещение, вторая – причину, вызвавшую это перемещение) определится по формуле: $W_{kP} = \frac{1}{2} P \cdot \Delta_{kP}$. Внутренняя потенциальная энергия деформации будет равна:

$$U_{kP} = \sum \int_{l_i} \frac{M_x^2 \cdot dz}{2E \cdot I_x}.$$

Из равенства $W_{kP} = U_{kP}$, получим $\frac{1}{2} P \cdot \Delta_{kP} = \sum \int_{l_i} \frac{M_x^2 \cdot dz}{2E \cdot I_x}$.

Приложим далее к балке, нагруженной силой P , задающую нагрузку F (рис. 46, в). Точка k получит дополнительное перемещение Δ_{kP} и сила P совершит дополнительную работу $W_{PF} = P \cdot \Delta_{kP}$.

В этом выражении отсутствует множитель $\frac{1}{2}$, так как в момент приложения нагрузки F сила P уже действовала и не меняла свое значение.

Нагрузка F совершает работу на перемещении Δ_{FP} точки ее приложения: $W_{FF} = \frac{1}{2} F \cdot \Delta_{FF}$.

Соответствующая внутренняя потенциальная энергия деформации: $U_{FF} = \sum \int_{l_i} \frac{M_x^2 \cdot dz}{2E \cdot I_x}$. Уравнение энергетического баланса: $W_{FF} = U_{FF}$.

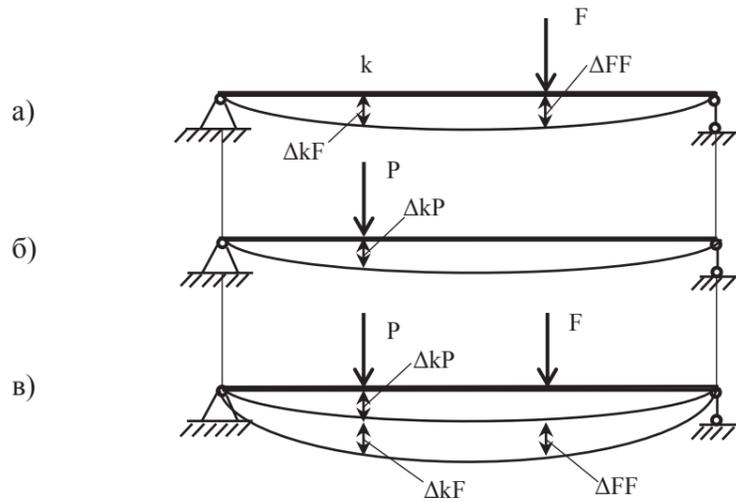


Рис. 46. Схема балки для определения перемещений методом Мора

$$\frac{1}{2} F \cdot \Delta_{FF} = \sum \int_{l_i} \frac{M_x^2 \cdot dz}{2E \cdot I_x}$$

Общая величина работы, совершаемая балкой под действием сил P и F, представляет собой сумму трех слагаемых: $W = W_{kP} + W_{FF} + W_{PF} = \frac{1}{2} P \cdot \Delta_{kP} + \frac{1}{2} F \cdot \Delta_{FF} + P \cdot \Delta_{kF}$.

Внутренняя потенциальная энергия деформации при совместном действии сил P и F, согласно принципу суперпозиции действия сил при $M_x = M_{xP} + M_{xF}$ будет равна:

$$U = \sum \int_{l_i} \frac{(M_{xP} + M_{xF})^2 dz}{2E \cdot I_x}$$

Раскрывая скобки, получаем: $U = \sum \int_{l_i} \frac{(M_{xP})^2 dz}{2E \cdot I_x} + \sum \int_{l_i} \frac{(M_{xF})^2 dz}{2E \cdot I_x} + \sum \int_{l_i} \frac{(M_{xP} \cdot M_{xF}) dz}{E \cdot I_x}$.

Приравняем полную работу и внутреннюю энергию:

$$\frac{1}{2} P \cdot \Delta_{kP} + \frac{1}{2} F \cdot \Delta_{FF} + P \cdot \Delta_{kF} = \sum \int_{l_i} \frac{(M_{xP})^2 dz}{2E \cdot I_x} + \sum \int_{l_i} \frac{(M_{xF})^2 dz}{2E \cdot I_x} + \sum \int_{l_i} \frac{(M_{xP} \cdot M_{xF}) dz}{E \cdot I_x}$$

Из уравнения получаем, что $P \cdot \Delta_{kF} = \sum \int_{l_i} \frac{(M_{xP} \cdot M_{xF}) dz}{E \cdot I_x}$, откуда

$$\Delta_{kF} = \sum \int_{l_i} \frac{\frac{M_{kP}}{P} \cdot M_{xF} \cdot dz}{E \cdot I_x} = \sum \int_{l_i} \frac{M_1 \cdot M_{xF} \cdot dz}{E \cdot I_x}$$

Полученная формула $\Delta_{kF} = \sum \int_{l_i} \frac{M_1 \cdot M_{xF} \cdot dz}{E \cdot I_x}$ называется интегралом Мора, где Δ_{kF} – прогиб в рассматриваемом сечении;

M_{xF} – изгибающий момент от заданной нагрузки, выраженный как функция от координаты z;
 M_1 – единичный момент, выраженный как функция от координаты z от безразмерной единичной силы, приложенной в точке, где определяется прогиб балки или единичный момент при определении углов поворота поперечных сечений.

Если балка имеет постоянную жесткость, то ее перемещения можно определить:

$$\Delta_{kF} = \sum \frac{1}{E \cdot I_x} \int_{l_i} M_1 \cdot M_{xF} \cdot dz$$

С физической точки зрения интеграл Мора представляет собой работу единичной силы на перемещении точки ее приложения, вызванном реальной нагрузкой.

Рассмотрим на примере применение интеграла Мора. Для консольно закрепленной балки (рис. 47, а) нужно определить прогиб и угол поворота в сечении С.

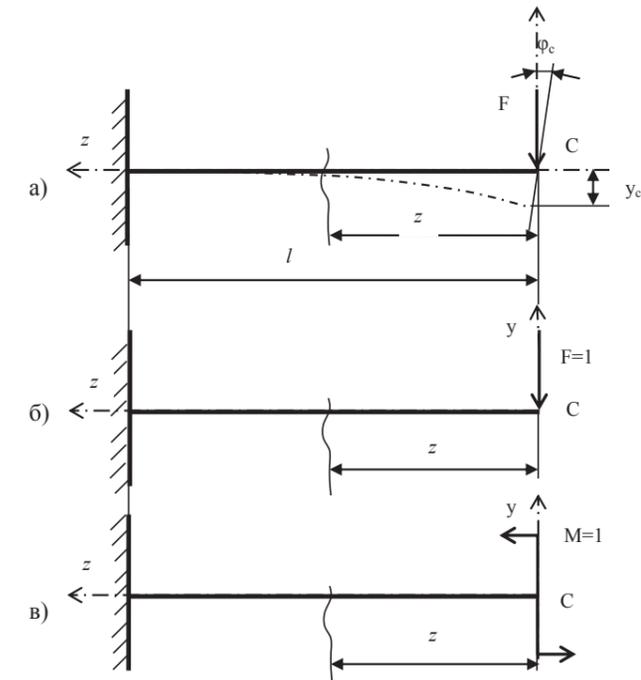


Рис. 47. Расчетная схема балки (а), фиктивной балки, нагруженной единичной силой (б) и единичным моментом (в)

Поместим начало координат в точку С балки. Изгибающий момент от внешней силы F будет равен $M_F = -F \cdot z$.

Для определения прогиба балки в точке С возьмем фиктивную балку (рис. 47, б) и нагрузим ее единичной силой F1. Изгибающий момент от единичной силы F1 будет равен $M_1 = -1 \cdot z$. Подставляя значение M_F и M_1 в интеграл Мора, получим прогиб балки в точке С:

$$\begin{aligned} y_C &= \sum \frac{1}{E \cdot I_x} \int_{l_i} M_1 \cdot M_{xF} \cdot dz = \frac{1}{E \cdot I_x} \int_0^l [(-z) \cdot (-Fz)] dz = \frac{1}{E \cdot I_x} \int_0^l (Fz^2) dz = \\ &= \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \frac{Fz^3}{3} \Big|_0^l = \frac{Fl^3}{3E \cdot I_x} \end{aligned}$$

Положительное значение прогиба показывает, что он направлен в сторону действия единичной силы.

Для определения угла поворота поперечного сечения балки в точке С возьмем фиктивную балку (рис. 47, в) и нагрузим ее единичным моментом $M_1 = 1$. Изгибающий момент от единичного момента M_1 будет равен $M = 1$. Подставляя значение M_F и M_1 в интеграл Мора, получим угол поворота поперечного сечения балки в точке С:

$$\begin{aligned} \varphi_C &= \sum \frac{1}{E \cdot I_x} \int_{l_i} M_1 \cdot M_{xF} \cdot dz = \frac{1}{E \cdot I_x} \int_0^l [1 \cdot (-Fz)] dz = \frac{1}{E \cdot I_x} \int_0^l (-Fz) dz = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left(-\frac{Fz^2}{2} \right) \Big|_0^l = \\ &= -\frac{Fl^2}{2E \cdot I_x} \end{aligned}$$

Отрицательное значение угла поворота показывает, что поперечное сечение поворачивается в противоположную сторону действия единичного момента.

Правило Верещагина значительно упрощает технику определения перемещений благода-

ря применению специального графоаналитического приема для вычисления интеграла вида

$$\int_a^b M_F \cdot M_1 dz, \text{ где } a \text{ и } b \text{ – пределы интегрирования.}$$

Поскольку подынтегральное выражение можно трактовать как произведение ординат эпюры изгибающих моментов M_F от действующей внешней нагрузки на ординаты эпюры моментов M_1 от единичной нагрузки, этот прием называют способом перемножения эпюр. Он предложен в 1925 году студентом Московского института железнодорожного транспорта А. К. Верещагиным.

Сущность способа заключается в том, что результат перемножения эпюр, из которых одна линейная, а другая произвольная, равен произведению площади эпюры произвольного очертания на расположенную под ее центром тяжести ординату линейной эпюры.

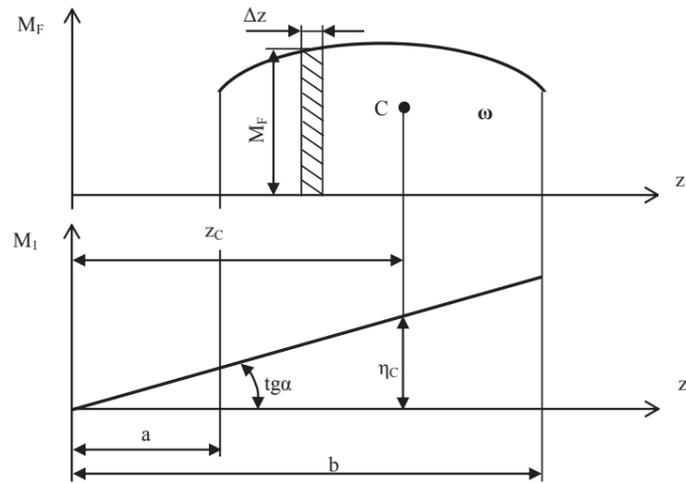


Рис. 48. Схема для определения правила Верещагина

Пусть грузовая эпюра имеет произвольные очертания (не линейна), а единичная – линейна (рис. 48), то есть подчиняется уравнению $M_1 = z \cdot \operatorname{tg}\alpha$, где α – угол наклона эпюры к оси абсцисс. Подставляя это уравнение в подынтегральное выражение, получим:

$$\int_a^b M_F \cdot M_1 dz = \int_a^b M_F \cdot z \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot dz = \operatorname{tg}\alpha \int_a^b M_F \cdot z dz.$$

Выражение $\int_a^b M_F \cdot z dz$ есть не то иное, как статический момент элементарной площади

$d\omega = M_F \cdot dz$ грузовой эпюры относительно оси ординат. Тогда интеграл представляет собой статический момент площади ω всей грузовой эпюры:

$$S_{y\omega} = \int_a^b M_F \cdot z dz = \omega \cdot z_c.$$

Следовательно, $\int_a^b M_F \cdot M_1 dz = S_{y\omega} \cdot \operatorname{tg}\alpha = \omega \cdot z_c \cdot \operatorname{tg}\alpha$. Так как $z_c \cdot \operatorname{tg}\alpha$ характеризует ординату η_c единичной эпюры, расположенной под центром тяжести грузовой, то окончательно:

$$\int_a^b M_F \cdot M_1 dz = \omega \cdot \eta_c.$$

Левая часть формулы отличается от интеграла Мора только жесткостью сечения, поэтому, вводя в формулу жесткость сечения, получим математическое выражение правила Верещагина:

$$\Delta = \sum \frac{\omega_i \cdot \eta_{ci}}{E \cdot I_{xi}}.$$

Эта зависимость справедлива для любой балки постоянного сечения.

При использовании правила Верещагина следует применять следующие рекомендации.

1. Результат перемножения эпюр положителен, если эпюра и ордината η_c под ее центром тяжести имеют одинаковый знак, и отрицателен, если противоположные знаки.
2. Ординату η_c следует брать всегда с линейной эпюры (то есть на этом участке эпюра должна монотонно возрастать либо убывать). Если эпюра ломанная, то рассматривается как два участка.
3. Если обе эпюры линейны, то безразлично, у какой из них брать площадь, а у какой ординату.
4. При перемножении трапециевидных эпюр нет необходимости находить положение центра тяжести всей фигуры, легче разбить эпюру на простые фигуры, для которых известна площадь и положение центра тяжести.

Для упрощения вычисления перемножения эпюр (рис. 49) пользуются универсальной формулой Симпсона:

$$\Delta = \sum \frac{l_i}{6E \cdot I_x} (ab + 4mn + cd),$$

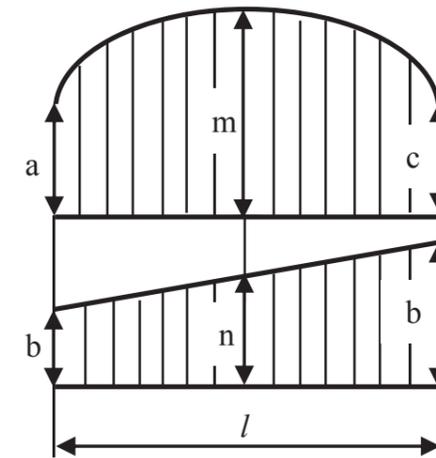


Рис. 49. Схема для пояснения формулы Симпсона

где l_i – длина участка;

a, b – ординаты эпюр в начале участка;

c, d – ординаты эпюр в конце участка;

m, n – ординаты эпюр в середине участка. Ординаты эпюр берутся со своими знаками.

После расчета балки на прочность производят ее проверку на жесткость. Определяют в балке прогибы и сравнивают их с допустимыми или нормативными.

Условие жесткости записывается в виде: $y_{\max} \leq [y]$.

Величину допускаемого прогиба балки $[y]$ назначают не по абсолютной величине, а в относительных единицах – в долях прогиба от длины пролета балки: $[y] = \frac{l}{250} \dots \frac{l}{600}$.

Условие жесткости чаще всего записывается в виде: $\frac{y_{\max}}{l} \leq \frac{[y]}{l}$.

Вопросы для самопроверки:

1. Что называется балкой? Привести три типа опорных закреплений и показать для них опорные реакции.
2. Дать определение прямого поперечного изгиба и прямого чистого изгиба.
3. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для заданной балки. Объяснить правило знаков для поперечных сил и изгибающих моментов.
4. Привести дифференциальные зависимости между поперечной силой, изгибающим моментом и распределенной нагрузкой.
5. Написать формулу для определения нормального напряжения при изгибе. Построить эпюру распределения нормальных напряжений по высоте прямоугольного сечения балки.
6. Что называется осевым моментом сопротивления? Привести формулу для вычисления осевого момента сопротивления прямоугольного сечения.
7. Написать условие прочности по нормальным напряжениям.

8. Привести наиболее выгодные формы сечений балок при изгибе (по расходу материала).
9. Привести формулу Журавского для определения касательных напряжений при изгибе, а также формулу для определения максимального касательного напряжения для балки прямоугольного сечения. Построить эпюру распределения касательных напряжений по высоте прямоугольного сечения балки.
10. Написать условие прочности балок по касательным напряжениям.
11. Написать условие прочности балок по эквивалентным напряжениям с применением теорий прочности.
12. Записать дифференциальное уравнение изогнутой оси балки, дать определение прогиба и угла поворота сечения.
13. Как определяются прогибы и углы поворота сечения методом начальных параметров, с помощью интеграла Мора, правила Верещагина?
14. Написать условие жесткости балок при изгибе.
15. Как рассчитываются балки равного сопротивления изгибу?
16. Объяснить расчет статически неопределимых балок методом сравнения деформаций.

9. Сложное сопротивление.

Сложное сопротивление – это такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях возникает одновременно несколько внутренних силовых факторов. К сложному сопротивлению относятся кривой изгиб, внецентренное растяжение (сжатие), изгиб с кручением и другие виды. При рассмотрении сложного сопротивления применяется метод суперпозиции сил и деформаций. При оценке прочности и жесткости руководствуются следующей последовательностью действий.

1. Проектируют действующую внешнюю нагрузку на центральные плоскости инерции сечений. Обычно их совмещают с вертикальной и горизонтальной плоскостями.
2. От внешней нагрузки в каждой плоскости строятся эпюры внутренних силовых факторов, по которым определяются опасные участки или опасные сечения, а также предположительно опасные сечения. К опасным участкам или опасным сечениям относятся такие, где действуют максимальные по величине внутренние силовые факторы. К предположительно опасным сечениям относятся такие, где действуют максимальные и значительные по величине внутренние силовые факторы.
3. Для опасного или предположительно опасного сечения определяются напряжения и строятся эпюры распределения напряжений по поперечному сечению, по которым определяются опасные точки поперечного сечения. Это точки, где действуют максимальные по величине напряжения.
4. Для опасных точек поперечного сечения записывается условие прочности и проводится проверка выполнения условия прочности. Максимальные напряжения в опасных точках определяются алгебраическим сложением в случае одноименных напряжений (только нормальных или только касательных). Если напряжения в поперечном сечении разноименные, то проверку прочности проводят по эквивалентным напряжениям с использованием теорий прочности (теории наибольших касательных напряжений, энергетической теории прочности, теории прочности Мора).
5. При оценке деформаций определяются деформации в горизонтальной и вертикальной плоскостях. Далее идет геометрическое сложение деформаций. Оценка жесткости производится по максимальной величине суммарной деформации.

Кривой изгибом называется такой вид изгиба, при котором плоскость действия изгибающего момента проходит через центр тяжести сечения и не совпадает ни с одной из главных центральных осей инерции сечения. Кривой изгиб может быть чистым (в поперечном сечении возникает только изгибающий момент, рис. 50, а) и поперечным (в поперечном сечении возникает изгибающий момент и поперечная сила, рис. 50, б).

При анализе кривой изгиба (рис. 51) его удобнее рассматривать как одновременный изгиб в двух главных плоскостях zox , $zoу$. Для этого изгибающий момент от силовых факторов раскладывается на составляющие моменты относительно осей x и y :

$$M_y = M_{\text{и}} \cdot \cos \alpha; M_x = M_{\text{и}} \cdot \sin \alpha.$$

Нормальные напряжения в точке k , имеющей координаты x и y , определяются изгибающими моментами M_x и M_y то есть:

$$\sigma_k = \frac{M_x \cdot y}{I_x} + \frac{M_y \cdot x}{I_y} = M_{\text{и}} \left(\frac{y}{I_x} \cdot \sin \alpha + \frac{x}{I_y} \cdot \cos \alpha \right).$$

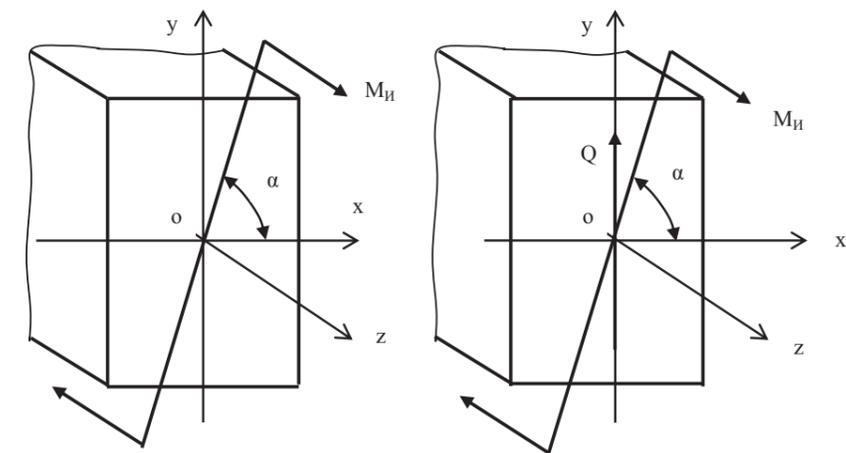


Рис. 50. Виды кривой изгиба: а) чистый, б) поперечный

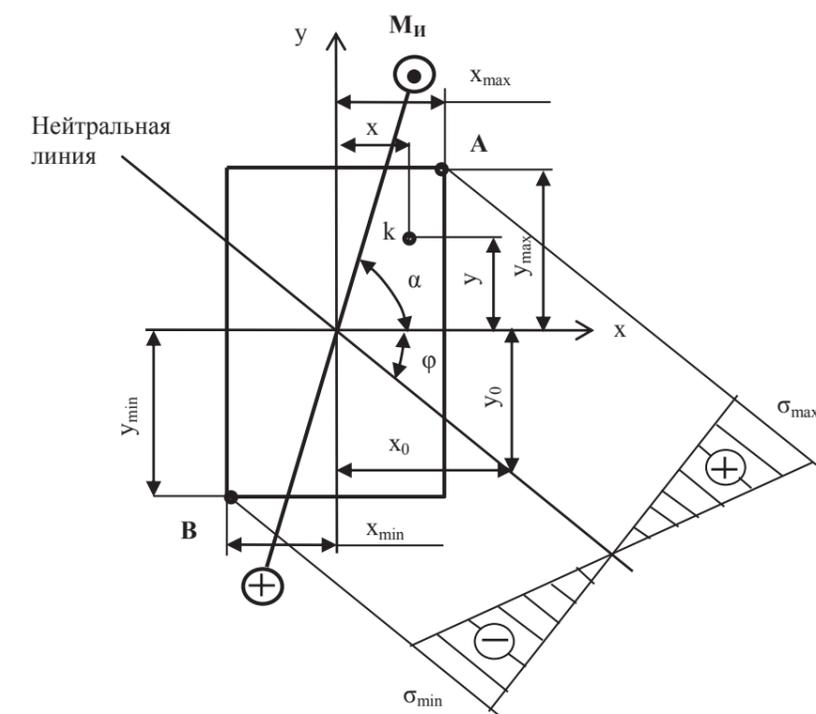


Рис. 51. Схема кривой изгиба

Величина напряжений возрастает с увеличением координат x и y и максимальной будет на самой удаленной точке от нейтральной линии.

Уравнение нейтральной линии находится из условия $\sigma = 0$. Приравнявая в полученном уравнении $\sigma_k = 0$, получим уравнение нейтральной линии: $M_{\text{и}} \left(\frac{y_0}{I_x} \cdot \sin \alpha + \frac{x_0}{I_y} \cdot \cos \alpha \right) = 0$ или при $M_{\text{и}} \neq 0$ получим $\left(\frac{y_0}{I_x} \cdot \sin \alpha + \frac{x_0}{I_y} \cdot \cos \alpha \right) = 0$, где x_0 и y_0 – текущие координаты нейтральной линии. Уравнение нейтральной линии будет в виде: $y_0 = -x_0 \cdot \frac{I_x}{I_y} \cdot \operatorname{ctg} \alpha = -x_0 \cdot \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_x}{I_y}$.

Задаваясь текущими координатами нейтральной линии, можно построить ее или, обозначая угол наклона нейтральной оси к оси ox через φ , получить:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{y_0}{x_0} = \frac{I_x}{I_y} \operatorname{ctg} \alpha.$$

При косом изгибе $\varphi + \alpha \neq 90^\circ$, то есть нейтральная линия не перпендикулярна плоскости изгибающего момента. Балка в этом случае предпочитает изгибаться не в плоскости изгибающего момента, а в некоторой другой плоскости, где жесткость на изгиб будет меньше. Поэтому нейтральная линия не перпендикулярна плоскости изгибающего момента, а несколько повернута в сторону оси минимального момента инерции поперечного сечения.

Для определения максимальных напряжений при косом изгибе важно знать наиболее удаленную точку поперечного сечения от нейтральной линии. Когда сечение имеет простую форму (круг, прямоугольник), просто найти такую точку. В случаях сложного сечения прибегают к графическому методу. Для этого сечение вычерчивают в масштабе и проводят главные оси x и y . Параллельно нейтральной линии проводят касательные к контуру сечения. Точки касания и будут самыми удаленными точками поперечного сечения, они будут опасными, так как в них будут действовать экстремальные напряжения. Для рисунка 51 это точки A и B . От них графически определяют x_{\max} , y_{\max} и x_{\min} , y_{\min} .

Расчет балок на прочность при косом изгибе проводят по нормальным напряжениям для опасных точек поперечного сечения. Если материал балки пластичный, то проверяется наиболее удаленная точка поперечного сечения от нейтральной линии. Условие прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x \cdot y_{\max}}{I_x} + \frac{M_y \cdot x_{\max}}{I_y} \leq [\sigma].$$

Если балка изготовлена из хрупкого материала, то проверка прочности ведется по наиболее удаленной точке поперечного сечения в области сжатия и растяжения. Условие прочности в этом случае записывается в виде:

$$\begin{cases} \sigma_{\max} = \frac{M_x \cdot y_{\max}}{I_x} + \frac{M_y \cdot x_{\max}}{I_y} \leq [\sigma_p] \\ \sigma_{\min} = \frac{M_x \cdot y_{\min}}{I_x} + \frac{M_y \cdot x_{\min}}{I_y} \leq [\sigma_c]. \end{cases}$$

При определении деформаций при косом изгибе отдельно определяется деформация в горизонтальной x_r и вертикальной y_b плоскостях методом начальных параметров либо с помощью интеграла Мора или правила Верещагина (рис. 52).

Общий прогиб при косом изгибе определяется по формуле: $y = \sqrt{x_r^2 + y_b^2}$. Направление стрелы прогиба определит угол γ , равный: $\operatorname{tg} \gamma = \frac{y_b}{x_r}$.

Внецентренное растяжение (сжатие) – такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях одновременно действуют продольная сила N и изгибающие моменты M_x , M_y . Внешняя сила F может быть приложена не в центре тяжести поперечного сечения, а с некоторым смещением относительно центральных осей инерции сечения (рис. 53). В этом случае в брусе в отличие от центрального сжатия (растяжения) кроме продольных сил возникают изгибающие моменты. Точка приложения силы называется центром давления, или полюсом.

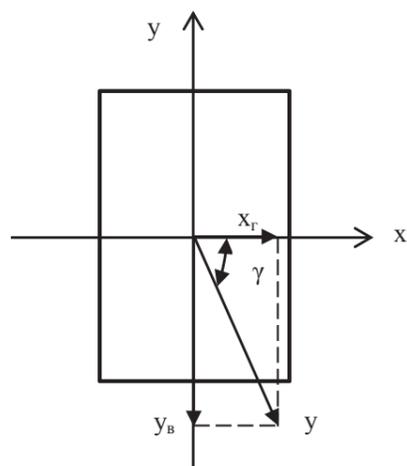


Рис. 52. Схема определения перемещений при косом изгибе

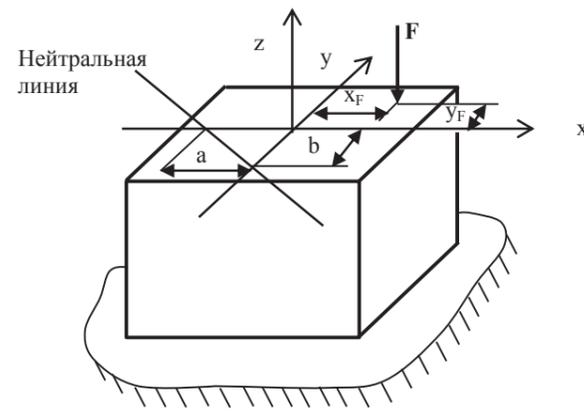


Рис. 53. Схема внецентренного нагружения бруса

Исходя из принципа суперпозиции, нормальное напряжение в произвольной точке с координатами x и y будет равно алгебраической сумме напряжений от продольной силы N и изгибающих моментов M_x , M_y :

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_y} + \sigma_{M_x} = \frac{N}{A} + \frac{M_y \cdot x}{I_y} + \frac{M_x \cdot y}{I_x}.$$

Знаки в формуле: $N > 0$ – если сила растягивающая, M_x и $M_y > 0$, если моменты «растягивают» сечение в I четверти. Внецентренное сжатие похоже на косой изгиб, только добавляется продольная сила.

При произвольной форме поперечного сечения необходимо знать максимальные напряжения. Для этого определяют положение нейтральной линии, и от нее определяют наиболее удаленные точки поперечного сечения, и для них определяют максимальные напряжения. Учитывая, что $N = F$, $M_x = F \cdot y_F$, а $M_y = F \cdot x_F$ и $i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$, а $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$, уравнение нейтральной линии при $\sigma = 0$ можно определить:

$$\frac{F}{A} + \frac{M_y \cdot x_0}{I_y} + \frac{M_x \cdot y_0}{I_x} = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot y_F \cdot y_0}{I_x} + \frac{N \cdot x_F \cdot x_0}{I_y} = \frac{N}{A} \left[\frac{y_F \cdot y_0}{i_x^2} + \frac{x_F \cdot x_0}{i_y^2} + 1 \right] = 0,$$

где x_0 и y_0 – текущие координаты нейтральной линии.

Приняв $a = -\frac{i_y^2}{x_F}$ и $b = -\frac{i_x^2}{y_F}$, уравнение нейтральной линии запишется в виде: $\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} = 1$.

Поочередно задавая координатами:

$$\begin{cases} x_0 = 0; y_0 = b = -\frac{i_x^2}{y_F}, \\ y_0 = 0; x_0 = a = -\frac{i_y^2}{x_F}, \end{cases}$$

находим положение нейтральной линии (см. рис. 54), где a и b – отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях координат. Определив положение нейтральной линии, находим опасные точки поперечного сечения. Для этого к контуру поперечного сечения проводятся касательные параллельно нейтральной линии и находятся наиболее удаленные точки от нейтральной линии (точки A и B , рис. 54). Для этих точек определяются координаты (x_{\max} , y_{\max} ; x_{\min} , y_{\min}) и записывается условие прочности.

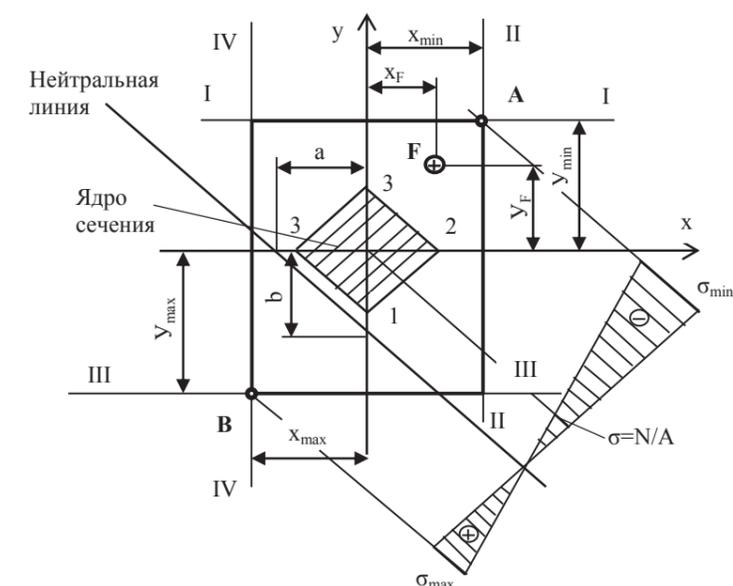


Рис. 54. Определение ядра сечения

Для бруса, изготовленного из пластичного материала, проверка прочности выполняется по координате, наиболее удаленной от нейтральной оси точки поперечного сечения:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y \cdot x}{I_y} + \frac{M_x \cdot y}{I_x} \leq [\sigma].$$

Для бруса, изготовленного из хрупкого материала, проверка прочности выполняется по максимальным нормальным напряжениям по координатам наиболее удаленных от нейтральной оси точек, расположенных в растянутой и сжатой областях поперечного сечения:

$$\begin{cases} \sigma_A = -\frac{N}{A} - \frac{M_y \cdot x_{min}}{I_y} - \frac{M_x \cdot y_{min}}{I_x} \leq [\sigma_c] \\ \sigma_B = -\frac{N}{A} + \frac{M_y \cdot x_{max}}{I_y} + \frac{M_x \cdot y_{max}}{I_x} \leq [\sigma_p]. \end{cases}$$

Нейтральная линия может как проходить через сечение, так и не пересекать его, в этом случае во всем сечении напряжения будут одного знака: растягивающие или сжимающие. Это важно, например, при расчете опор мостов, кирпичных колон, которые плохо сопротивляются растяжению, и надо, чтобы они только сжимались. Это возможно, если сжимающая сила F приложена вблизи центра тяжести поперечного сечения. Область вокруг центра тяжести сечения, внутри которой приложение силы F вызывает в сечении напряжения одного знака, называется ядром сечения.

Чтобы получить очертание ядра сечения, надо задать несколько положений нейтральной линии, касательных к контуру сечения (сечения I-I, II-II, III-III, IV-IV), определить отсекаемые ими отрезки на координатных осях (x_0, y_0) и вычислить соответствующие координаты точки приложения

силы F: $x_F = -\frac{i_y^2}{x_0}$; $y_F = -\frac{i_x^2}{y_0}$, которые будут являться координатами контура ядра сечения. Для

прямоугольного сечения – ядро сечения ромб (рис. 54) с диагоналями, равными одной трети соответствующей стороны сечения, для круга – круг радиусом R/4, для двутавра – ромб.

Изгиб с кручением – это такой вид деформации, при которой в поперечном сечении бруса действуют крутящий и изгибающий моменты. Этот вид деформации возникает в валах под действием передаваемых шкивами вращающих моментов и изгибающих усилий от натяжения ремней или сил, действующих в зубчатом зацеплении.

Пусть на брус круглого поперечного сечения действуют скручивающий момент M и внешняя сила F (см. рис. 55).

Внешняя сила F вызывает изгибающий момент $M_{из} = -F \cdot z$ и поперечную силу $Q_y = F$, которая в расчетах не учитывается, а скручивающий момент – крутящий момент $M_{кр} = -M$. Строим эпюры внутренних силовых факторов (рис. 55 а). По эпюрам определяем опасное сечение. В нашем случае это сечение заделки, где действует максимальный изгибающий момент и крутящий момент. От изгибающего момента будут возникать нормальные напряжения, экстремальная величина которых будет находиться в точках А и В поперечного сечения (рис. 55 б) и будет равна: $\sigma = \frac{M_{из}}{W_x}$; $W_x = \frac{\pi D^3}{32}$.

Максимальные касательные напряжения от крутящего момента будут действовать в плоскости сечения на поверхности вала, направление их будет перпендикулярно нормальным напряжениям, и они равны: $\tau = \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{M_{кр}}{2W_x}$; $W_p = 2W_x = \frac{\pi D^3}{16}$.

Так как в поперечном сечении вала действуют разноименные напряжения, нормальные и касательные, то прочность такого вала оценивается эквивалентными напряжениями по теории наибольших касательных напряжений или теории формоизменения:

$$\sigma_{эkv_{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad \text{или} \quad \sigma_{эkv_{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}.$$

Условие прочности записывается по теории наибольших касательных напряжений:

$$\sigma_{эkv_{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{из}}{W_x}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{кр}}{2W_x}\right)^2} = \sqrt{\frac{M_{из}^2 + M_{кр}^2}{W_x^2}} \leq [\sigma].$$

По теории формоизменения:

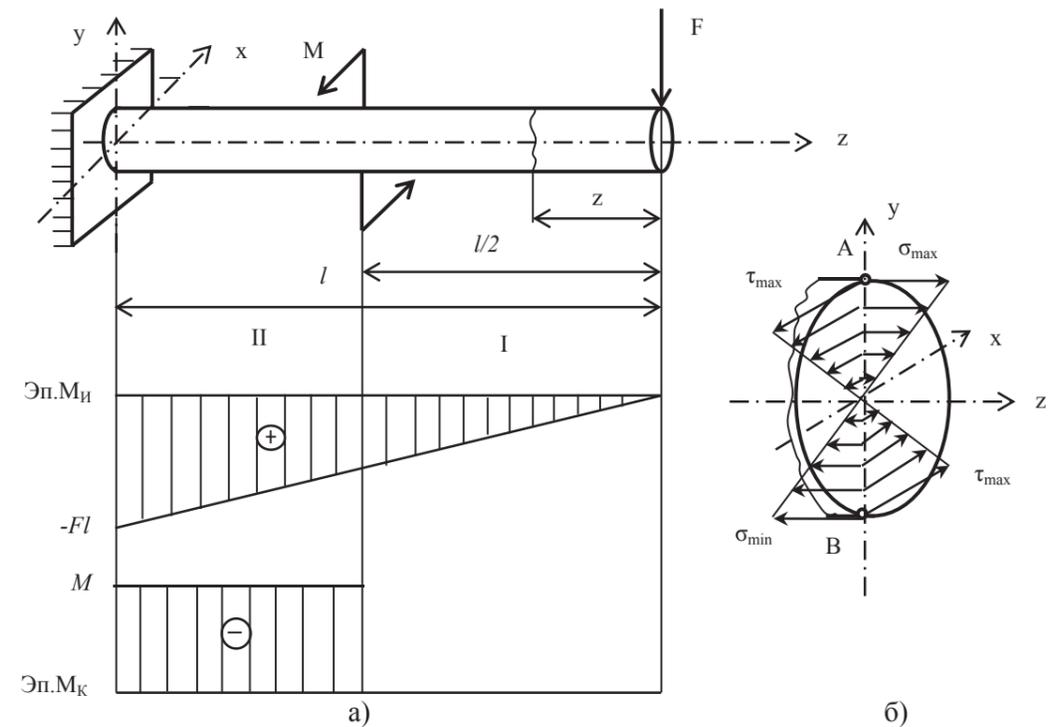


Рис. 55. Схема деформации изгиба с кручением (а) и распределение напряжений в опасном сечении (б)

$$\sigma_{эkv_{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{из}}{W_x}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{кр}}{2W_x}\right)^2} = \sqrt{\frac{M_{из}^2 + 0,75M_{кр}^2}{W_x^2}} \leq [\sigma].$$

Сложное сопротивление возникает в поперечных сечениях пространственного бруса с ломаным очертанием, нагруженного внешними силами.

При решении задач с пространственным брусом вводятся следующие допущения:

– для каждого участка вводится местная система координат. Ось z направляется от сечения вдоль продольной оси. Оси x и y расположены в плоскости сечения, причем при повороте оси x против часовой стрелки на угол 90° она должна совпасть с осью y.

Правило знаков для внутренних силовых факторов:

- продольная сила N положительна, если она растягивающая, и отрицательна, если сжимающая;
- поперечная сила Q положительна, если совпадает с направлением оси x или y;
- крутящий момент $M_{кр}$ положителен, если направлен против часовой стрелки;
- знак изгибающего момента M_x и M_y роли не играет. Эпюра строится на растянутых волокнах. При составлении уравнений равновесия изгибающий момент направляется против часовой стрелки относительно оси и считается положительным.

При отбрасывании одной из частей все внутренние силовые факторы в местной системе координат проставляются с положительными направлениями. После решения уравнений статики усилия получаются либо положительными, либо отрицательными (тогда направление внутренних силовых факторов меняется на противоположное начальному направлению).

Рассмотрим последовательность определения внутренних силовых факторов, построения эпюр и определения вида сложного сопротивления на примере ломаного бруса, общий вид которого представлен на рисунке 56.

Последовательность решения.

1. Изображаем расчетную схему (рис. 57).
2. Опорные реакции в заделке определяются из условий статики в местной системе координат III участка (рис. 57):

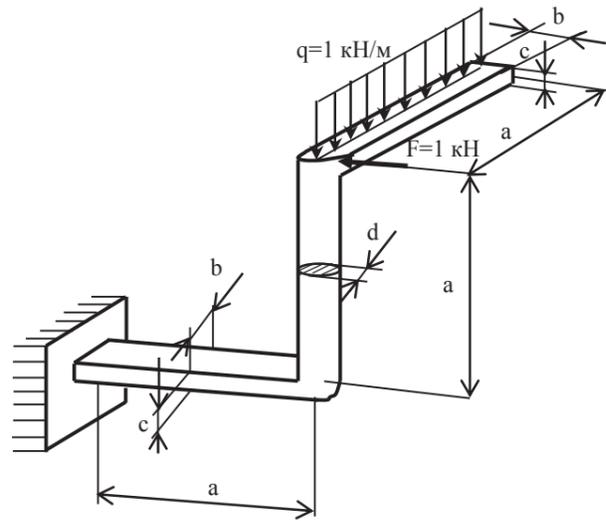


Рис. 56. Общий вид бруса

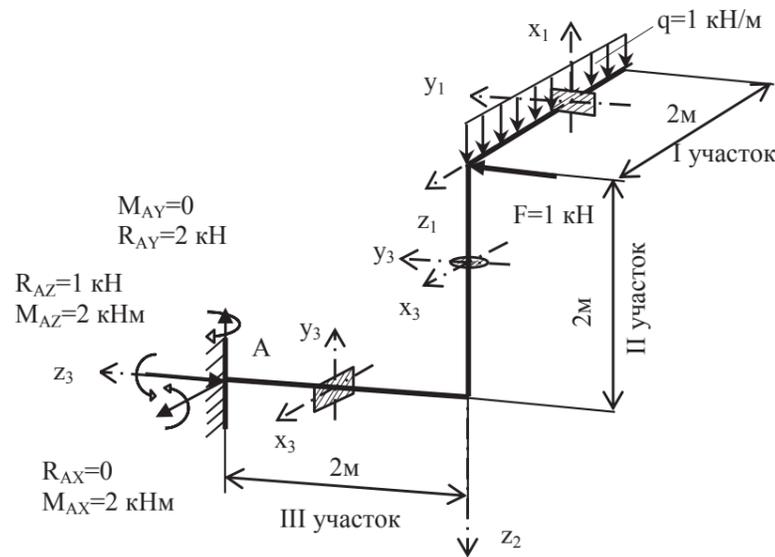


Рис. 57. Расчетная схема бруса

$$\sum x_3 = 0; R_{AX} = 0.$$

$$\sum y_3 = 0; R_{AY} - q \cdot a = 0. R_{AY} = q \cdot a = 1 \cdot 2 = 2 \text{ кН.}$$

$$\sum z_3 = 0; R_{AZ} + F = 0. R_{AZ} = -F = -2 \text{ кН.}$$

$$\sum m_{x_3} = 0; M_{AX} + F \cdot a - q \cdot a \cdot a = 0. M_{AX} = -F \cdot a + q \cdot a^2 = -1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 2 \text{ кНм.}$$

$$\sum m_{y_3} = 0; M_{AY} = 0.$$

$$\sum m_{z_3} = 0; M_{AZ} + F - q \cdot a \cdot \frac{a}{2} = 0. M_{AZ} = q \cdot \frac{a^2}{2} = 1 \cdot 2 = 2 \text{ кНм.}$$

Для консольно закрепленной балки их можно не определять, но нумерация участков тогда должна вестись со свободного конца бруса.

3. Разбиваем брус на участки. Границы участков – точки приложения сил и моментов, начало и

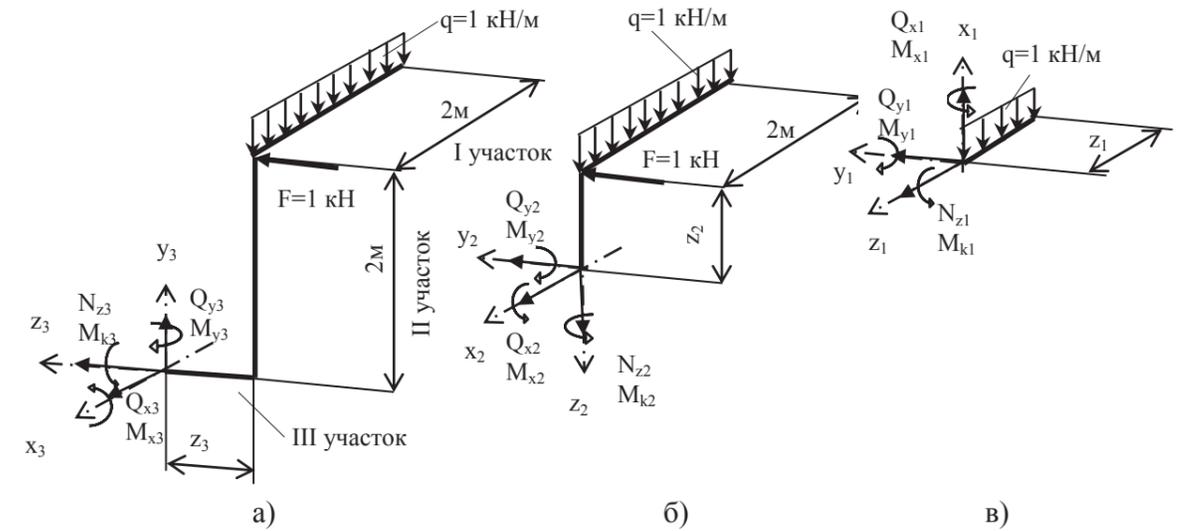


Рис. 58. К определению внутренних силовых факторов:
а) на III участке; б) на II участке; в) на I участке

конец приложения распределенной нагрузки и сечения изгиба бруса.

4. Методом сечений определяем значение внутренних силовых факторов на каждом из участков. Расчет внутренних силовых факторов по участкам приведен в таблице 1, а расчетные схемы – на рисунке 58 а, б, в.

Таблица 1

Расчет внутренних силовых факторов ломаного бруса

№ уч-ка	z	Уравнения статики, определение усилий	Вид деформации
I	$0 \leq z_1 \leq 2\text{м}$		$Q_{x_1}; M_{y_1}$
I		$\sum x_1 = 0; Q_{x_1} - q \cdot z_1 = 0; Q_{x_1} = q \cdot z_1;$ $z_1 = 0; Q_{x_1} = 0; z_1 = 2\text{м}; Q_{x_1} = 2\text{кН}$ $\sum y_1 = 0; Q_{y_1} = 0;$ $\sum z_1 = 0; N_1 = 0;$ $\sum m_{x_1} = 0; M_{x_1} = 0;$ $\sum m_{y_1} = 0; M_{y_1} + q \cdot z_1^2 / 2 = 0; M_{y_1} = -q \cdot z_1^2 / 2;$ $z_1 = 0; M_{y_1} = 0; z_1 = 2\text{м}; M_{y_1} = -2\text{кНм}$ $\sum m_{z_1} = 0; M_{k_1} = 0.$	Поперечный прямой изгиб
II	$0 \leq z_2 \leq 2\text{м}$	$\sum x_2 = 0; Q_{x_2} = 0;$ $\sum y_2 = 0; Q_{y_2} + F = 0; Q_{y_2} = -F = -1\text{кН};$	$N_{z_2}; Q_{x_2}; M_{x_2}; M_{y_2}$ – сложное сопротивление.

№ уч-ка	$\leq z \leq$	Уравнения статики, определение усилий	Вид деформации
		$\sum z_2 = 0; N_2 + q \cdot 2 = 0; N_2 = -q \cdot 2 = -2кН;$ $\sum m_{x_2} = 0; M_{x_2} - F \cdot z_2 = 0; M_{x_2} = F \cdot z_2;$ $z_2 = 0; M_{x_2} = 0; z_2 = 2м; M_{x_2} = F \cdot 2 = 2кНм;$ $\sum m_{y_2} = 0; M_{y_2} + q \cdot 2 \cdot 1 = 0; M_{y_2} = -q \cdot 2 \cdot 1 = -2кНм;$ $\sum m_{z_2} = 0; M_{k_2} = 0.$	Изгиб со сжатием и сдвигом
III	$0 \leq z_3 \leq 2м$	$\sum x_3 = 0; Q_{x_3} = 0;$ $\sum y_3 = 0; Q_{y_3} - q \cdot 2 = 0; Q_{y_3} = q \cdot 2 = 2кН;$ $\sum z_3 = 0; N_3 + F = 0; N_3 = -F = -1кН;$ $\sum m_{x_3} = 0; M_{x_3} = 0; M_{x_3} + F \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot z_3;$ $M_{x_3} = -F \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot z_3;$ $z_3 = 0; M_{x_3} = -F \cdot 2 = -2кН \cdot м;$ $z_3 = 2м; M_{x_3} = -F \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 2 = -2 + 4 = 2кНм;$ $\sum m_{y_3} = 0; M_{y_3} = 0;$ $\sum m_{z_3} = 0; M_{k_3} - q \cdot 2 \cdot 1 = 0; M_{k_3} = q \cdot 2 \cdot 1 = 2кНм$	$N_3; Q_{y_3}; M_{x_3}; M_{k_3}$ – сложное сопротивление. Изгиб с кручением и сдвигом

5. По данным таблицы 1 строим эпюры силовых факторов (рис. 59), по которым определяется опасное сечение на каждом из участков.

Балки, реакции опор у которых не могут быть определены из уравнений равновесия, называются статически неопределимыми. Для решения статически неопределимых балок, кроме уравнений равновесия, необходимо составить дополнительные уравнения совместности деформаций. Этих уравнений необходимо составить столько, сколько раз балка статически неопределима. Величина статической неопределимости n определяется по формуле: $n = R - y$, где R – количество неизвестных реакций опор; y – количество независимых уравнений равновесия. В этом будет состоять статическая сторона задачи.

Геометрическая сторона задачи состоит в выборе основной системы. Для этого отбрасывается такое количество опор, чтобы балка стала статически определимой. Отброшенные опоры заменяются реакциями. Полученная таким образом статически определяемая балка называется основной системой. Для того, чтобы она была эквивалентна заданной балке по характеру деформирования, необходимо выполнение условий (перемещение под отброшенной опорой равно нулю, либо для заделки – перемещение и угол поворота равны нулю).

Физическая сторона задачи состоит в том, чтобы определить перемещение в отброшенных опорах от действующей нагрузки и реакций связи и составить уравнения совместности деформаций, при которых перемещения будут равны нулю, из которых и определяются реакции опор.

Пример. Для заданной балки (см. рис. 60) построить эпюры Q и M .

Решим статическую сторону задачи. Определим степень статической неопределимости балки: число неизвестных опорных реакций $R = 4$ (рис. 60, а); число уравнений статики на плоскости $y = 3$. Тогда степень статической неопределимости балки равна: $n = R - y = 4 - 3 = 1$, то есть балка один раз статически неопределима.

Решим геометрическую сторону задачи. В качестве основной системы примем статически определимую балку (рис. 60, б). За лишнюю неизвестную примем реакцию опоры X_1 .

Решим физическую сторону задачи. Рассматривая два состояния основной системы (рис. 60, в; рис. 60, д) на основании принципа суперпозиции действия сил, можно написать уравнение совместности деформации $\Delta y_B = \Delta y_{вх1} = \Delta y_{вф} = 0$, где $\Delta y_{вх1}$ – прогиб балки в точке В основной системы от действия X_1 ; $\Delta y_{вф}$ – прогиб балки в точке В основной системы от действия внешней нагрузки.

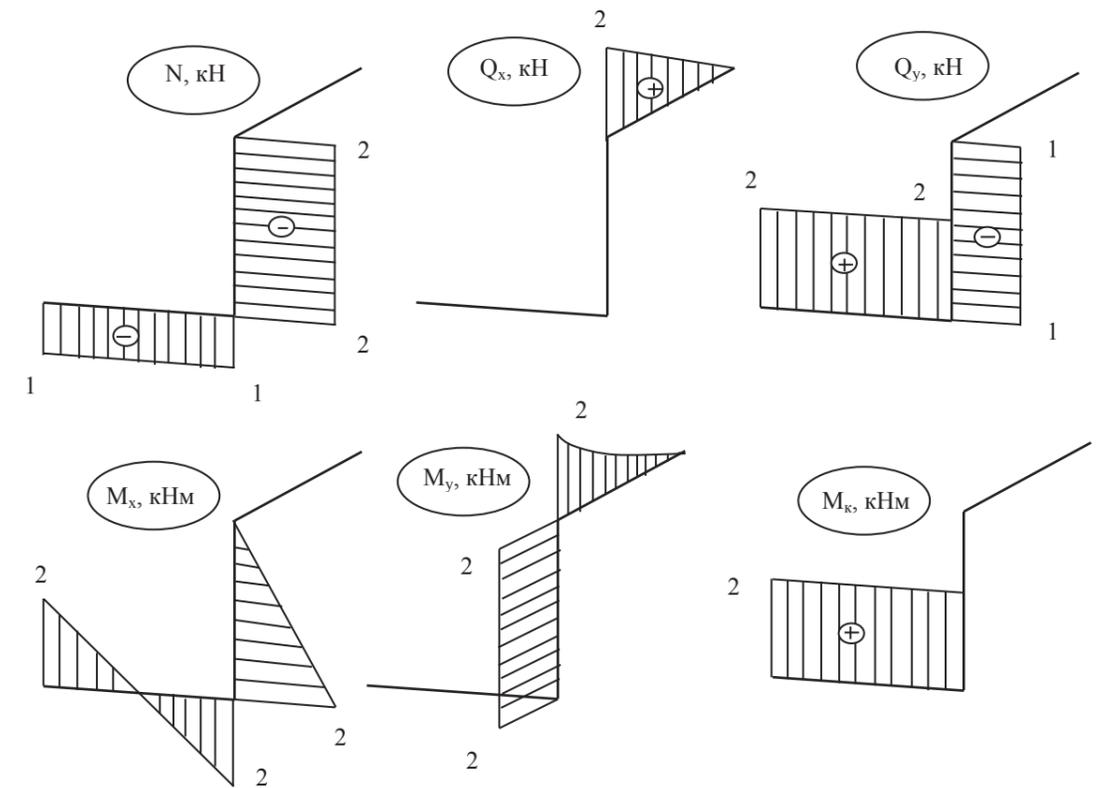


Рис. 59. Эпюры внутренних силовых факторов

Для определения прогиба $\Delta y_{вх1}$ строим эпюру изгибающих моментов от единичной нагрузки X_1 на растянутых волокнах (рис. 60, е) и, пользуясь формулой Симпсона, определим величину прогиба: $\Delta y_{вх1} = \frac{1}{E \cdot I_x} (M_1 \times M_1) = \sum \frac{l_i}{6 \cdot E \cdot I_x} (ab + 4mn + cd)$. В нашем случае прогиб равен:

$$\Delta y_{вх1} = \frac{1}{E \cdot I_x} (M_1 \times M_1) = \frac{2}{6 \cdot E \cdot I_x} (2X_1 \cdot 2X_1 + 4X_1 \cdot X_1 + 0) = \frac{8X_1^2}{3E \cdot I_x}.$$

Для определения прогиба $\Delta y_{вф}$ строим эпюру изгибающих моментов от внешней нагрузки q (рис. 60, е) и, пользуясь формулой Симпсона, определим величину прогиба:

$$\Delta y_{вф} = \frac{1}{E \cdot I_x} (M_1 \times M_F) = \frac{2}{6 \cdot E \cdot I_x} [20 \cdot (-2X_1) + 4 \cdot 5 \cdot (-X_1) + 0] = -\frac{60X_1}{3E \cdot I_x}.$$

Подставляя полученные значения и $\Delta y_{вх1}$ и $\Delta y_{вф}$ в уравнение совместности деформаций, получим: $\frac{8X_1^2}{3E \cdot I_x} - \frac{60X_1}{3E \cdot I_x} = 0$. Откуда $8X_1^2 - 60X_1 = X_1(8X_1 - 60) = 0$.

Тогда $X_1 = \frac{60}{8} = 7,5$ кН. Получили, что реакция опоры $R_B = X_1 = 7,5$ кН.

Действительную эпюру изгибающих моментов от реакции связи $R_B = X_1 = 7,5$ кН (рис. 60, ж) получим умножив эпюру изгибающих моментов от реакцией связи X_1 в основной системе (рис. 60, е) на величину X_1 .

Расчетную (окончательную) эпюру изгибающих моментов $M_{и}$ (рис. 60, з) можно получить алгебраическим сложением эпюры изгибающих моментов от внешней нагрузки в основной системе (рис. 60, г) и действительной эпюры изгибающих моментов от реакции связи X_1 (рис. 60, ж) или построить по данным, определенным по методу сечений.

Методом сечений можно определить ординаты и построить расчетную (окончательную) эпюру

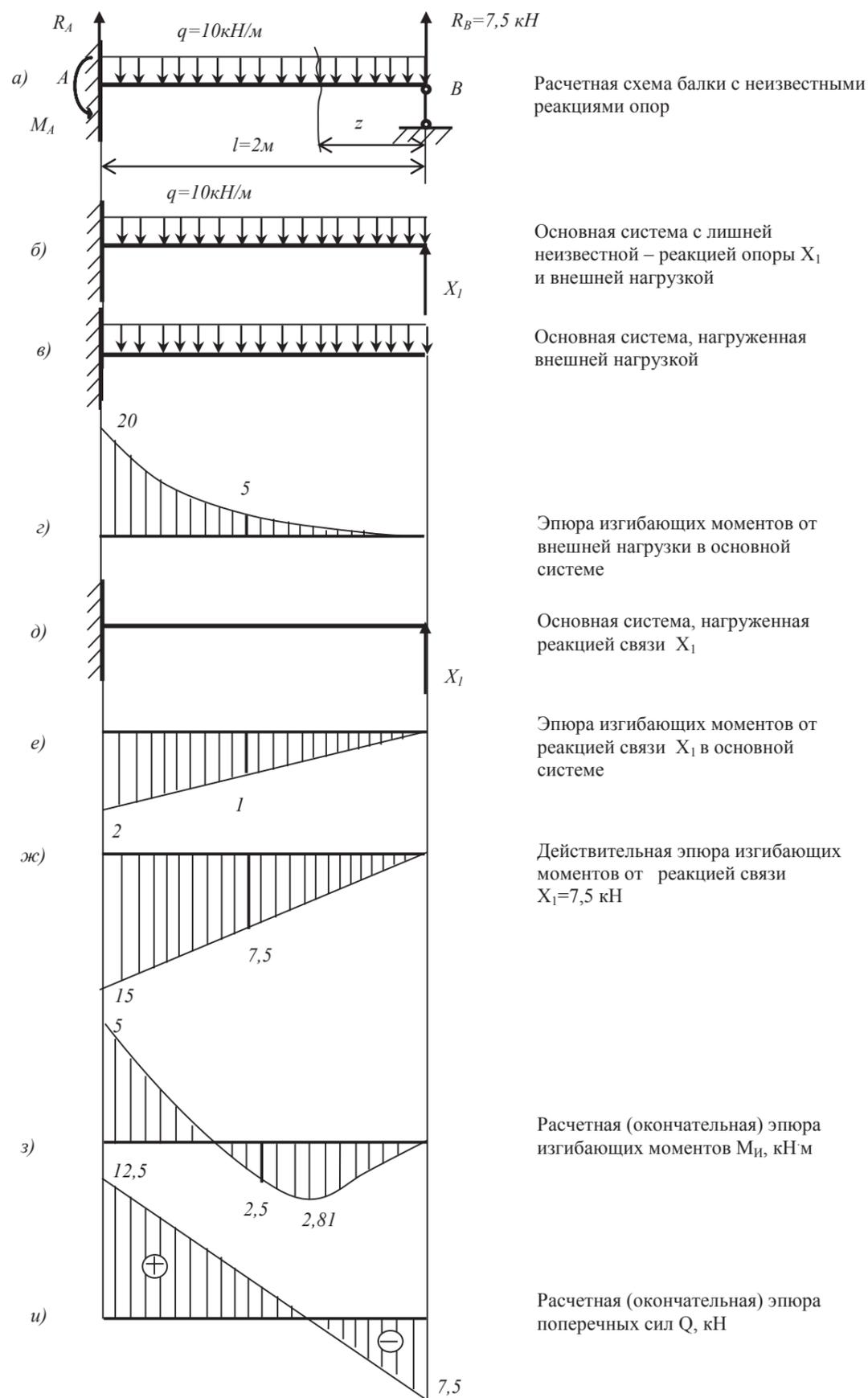


Рис. 60. Расчетные схемы и эпюры внутренних силовых факторов

изгибающих моментов $M_{И}$ и поперечных сил Q . Для этого на расчетной схеме балки (рис. 60, а) проставляем значение реакции опоры $R_B = 7,5$ кН и методом сечений определяем продольную силу и изгибающий момент. Для нашего случая они будут равны:

$$M_{И} = R_B \cdot z - q \cdot \frac{z^2}{2}; \quad Q = -R_B + q \cdot z; \quad \text{при } 0 \leq z \leq 2 \text{ м};$$

при $z = 0$; $M_{И} = 0$; $Q = -R_B = -7,5$ кН;
 при $z = 1$ м; $M_{И} = 7,5 \cdot 1 - 10 \cdot 0,5 = -2,5$ кНм; $Q = -7,5 + 10 \cdot 1 = 2,5$ кН;
 при $z = 2$ м; $M_{И} = 7,5 \cdot 2 - 10 \cdot 0,5 = -5$ кНм; $Q = -7,5 + 10 \cdot 2 = 12,5$ кН;

Ординаты расчетной (окончательной) эпюры поперечных сил Q могут быть определены для каждого участка по формуле: $Q_{\text{лев}} = \pm \frac{q \cdot l_{\text{уч}}}{2} + \frac{M_{\text{пр}} - M_{\text{лев}}}{l_{\text{уч}}}$; где q – интенсивность распределенной нагрузки на рассматриваемом участке (если ее нет, то $q = 0$); $l_{\text{уч}}$ – длина рассматриваемого участка; $M_{\text{пр}}$, $M_{\text{лев}}$ – ординаты изгибающих моментов на правом и левом конце участка, которые берутся со своими знаками. Для нашего случая:

$$Q_{\text{лев}} = \pm \frac{10 \cdot 2}{2} + \frac{0 - (-5)}{2}; \quad Q_{\text{лев}} = 10 + 2,5 = 12,5 \text{ кН}; \quad Q_{\text{прав}} = -10 + 2,5 = -7,5 \text{ кН}.$$

По полученным значениям построена расчетная (окончательная) эпюра поперечных сил Q (рис. 60, и).

Для расчетной схемы статически неопределимой балки можно выбрать несколько основных систем, но они не оказывают влияния на окончательный результат расчета.

Независимо от выбора основной системы эпюра Q и $M_{И}$ будут одни и те же.

В технике встречаются и более сложные статически неопределимые системы, которые представляют собой жестко связанные между собой стержни. Такие системы называются рамами.

В сопротивлении материалов из разнообразия различных способов расчета рам применяется наиболее распространенный – метод сил.

При расчете статически неопределимых систем по методу сил в качестве неизвестных принимаются усилия, заменяющие действие отброшенных (лишних) связей.

Лишние связи – это связи, лишние с точки зрения обеспечения неподвижности рамы как жесткого целого. На плоскости неподвижность рамы обеспечивается тремя наложенными связями, в пространстве – шестью связями. Эти связи называются необходимыми. Связи, наложенные сверх необходимых, называются дополнительными, или лишними.

Порядок расчета статически неопределимых систем следующий.

1. Решается статическая сторона задачи, заключающаяся в нахождении степени статической неопределимости системы путем определения лишних связей.

2. Решается геометрическая сторона задачи путем выбора основной системы, получаемой из заданной после удаления лишних связей и заменой их неизвестными усилиями $X_1, X_2, X_3 \dots X_n$.

3. Решается физическая сторона задачи путем составления уравнения деформаций (перемещений), которые выражают условие совместности перемещений основной системы с заданной статически неопределимой системой. Если перемещения по направлению отброшенных связей в основной системе должны быть равны нулю, то уравнения перемещений выражают равенство нулю этих перемещений. Уравнения перемещений при расчете статически неопределимых систем методом сил записывают в определенной канонической форме.

4. Решаются полученные уравнения методом подстановки или с помощью определителей матриц. После определения лишних неизвестных находятся внутренние силовые факторы методом сечений и строятся эпюры внутренних силовых факторов.

Если заданная статически неопределимая система имеет n лишних связей, то система канонических уравнений для определения этих неизвестных должна иметь n уравнений и в общем виде записывается:

$$\begin{aligned} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \dots + \delta_{1n} \cdot X_n + \Delta_{1F} &= 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \dots + \delta_{2n} \cdot X_n + \Delta_{2F} &= 0 \\ \delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \dots + \delta_{3n} \cdot X_n + \Delta_{3F} &= 0 \\ \dots & \dots \\ \delta_{n1} \cdot X_1 + \delta_{n2} \cdot X_2 + \delta_{n3} \cdot X_3 + \dots + \delta_{nn} \cdot X_n + \Delta_{nF} &= 0 \end{aligned}$$

где $\delta_{11}, \delta_{22}, \delta_{33} \dots \delta_{nn}$ – основные перемещения определяются путем перемножения эпюр единичных моментов самих на себя;

$\delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{13}, \dots, \delta_{1n}$ – дополнительные перемещения, определяются путем перемножения эпюр соответствующих единичных моментов. Причем дополнительные перемещения $\delta_{12} = \delta_{21}$;

$\Delta_{1F}, \Delta_{2F}, \Delta_{3F}, \dots, \Delta_{nF}$ – перемещение от заданных сил, определяются путем перемножения эпюр изгибающих моментов от заданных сил на соответствующие эпюры единичных моментов.

Перемещения имеют два индекса. Первая цифра индекса показывает номер лишней связи, вторая – силовой фактор, вызывающий это перемещение.

Произведение $\delta_{11} \cdot X_1$ представляет собой перемещение точки, где приложена сила X_1 , от силы X_1 по ее направлению.

Произведение $\delta_{12} \cdot X_2$ – это перемещение точки, где приложена сила X_1 по направлению силы X_2 .

Член Δ_{1F} – это перемещение точки, где приложена сила X_1 по направлению силы X_1 , вызванное нагрузкой.

Пример. Для заданной рамы построить эпюры внутренних силовых факторов.

Решим статическую сторону задачи. Определим степень статической неопределимости рамы: число неизвестных опорных реакций $R = 5$ (рис. 60, а); число уравнений статики на плоскости $y = 3$. Тогда степень статической неопределимости балки равна: $n = R - y = 5 - 3 = 2$, то есть рама два раза статически неопределима.

Решим геометрическую сторону задачи. В качестве основной системы примем статически определимую раму (рис. 61, б). За лишние неизвестные примем реакции опоры X_1, X_2 .

Решим физическую сторону задачи. Рассматривая три состояния основной системы (рис. 61, в; рис. 61, г; рис. 61, д) на основании принципа суперпозиции действия сил, можно написать уравнение совместности деформации в виде канонических уравнений по методу системы сил, которые будут иметь вид:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2F} = 0. \end{cases}$$

Для определения перемещений в канонических уравнениях рассмотрим схему (рис. 61, в), для которой к раме в основной системе приложена внешняя нагрузка. Разобьем раму на участки и определим изгибающие моменты от внешней нагрузки:

I участок; $0 \leq z_1 \leq 2$ м;

$$M_{F1} = -\frac{q \cdot z_1^2}{2};$$

при $z_1 = 0$ м; $M_{F1} = 0$;

при $z_1 = 1$ м; $M_{F1} = -\frac{10 \cdot 1^2}{2} = -5$ кН · м;

при $z_1 = 2$ м; $M_{F1} = -\frac{10 \cdot 2^2}{2} = -20$ кН · м.

II участок; $0 \leq z_2 \leq 2$ м;

$$M_{F2} = -\frac{q \cdot 2^2}{2} = -\frac{10 \cdot 2^2}{2} = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Построим эпюру изгибающих моментов от внешних сил (рис. 62, а).

Рассмотрим схему (рис. 61, г), где к основной системе приложена единичная сила X_1 . Разобьем раму на участки и определим изгибающие моменты от единичной силы X_1 :

I участок; $0 \leq z_1 \leq 2$ м;

$$M_{x1} = -1 \cdot z_1;$$

при $z_1 = 0$ м; $M_{x1} = 0$;

при $z_1 = 1$ м; $M_{x1} = -1 \cdot 1 = -1$ кН · м;

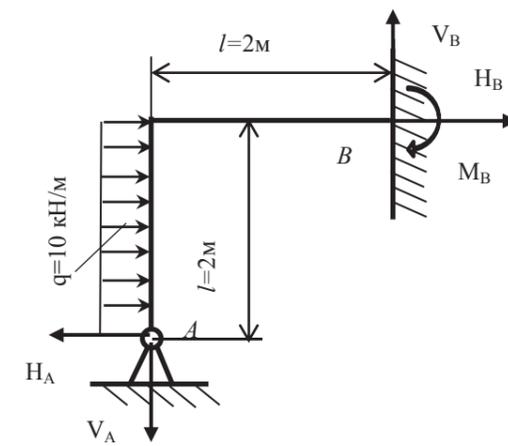
при $z_1 = 2$ м; $M_{x1} = -1 \cdot 2 = -2$ кН · м;

II участок; $0 \leq z_2 \leq 2$ м;

$$M_{x1} = -1 \cdot 2 = -2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

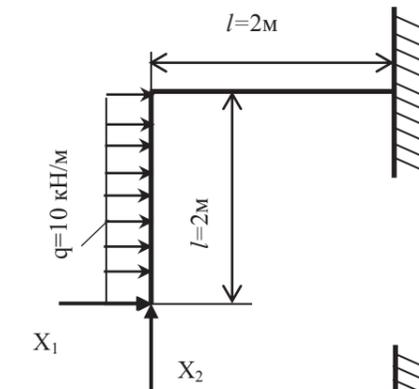
Построим эпюру изгибающих моментов от единичной силы X_1 (рис. 62, б).

Рассмотрим схему (рис. 61, д), где к основной системе приложена единичная сила X_2 . Разобьем



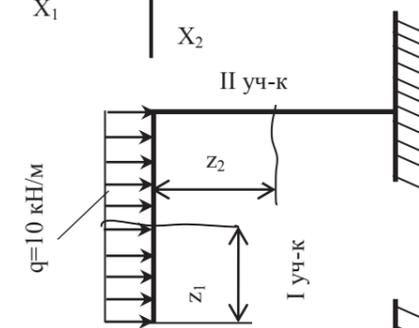
Расчетная схема рамы с неизвестными реакциями опор

а)



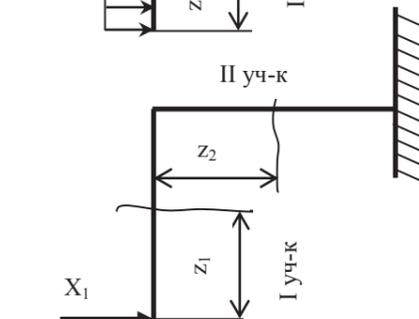
Основная система с лишними неизвестными реакциями опор X_1, X_2 и внешней нагрузкой

б)



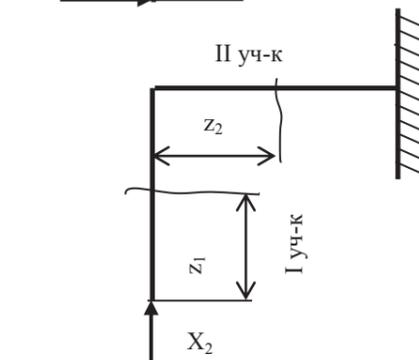
Основная система нагруженная внешней нагрузкой

в)



Основная система нагруженная силой X_1

г)



Основная система нагруженная силой X_2

д)

Рис. 61. Расчетные схемы нагружения рамы

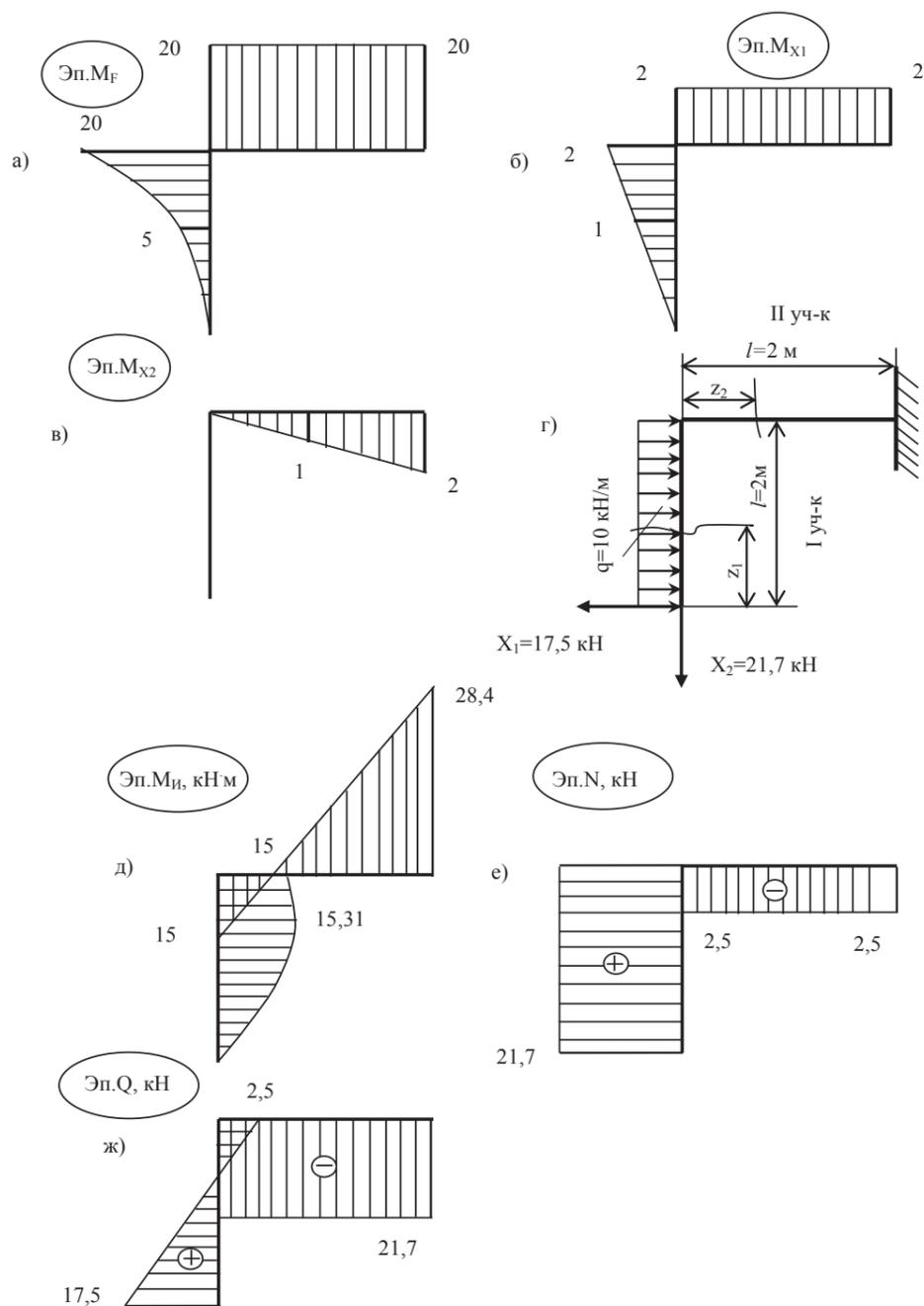


Рис. 62. Эпюры внутренних силовых факторов рамы

раму на участки и определим изгибающие моменты от единичной силы X_2 :
I участок; $0 \leq z_1 \leq 2$ м;

$$M_{x_2} = 0;$$

II участок; $0 \leq z_2 \leq 2$ м;

$$M_{x_2} = -1 \cdot z_2^2;$$

при $z_2 = 0$ м; $M_{x_2} = 0$;

при $z_2 = 1$ м; $M_{x_2} = 1 \cdot 1 = 1$ кН · м;

при $z_2 = 2$ м; $M_{x_2} = 1 \cdot 2 = 2$ кН · м.

Построим эпюру изгибающих моментов от единичной силы X_2 (рис. 62, в).

Определим перемещения δ_{11} как перемножение единичной эпюры M_{x_1} саму на себя:

$$\delta_{11} = (M_{x_1} \times M_{x_1}) = \sum \frac{l_i}{6EI_x} (ab + 4mn + cd) = \frac{2}{6EI_x} [(0 + 4 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2) + (2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2)] = \frac{32}{3EI_x}.$$

Перемещение δ_{22} определим как перемножение единичной эпюры M_{x_2} саму на себя:

$$\delta_{22} = (M_{x_2} \times M_{x_2}) = \sum \frac{l_i}{6EI_x} (ab + 4mn + cd) = \frac{2}{6EI_x} [(0 + 4 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2)] = \frac{8}{3EI_x}.$$

Перемещение $\delta_{12} = \delta_{21}$ определим как перемножение единичной эпюры M_{x_1} на единичную эпюру M_{x_2} :

$$\delta_{12} = \delta_{21} = (M_{x_1} \times M_{x_2}) = \sum \frac{l_i}{6EI_x} (ab + 4mn + cd) = \frac{2}{6EI_x} [0 + 4 \cdot (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot 2] = -\frac{12}{3EI_x}.$$

Перемещение Δ_{1F} определим как перемножение единичной эпюры M_{x_1} на эпюру M_F :

$$\Delta_{1F} = (M_{x_1} \times M_F) = \sum \frac{l_i}{6EI_x} (ab + 4mn + cd) = \frac{2}{6EI_x} [(0 + 4 \cdot 5 \cdot 1 + 20 \cdot 2) + (20 \cdot 2 + 4 \cdot 20 \cdot 2 + 20 \cdot 2)] = \frac{300}{3EI_x}.$$

Перемещение Δ_{2F} определим как перемножение единичной эпюры M_{x_2} на эпюру M_F :

$$\Delta_{2F} = (M_{x_2} \times M_F) = \sum \frac{l_i}{6EI_x} (ab + 4mn + cd) = \frac{2}{6EI_x} [(0 + 4 \cdot (-1) \cdot 20 + (-2) \cdot 20)] = -\frac{120}{3EI_x}.$$

Подставляем полученные значения перемещений в канонические уравнения метода сил, получим:

$$\begin{cases} 32X_1 - 12X_2 + 300 = 0 \\ 8X_1 - 12X_2 - 120 = 0 \end{cases}$$

Решая уравнения методом подстановки, получим:

$$X_2 = \frac{300 + 32X_1}{12}; X_1 - \frac{12(300 + 32X_1)}{12} - 120 = 0; X_1 = -\frac{420}{24} = -17,5 \text{ кН};$$

$$X_2 = \frac{300 + 32(-17,5)}{12} = -21,7 \text{ кН}.$$

Подставляем в основную систему полученные значения X_1 и X_2 , изменяя их направление на противоположное (рис. 62, г), определяем методом сечений внутренние силовые факторы, действующие на каждом участке.

I участок; $0 \leq z_1 \leq 2$ м;

$$N_1 = X_2 = 21,7 \text{ кН};$$

$$Q_1 = X_1 - q \cdot z_1;$$

при $z = 0$ м; $Q_1 = X_1 = 17,5$ кН; при $z = 2$ м; $Q_1 = X_1 - q \cdot 2 = 17,5 - 20 = 2,5$ кН.

Точка, где поперечная сила $Q_1 = 0$; $z_1 = \frac{X_1}{q} = \frac{17,5}{10} = 1,75$ м;

$$M_{H1} = X_1 \cdot z_1 - q \cdot \frac{z_1^2}{2};$$

при $z_1 = 0$ м; $M_{H1} = 0$;

при $z_1 = 1,75$ м; $M_{F1max} = 17,5 \cdot 1,75 - \frac{10 \cdot 1,75^2}{2} = 15,31$ кН · м;

при $z_1 = 2$ м; $M_{F1} = 17,5 \cdot 2 - \frac{10 \cdot 2^2}{2} = 15$ кН · м.

II участок; $0 \leq z_2 \leq 2 \text{ м}$;

$$N_2 = X_1 - q \cdot 2 = 17,5 - 20 = -2,5 \text{ кН};$$

$$Q_2 = -X_2 = -21,7 \text{ кН};$$

$$M_{И2} = X_1 \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 - X_2 \cdot z_2;$$

при $z_2 = 0 \text{ м}$; $M_{И2} = 17,5 \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 1 = 15 \text{ кН} \cdot \text{м}$;

при $z_2 = 1 \text{ м}$; $M_{И2} = 17,5 \cdot 2 - 20 \cdot 21,7 \cdot 1 = -6,7 \text{ кН} \cdot \text{м}$;

при $z_2 = 2 \text{ м}$; $M_{И2} = 17,5 \cdot 2 - 20 \cdot 21,7 \cdot 2 = -28,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

По полученным значениям строятся эпюры внутренних силовых факторов (рис. 62, д, е, ж).

К статически неопределимым системам относятся и неразрезные балки – это балки, лежащие более чем на двух опорах и не имеющие промежуточных шарниров.

Одна опора у них служит для восприятия осевых нагрузок и выполняется в виде шарнирно-неподвижной опоры, а остальные выполняются в виде шарнирно-подвижных опор. Для раскрытия статической неопределимости таких балок используется метод трех моментов. Для его применения выполняют следующие условия:

- опоры балки принято нумеровать слева направо номерами 0, 1, 2, 3 и т. д.;
- номер пролета балки нумеруют номером принадлежащей ему правой опоры;
- основную систему при расчете таких балок получают постановкой шарниров в сечениях над всеми промежуточными опорами. Этим достигается устранение изгибающих моментов в данных сечениях;
- в эквивалентной системе единичные моменты прикладываются как дополнительные неизвестные внутренние усилия ($X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n$);
- направление единичных моментов принимают всегда положительными, так, чтобы выпуклость балки была направлена вниз;
- значение неизвестных моментов получают из системы канонических уравнений.

Рассмотрим неразрезную балку (рис. 63, а).

Пронумеруем опоры начиная с левого конца балки. Основную систему при расчете балки получим постановкой шарниров в сечениях над всеми промежуточными опорами. Для получения эквивалентной системы поставим единичные моменты как дополнительные неизвестные внутренние усилия ($X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n$) с положительными направлениями (рис. 63, б).

Запишем уравнение системы, выражающие равенство нулю взаимного угла поворота опорных сечений двух смежных балок, примыкающих к n опоре согласно каноническим уравнениям метода сил:

$$\delta_{n1} \cdot X_1 + \delta_{n2} \cdot X_2 + \dots + \delta_{nn-1} \cdot X_{n-1} + \delta_{nn} \cdot X_n + \delta_{nn+1} \cdot X_{n+1} + \dots + \Delta_{nF} = 0.$$

Для определения перемещений $\delta_{nr}, \delta_{n2}, \dots, \delta_{nn-1}, \delta_{nr}, \delta_{nn+1}$ и Δ_{nF} нужно построить эпюры от внешних сил основной системы и единичных сил в основной системе.

Так как основная система состоит из не связанных друг с другом балок, то эпюры изгибающих моментов, например X_n , будут действовать на участках l_n и l_{n+1} , в остальных пролетах балки изгибающие моменты от X_n будут равны нулю.

Следовательно, в записанном виде уравнения всех перемещений (кроме $\delta_{n-1}, \delta_n, \delta_{n+1}$ и Δ_{nF}) будут равны нулю, и уравнение примет вид:

$$\delta_{nn-1} \cdot X_{nn-1} + \delta_{nn} \cdot X_n + \delta_{nn+1} \cdot X_{nn+1} + \Delta_{nF} = 0.$$

Обозначим площади эпюр изгибающих моментов от внешних сил на пролетах l_n и l_{n+1} соответственно через ω_n и ω_{n+1} , а расстояния центров тяжести этих площадей от левой и правой опор своего пролета через $a_n, b_n, a_{n+1}, b_{n+1}$ (рис. 63, в).

Для определения перемещений воспользуемся способом Верещагина. Для определения перемещения Δ_{nF} перемножим эпюру M_F на эпюру M_{Xn} :

$$\Delta_{nF} = (M_F \cdot X_{M_{Xn}}) = \frac{1}{E \cdot I_x} \sum (\omega_i \cdot \eta_{X_j}) = \frac{1}{E \cdot I_x} \left(\omega_n \cdot \frac{a_n}{l_n} + \omega_{n+1} \cdot \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}} \right).$$

Для определения перемещения δ_{nn-1} перемножим эпюру $M_{X_{n-1}}$ на эпюру M_{Xn} :

$$\delta_{nn-1} = (M_{X_{n-1}} \cdot X_{M_{Xn}}) = \frac{1}{E \cdot I_x} \sum (\omega_{M_{X_{n-1}}} \cdot \eta_{M_{Xn}}) = \frac{1}{E \cdot I_x} \left(\frac{1}{2} \cdot l_n \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{l_n}{6E \cdot I_x}.$$

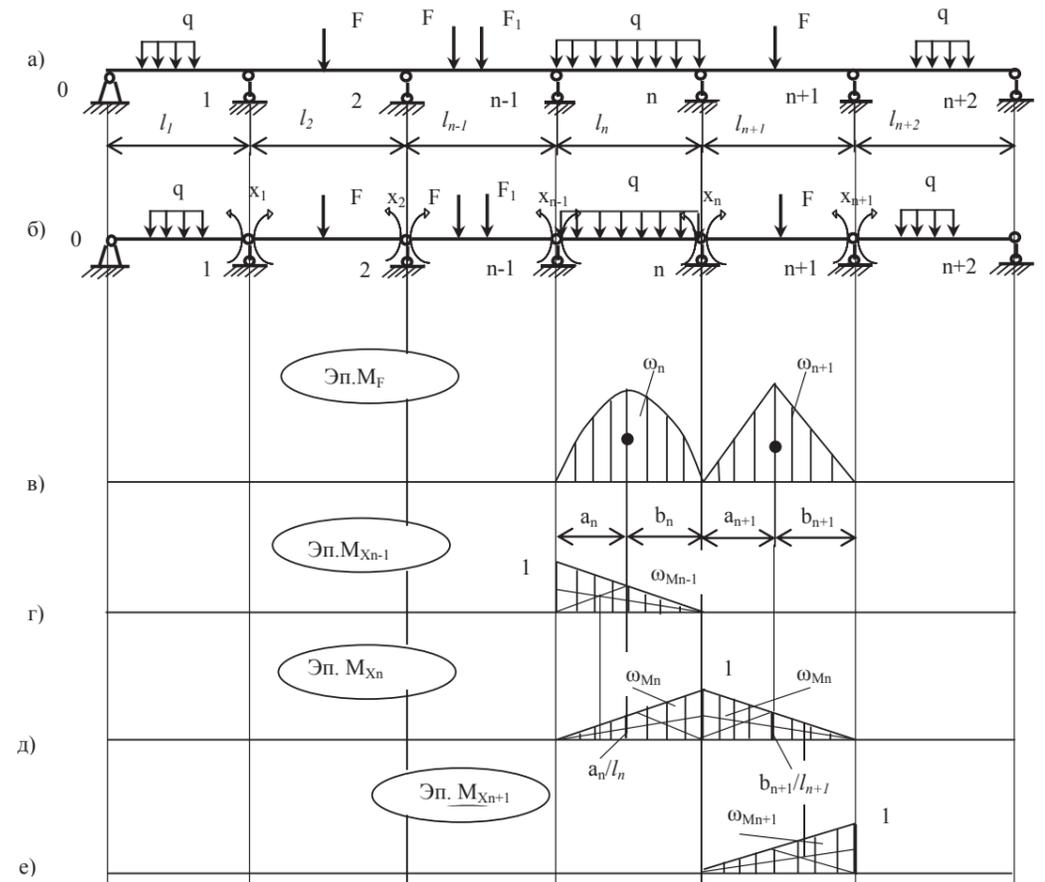


Рис. 63. Расчетная схема и эпюры от внешних сил и единичных моментов неразрезной балки

Для определения перемещения δ_n перемножим эпюру M_{Xn} саму на себя:

$$\delta_{nn} = (M_{Xn} \cdot X_{M_{Xn}}) = \frac{1}{E \cdot I_x} \sum (\omega_{M_{Xn}} \cdot \eta_{M_{Xn}}) = \frac{1}{E \cdot I_x} \left(\frac{1}{2} \cdot l_n \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot l_{n+1} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{3E \cdot I_x} (l_n + l_{n+1}).$$

Для определения перемещения δ_{nn+1} перемножим эпюру M_{Xn} на эпюру $M_{X_{n+1}}$:

$$\delta_{nn+1} = (M_{Xn} \cdot X_{M_{X_{n+1}}}) = \frac{1}{E \cdot I_x} \sum (\omega_{M_{X_{n+1}}} \cdot \eta_{M_{Xn}}) = \frac{1}{E \cdot I_x} \left(\frac{1}{2} \cdot l_{n+1} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{l_{n+1}}{6E \cdot I_x}.$$

Подставляем полученные выражения перемещений в каноническое уравнение, получим:

$$\frac{l_n}{6E \cdot I_x} \cdot X_{nn-1} + \frac{1}{3E \cdot I_x} (l_n + l_{n+1}) \cdot X_n + \frac{l_{n+1}}{6E \cdot I_x} \cdot X_{n+1} + \frac{1}{E \cdot I_x} \left(\omega_n \cdot \frac{a_n}{l_n} + \omega_{n+1} \cdot \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}} \right) = 0;$$

$$l_n \cdot X_{nn-1} + 2 \cdot (l_n + l_{n+1}) \cdot X_n + l_{n+1} \cdot X_{n+1} = -6 \left(\frac{\omega_n \cdot a_n}{l_n} + \frac{\omega_{n+1} \cdot b_{n+1}}{l_{n+1}} \right).$$

Так как при выборе основной системы все неизвестные совпадают с опорным моментом, то в уравнении X заменяется на M :

$$M_{nn-1} \cdot l_n + 2M_n \cdot (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} \cdot l_{n+1} = -6 \left(\frac{\omega_n \cdot a_n}{l_n} + \frac{\omega_{n+1} \cdot b_{n+1}}{l_{n+1}} \right).$$

Уравнение трех моментов можно записать в виде:

$$M_0 \cdot l_n + 2M_1 \cdot (l_n + l_{n+1}) + M_2 \cdot l_{n+1} = -6 \left(\frac{\omega_n \cdot a_n}{l_n} + \frac{\omega_{n+1} \cdot b_{n+1}}{l_{n+1}} \right),$$

где M_0 – момент, действующий в сечении левой опоры балки;
 M_1 – момент, действующий в сечении средней опоры балки;
 M_2 – момент, действующий в сечении правой опоры балки.
 Количество уравнений трех моментов должно быть равно числу статической неопределимости балки. После составления уравнений они затем решаются методом подстановки.

Вопросы для самопроверки:

1. Что называется сложным сопротивлением?
2. Привести формулу для определения полного нормального напряжения при косом изгибе. Построить эпюру распределения σ по высоте и ширине прямоугольного сечения балки, показать опасные точки сечения.
3. Как определяется прогиб балки при косом изгибе?
4. Привести формулу для определения полного нормального напряжения при совместном изгибе с растяжением (сжатием), построить эпюру распределения σ по высоте сечения.
5. Привести формулу для определения полного нормального напряжения при внецентренном растяжении (сжатии), построить эпюру распределения σ по сечению.
6. Что называется центром давления и ядром сечения при внецентренном растяжении, сжатии?
7. Привести формулу для определения эквивалентного напряжения при совместном действии изгибающего и крутящего моментов. Привести эпюру распределения нормального и касательного напряжения по поперечному сечению.
8. Как выбирается местная система координат при пространственном нагружении бруса? Чем определяется вид деформации для пространственного бруса?
9. Объяснить, как определяются опасные и предположительно опасные поперечные сечения при сложном сопротивлении?
10. Объяснить, в чем заключается метод сил при раскрытии статической неопределимости. Как записываются канонические уравнения?
11. Составить уравнение трех моментов при раскрытии статической неопределимости неразрезной многопролетной балки.

10. Продольный изгиб.

При изучении этой темы необходимо разобраться в вопросах об устойчивых и неустойчивых формах равновесия применительно к деформирующимся телам. Разрушение стержня может произойти не только потому, что будет нарушена прочность, но и от того, что стержень не сохранит заданной формы упругого равновесия.

Из положений теоретической механики известно, что положение равновесия абсолютно твердого тела может быть устойчивым (рис. 64, а), неустойчивым (рис. 64, б) и безразличным (рис. 64, в).

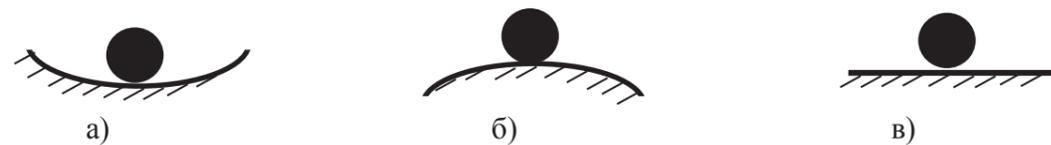


Рис. 64. Положения равновесия абсолютно твердого тела

В сопротивлении материалов, кроме положения равновесия, рассматривается равновесие системы в деформированном состоянии.

Например, гибкий прямолинейный стержень при действии на него небольшой сжимающей силы находится в состоянии прямолинейной формы устойчивого равновесия (см. рис. 65, а).

При увеличении значения осевой сжимающей силы прямолинейная форма равновесия станет неустойчивой и сменится криволинейной (см. рис. 65, б).

Устойчивостью называют свойство сооружений сохранять свое первоначальное положение или некоторую деформируемую форму равновесия и возвращаться к ним при малых отклонениях после снятия причин, вызвавших эти отклонения.

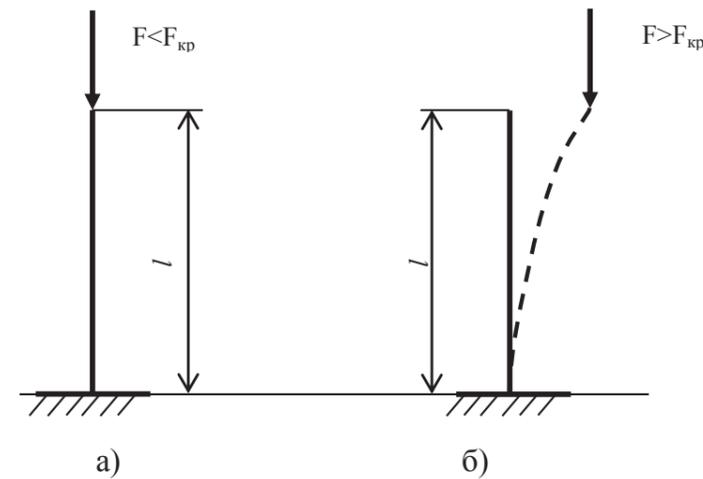


Рис. 65. Формы упругого равновесия стержня

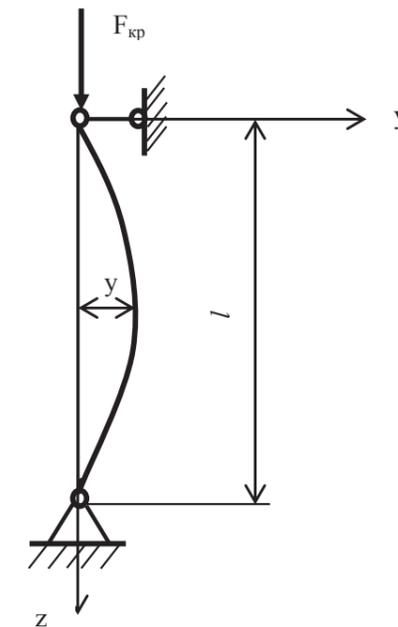


Рис. 66. Схема шарнирно закрепленного стержня

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l^2},$$

где E – модуль продольной упругости материала;

I_{min} – минимальный осевой момент инерции;

l – длина стержня.

Случай шарнирного закрепления обоих концов стержня принято называть основным случаем продольного изгиба. При других способах закрепления концов стержня формулу для определения критической силы можно получить путем сопоставления формы изогнутой оси данного стержня с формой, которая получается у стержня с шарнирно закрепленными концами.

Для стержней с другими способами закрепления концов в формулу определения критической силы вводится приведенная длина стержня $l_{прив} = \mu \cdot l$, где μ – коэффициент приведения длины. Тогда критическая сила для стержней с другими способами закрепления концов определится по формуле:

Различают устойчивое положение равновесия и устойчивость формы равновесия стержня в деформированном состоянии. Первое относится к достаточно жестким сооружениям (башни, подпорные стенки, опоры мостов и т. д.), второе – к гибким конструкциям, выполненным из упругого материала.

Выход сооружения из первоначального состояния упругого равновесия называется потерей устойчивости. Нагрузка, при небольшом превышении которой возможно существование новой устойчивой формы равновесия, называется критической и обозначается $F_{кр}$.

Потеря устойчивости с качественной сменой деформированной формы равновесия называется потерей устойчивости первого рода, или Эйлеровой потерей устойчивости. Стержень, нагруженный в осевом направлении сжимающей силой $F < F_{кр}$, испытывает только деформацию сжатия. Если $F > F_{кр}$, то сжатие и изгиб происходят за счет искривления оси стержня.

Для нормальной работоспособности сооружения конструкции нужно, чтобы фактически действующая нагрузка была меньше критической. Это условие устойчивости прямолинейной формы можно

записать: $[F] = \frac{F_{кр}}{[n_y]}$, где $[n_y]$ –

нормативный коэффициент запаса устойчивости, он обычно принимается выше, чем коэффициент запаса прочности того же материала.

Формулу для определения критической силы шарнирно закрепленного стержня (рис. 66) предложил Леонардо Эйлер:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l_{прив}^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{(\mu \cdot l)^2}$$

Значения коэффициента приведены на рисунке 67.

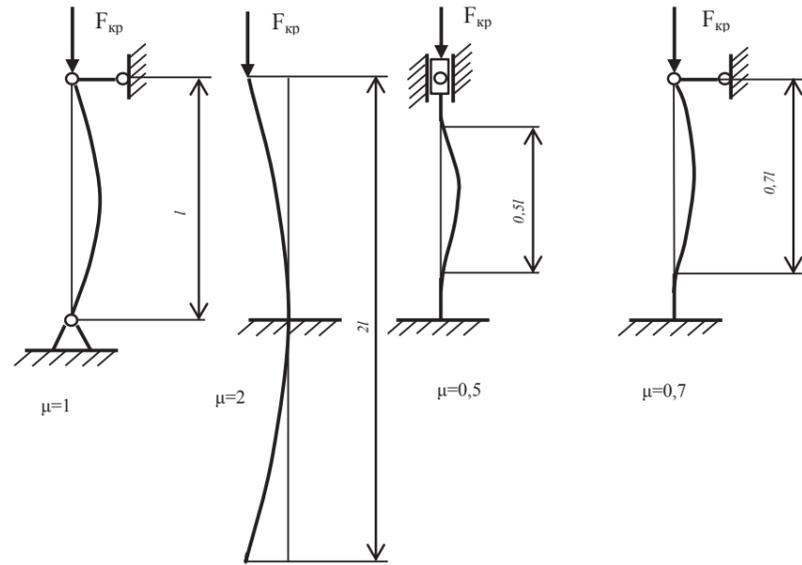


Рис. 67. Значение коэффициента приведения длины в зависимости от способа закрепления концов стержня

Нормальное напряжение в поперечном сечении сжатого стержня, соответствующее критическому значению сжимающей силы, называется критическим напряжением. Его величина равна:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{A \cdot (\mu \cdot l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot i_{min}^2}{(\mu \cdot l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{\mu \cdot l}{i_{min}}\right)^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2},$$

где i_{min} – наименьший главный радиус инерции площади сечения стержня, который определяется

$$i_{min}^2 = \frac{I_{min}}{A};$$

λ – гибкости стержня определяется как $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}}$.

Гибкость стержня – безразмерная величина. Чем больше гибкость λ , тем меньше критическое напряжение, тем меньше сжимающая сила, способная вызвать продольный изгиб стержня.

Формула Эйлера справедлива лишь в случаях, когда критические напряжения не превышают предел пропорциональности материала $\sigma_{кр} \leq \sigma_{пр}$. Для стали при $\pi = 3,14$, $\sigma_{пр} \approx 200$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа критическая гибкость, при которой справедлива формула Эйлера, определится:

$$\lambda_{кр} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пр}}} \geq \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} \geq 100. \text{ Для дерева } \lambda \geq 75, \text{ для чугуна } \lambda \geq 80.$$

На практике часто приходится сталкиваться со сжатыми стержнями, гибкость которых меньше предельной. В таких случаях формулу Эйлера использовать нельзя и используют формулу Ф. С. Ясинского:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda,$$

где a и b – величины, характеризующие качество материала. Значения этих коэффициентов при-

водятся в справочных материалах. Для стали Ст3 при $40 \leq \lambda \leq 100$ формула Ясинского имеет вид:

$$\sigma_{кр} = 310 - 1,14 \lambda.$$

Когда критическое напряжение по Ясинскому оказывается выше предела текучести материала $\sigma_{кр} > \sigma_{т}$, опасна не потеря устойчивости, а потеря прочности. В этом случае критические напряжения берутся равными пределу текучести материала $\sigma_{кр} = \sigma_{т}$.

На рисунке 68 приведен график критических напряжений от гибкости стержня для стали Ст3. Стержни, для которых справедлива формула Эйлера, называются стержнями большой гибкости, для которых формула Ясинского – средней гибкости. Для тех случаев, когда не применима формула Эйлера для нахождения критической силы $F_{кр}$, ее определяют через критическое напряжение, определенное по формуле Ясинского из условия: $F_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A$.

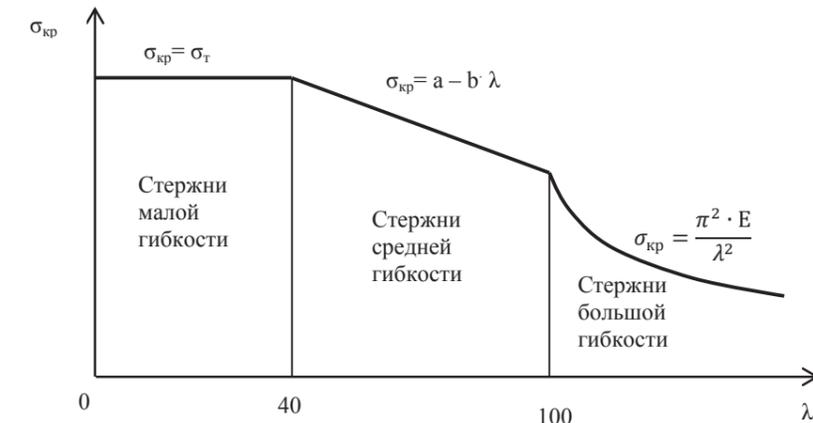


Рис. 68. График критических напряжений в зависимости от гибкости стержня для стали

Во избежание потери устойчивости в стержнях, работающих на сжатие, доводить напряжение, возникающее в его поперечных сечениях, до критического значения недопустимо. Сжатый стержень будет устойчивым, если размеры его таковы, что действительные напряжения, возникающие в его поперечных сечениях, составляют лишь некоторую долю от критических. То есть допустимое напряжение при расчете стержня на устойчивость $[\sigma_y]$ должно составлять некоторую часть критического напряжения:

$$[\sigma_y] = \frac{\sigma_{кр}}{[n_y]}.$$

Допускаемое напряжение при деформации сжатия должно составлять некоторую часть от напряжения предела текучести материала $[\sigma] = \frac{\sigma_{т}}{[n]}$.

Разделив допускаемые напряжения на устойчивость $[\sigma_y]$ на допускаемые напряжения при сжатии $[\sigma]$, получим:

$$\frac{[\sigma_y]}{[\sigma]} = \frac{\sigma_{кр} \cdot [n]}{\sigma_{т} \cdot [n_y]}.$$

Обозначив через $\varphi = \frac{\sigma_{кр} \cdot [n]}{\sigma_{т} \cdot [n_y]}$, получим $[\sigma_y] = \varphi \cdot [\sigma]$. Величина φ носит название коэффициента уменьшения основного допустимого напряжения при расчетах на устойчивость, или коэффициента продольного изгиба. Коэффициент $\varphi < 1$ и зависит от гибкости стержня λ .

Чем больше гибкость, тем меньше величина φ . Значение φ приводится в справочной литературе для различных значений гибкости и марок материала (приложение 2).

Формула прочности при расчетах на устойчивость записывается в виде:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi[\sigma],$$

где $[\sigma]$ – допускаемое напряжение материала на сжатие, φ – коэффициент продольного изгиба.

С помощью приведенной формулы решаются следующие задачи:

1. Проверочный расчет на устойчивость проводится по формуле: $\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi[\sigma]$ (по известным значениям площади поперечного сечения A , минимальному осевому моменту инерции I_{min} , длине стержня и способу крепления определяется гибкость стержня λ , по которому по таблице определяется величина φ и выполняется проверка прочности).

2. Проектный расчет (подбор поперечного сечения) вводится по формуле: $A \geq \frac{F}{\varphi[\sigma]}$. (При проектном расчете требуемой площади поперечного сечения стержня на первом шаге задаются величиной $\varphi = 0,5$; по формуле $A \geq \frac{F}{\varphi[\sigma]}$ определяется площадь поперечного сечения стержня. Далее в зависимости от формы поперечного сечения определяют J_{min}, i_{min} и по длине стержня и способу крепления его концов определяется гибкость стержня λ , устанавливают по таблице фактическое значение φ_1 . Подобранный сечение по формуле $\sigma = \frac{F}{\varphi_1 \cdot A} \leq [\sigma]$ проверяется на прочность.

Если расчетные напряжения σ отличаются от допустимых напряжений $[\sigma]$ более чем на 3 %, то расчет повторяют. При этом задаются новым значением φ_2 , которое определяется $\varphi_2 = (\varphi + \varphi_1)/2$, и выполняют вторую попытку. Обычно требуется две-три попытки для подбора сечения.)

3. Определение допускаемой по условию устойчивости нагрузки выполняют по формуле: $[F] = \varphi \cdot [\sigma] \cdot A$. (Определяется значение величины гибкости стержня $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}}$ и по таблице определяется значение φ , которое подставляется в формулу для определения допускаемой по условию устойчивости нагрузки. Либо значение λ сравнивается с $\lambda_{кр}$ для данного материала и определяются критические напряжения $\sigma_{кр}$. При $\lambda \geq 100$ для стержней из стали $\sigma_{кр}$ определяется по формуле Эйлера $\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$, при $40 < \lambda < 100$ по формуле Ясинского $\sigma_{кр} = a - b\lambda$, при $\lambda < 40$ принимают $\sigma_{кр} = \sigma_T$. Допускаемая по условию устойчивости нагрузка определяется: $[F] = \frac{\sigma_{кр} \cdot A}{[n_y]}$.)

Вопросы для самопроверки:

1. В чем заключается явление потери устойчивости центрально сжатого стержня?
2. Какая сила называется критической?
3. Привести формулу для определения критической силы.
4. Дать определение коэффициента приведенной длины, его зависимость от способа закрепления концов.
5. Привести формулу Эйлера для определения критических напряжений. Границы применимости формулы.
6. Дать определение гибкости стержня.
7. Привести формулу Ясинского для определения критических напряжений. Границы применимости формулы.
8. Как производится расчет сжатых стержней на устойчивость?
9. Дать определение коэффициента продольного изгиба.
10. Привести формулу прочности при продольном изгибе. Виды расчетов.

11. Прочность при переменных и динамических нагрузках.

Приложение ударной нагрузки приводит систему к упругим колебаниям. Рассмотрим невесомую балку с сосредоточенной массой M (см. рис. 69, а). Пренебрегая горизонтальными и угловыми перемещениями массы, ее положение при колебаниях в любой момент времени можно определить одним параметром – вертикальным перемещением (прогибом балки). Такую балку называют системой с одной степенью свободы. В реальности такая балка имеет бесконечное множество степеней свободы вследствие ее веса и других факторов, но в расчетных схемах различными приемами число степеней свободы стараются уменьшить до конечного числа, в простейших случаях – до одной степени свободы.

При отклонении массы от положения равновесия (см. рис. 69, а) на величину $y(t)$ и освобождении ее она начнет колебаться. Эти колебания называются свободными. В системах с числом степеней свободы больше единицы рассматриваются собственные колебания. Для систем с одной степенью свободы собственные и свободные колебания совпадают.

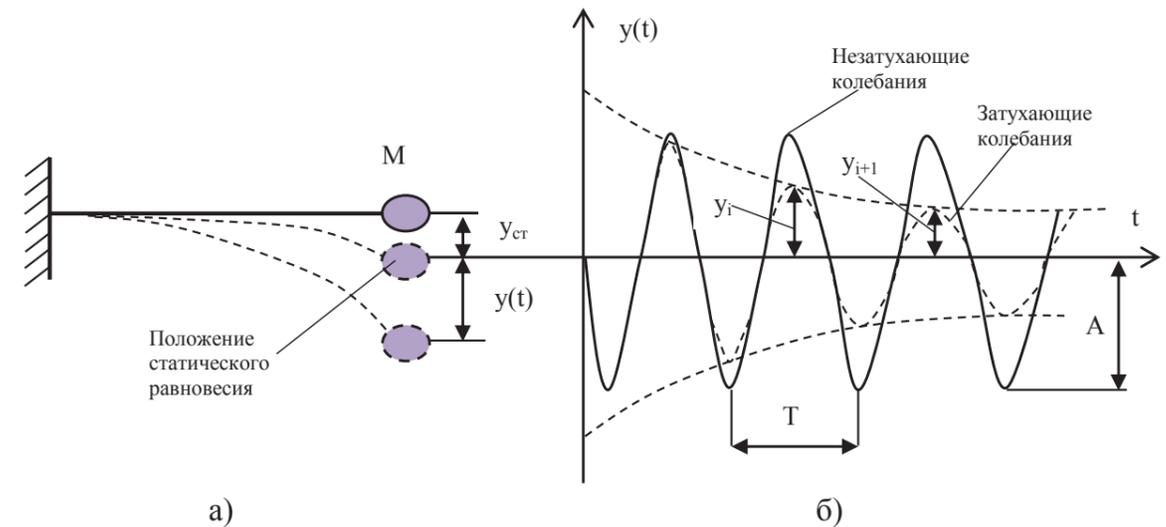


Рис. 69. Свободные колебания балки с одной степенью свободы: а – отклонение массы; б – циклы колебаний

Уравнение свободных колебаний записывается в виде: $y(t) = A \sin(\omega t + u)$, где $y(t)$ – отклонение массы от положения статического равновесия в произвольный момент времени; A – амплитуда колебаний; ω – круговая частота колебаний (число колебаний за время 2π секунд); u – сдвиг по фазе.

График свободных колебаний представляет незатухающую синусоиду (сплошная линия на рис. 69, б). Круговую частоту можно определить через период колебания T по формуле: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ или использовать для вычислений круговой частоты следующие выражения:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{M \cdot \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{y_{ст}}}$$

где M – масса; δ_{11} – перемещение точки расположения массы от единичной силы (податливость системы); g – ускорение свободного падения; $y_{ст}$ – перемещение точки расположения массы от веса этой массы.

Для начального момента времени ($t = 0$) при отклонении массы на величину y_0 и u_0 скорости амплитуда колебаний будет равна: $A = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{u_0}{\omega}\right)^2}$, фазовый сдвиг $\vartheta = \arctg \frac{\omega \cdot y_0}{u_0}$.

Для реальных упругих систем свободные колебания со временем затухают вследствие различных сил сопротивления (пунктирная синусоида на рис. 69, б). Для механических устройств и строительных конструкций можно принять период колебаний T и круговую частоту ω свободных и вынужденных колебаний равными друг другу.

Если к массе прикладывается внешняя сила $F(t)$, изменяющаяся по некоторому закону, то она будет вызывать в системе вынужденные колебания. Сила, изменяющаяся по закону $F(t) = F \sin(\theta t)$, вызывает вибрационную нагрузку, которая создается вращением некоторой неуравновешенной массы, вращающейся с n оборотов в минуту. Круговая частота от неуравновешенной массы определится $\theta = \frac{\pi n}{30}$.

Упругие колебания системы складываются из свободных и вынужденных колебаний. Свободные колебания через некоторое время затухают, и остаются только вынужденные колебания $y(t) = y_{ст} \cdot k_d \sin(\theta t)$.

Амплитуда вынужденных колебаний определится из условия, что $\sin(\theta t) = 1$, тогда $Y_{max} = y_{ст} \cdot k_d$, где k_d – динамический коэффициент определится из условия $k_d = 1 + \beta \frac{F}{G}$, где β – коэффициент нарастания колебаний $|\beta| = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}$; F – сила, вызывающая вибрационную нагрузку; G – вес от массы M .

При расчетах на прочность необходимо избежать появления резонанса системы, когда частота свободных колебаний совпадает с частотой вынужденных колебаний. При резонансе величина динамического коэффициента k_d стремится к бесконечно большому значению. На рисунке 70 показан график изменения динамического коэффициента при вибрационной нагрузке от соотношения частот вынужденных и свободных колебаний $\frac{\theta}{\omega}$ и представлена зона резонанса. Если отношение частот вынужденных и свободных колебаний лежит в пределах $\frac{\theta}{\omega} = 0,8 \dots 1,2$, что соответствует зоне резонанса, то действие даже малой силы многократно возрастает, что может привести к разрушению конструкции.

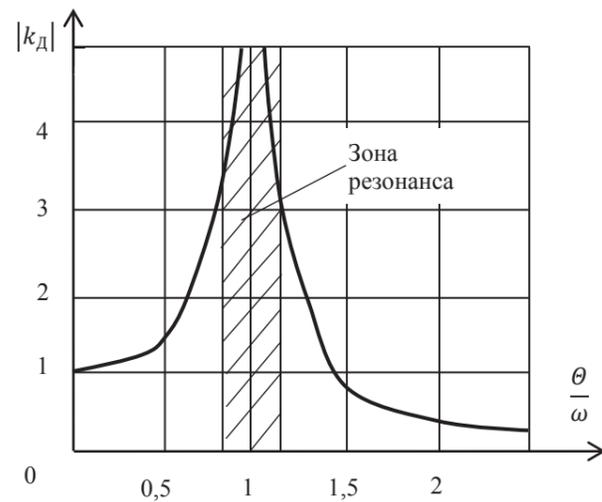


Рис. 70. Изменение динамического коэффициента при вибрационной нагрузке

Условие прочности балки при динамических нагрузках определяется по формуле:
 $\delta_{\text{дин. max}} = \delta_{\text{ст. max}} \cdot K_g \leq [\delta]$.

При рассмотрении вопроса о расчете на прочность при переменных напряжениях сначала необходимо усвоить понятие «усталостное разрушение» и его физическую сущность. Необходимо знать виды циклов напряжений и их характеристики, определение предела выносливости и факторы, влияющие на его величину.

К переменным нагрузкам относятся такие нагрузки, которые вызывают напряжения, циклически изменяющиеся во времени.

Например, многие детали, в частности вращающиеся валы и оси, зубья зубчатых колес, дорожки тел качения подшипников, приводные ремни, пружины некоторых механизмов, испытывают напряжения, циклически изменяющиеся во времени. В этих случаях разрушение деталей наступает при напряжениях значительно меньше предельных, полученных при статических испытаниях материала.

После разрушения на поверхности излома детали (рис. 71) обнаруживается две ярко выраженные зоны. В зоне I поверхность сглажена, в зоне II грубо шероховатая, типичная для хрупкого излома. Причину такого разрушения объясняют следующим. При работе детали в условиях переменных напряжений в материале на поверхности детали появляется микроскопическая трещинка, которая постепенно разрастается, охватывая все новые области будущего излома. Края трещины, многократно нажимая друг на друга, постепенно сглаживаются. По мере развития трещины поперечное сечение уменьшается до размеров, при которых статическая прочность оставшейся части сечения оказывается исчерпанной, и наступает внезапное разрушение, называемое усталостным.

Снижение прочности материала при действии на него многократно сменяющихся нагрузок носит название усталости материала. Трещины имеют местный характер и не затрагивают материал конструкции в целом. Усталостное разрушение происходит внезапно, что часто приводит к авариям и даже катастрофам.

Около 90 % всех деталей машин оказывается под действием знакопеременных напряжений. Поэтому необходимы такие методы расчета, которые обеспечили бы безопасную работу конструкций и деталей машин.

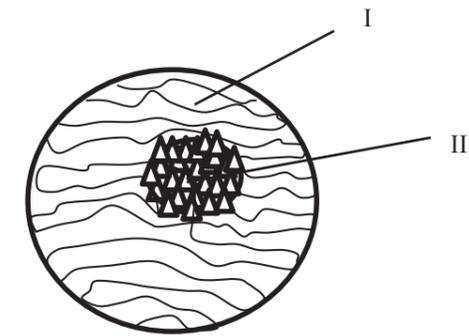
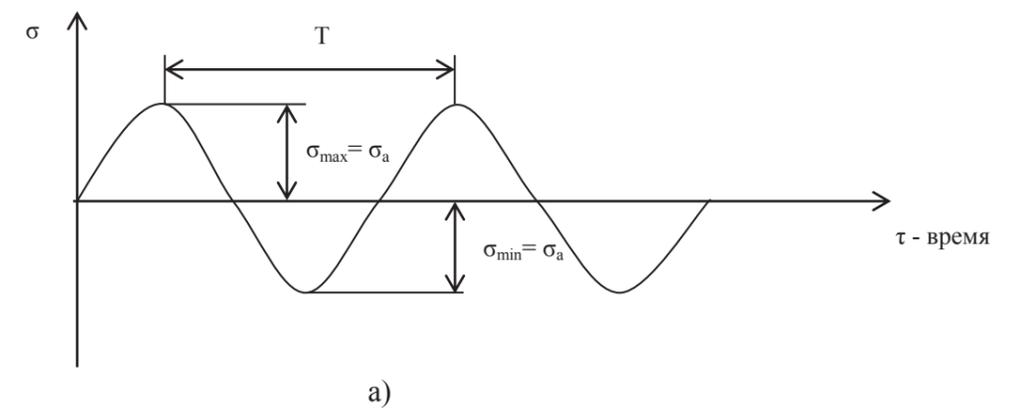


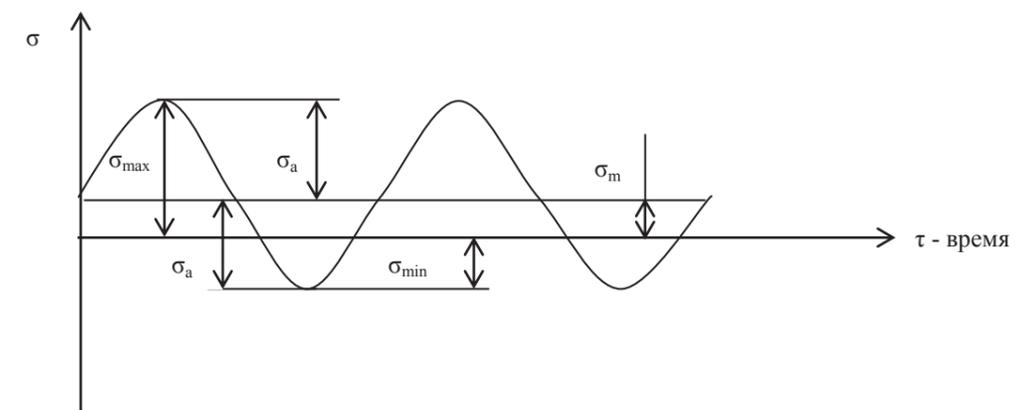
Рис. 71. Вид поверхности усталостного разрушения

Действие знакопеременных напряжений характеризуется циклом напряжений, который представляет собой процесс изменения напряжений от одной крайней величины до другой и обратно. В зависимости от соотношения крайних значений напряжений различают циклы симметричные и асимметричные.

В случае симметричного цикла крайние значения напряжений равны по величине и противоположны по знаку и равны амплитудному напряжению цикла $\sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{min}} = \sigma_a$ (рис. 72, а). Асимметричный цикл можно рассматривать как симметричный цикл, к которому добавлено некоторое постоянное напряжение – среднее напряжение цикла σ_m (рис. 72, б).



а)



б)

Рис. 72. Виды циклов напряжений и их характеристики: а) симметричный; б) асимметричный

Крайние напряжения при асимметричном цикле определяются из выражения:

$$\begin{cases} \sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a \\ \sigma_{min} = \sigma_m - \sigma_a \end{cases}$$

где σ_m – среднее напряжение цикла, σ_a – амплитудное напряжение цикла.

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}; \quad \sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

Отношение минимального к максимальному напряжению цикла называется коэффициентом асимметрии цикла $R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$.

Для симметричного цикла $\sigma_{max} = -\sigma_{min} = \sigma_a$; $R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = \frac{-\sigma_a}{\sigma_a} = -1$ и обозначается цикл σ_{-1} .

При статическом нагружении коэффициент асимметрии цикла $R = 1$. Если $\sigma_{min} = 0$, то $R = 0$. Такой цикл называется пульсирующим, или отнулевым, и обозначается σ_0 .

Для асимметричных циклов коэффициент асимметрии цикла лежит в пределах $-1 < R < 1$. В случае переменных касательных напряжений остаются в силе все приведенные выше термины и соотношения с заменой нормальных напряжений σ на касательные напряжения τ .

Если период цикла T (продолжительность одного цикла), то за промежуток времени t общее количество циклов $N = \frac{t}{T}$.

Циклы, у которых коэффициенты асимметрии R одинаковы, называются подобными.

Экспериментами установлено, что закон изменения напряжений во времени практически не оказывает влияние на усталость материала, существенными являются лишь значения минимального и максимального напряжения цикла σ_{min} , σ_{max} , коэффициент асимметрии цикла R и количество циклов N .

Циклы, показанные на рисунке 73, являются равноценными. Частота колебаний не влияет на усталость материала.

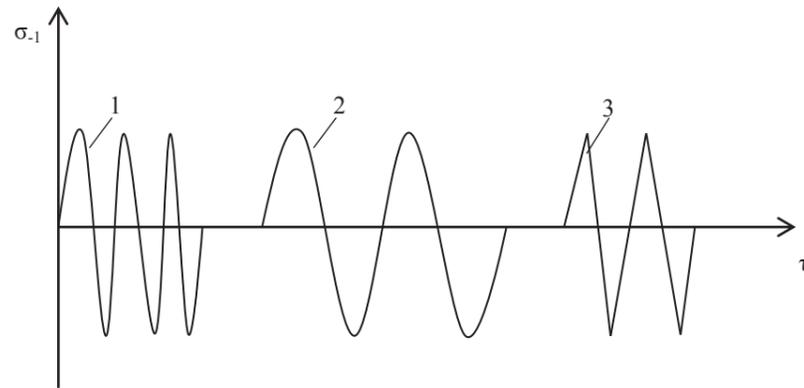


Рис. 73. Равноценные циклы напряжений

Способность материала воспринимать многократное действие переменных напряжений от заданной нагрузки без разрушения называют сопротивлением усталости.

Наибольшее напряжение, при котором материал, не разрушаясь, выдерживает определенное число циклов, устанавливается опытным путем. Для этого проводятся длительные испытания материалов на усталость, для чего разработано очень много различных типов испытательных машин.

Испытания проводятся одновременно на нескольких машинах. Уровень напряжений, при которых начинаются испытания образцов, составляет 0,6...0,7 от предела прочности материала. Затем напряжения снижаются и на основании результатов испытаний строится график в координатах $\lg N = f(\sigma_R)$ (рис. 74).

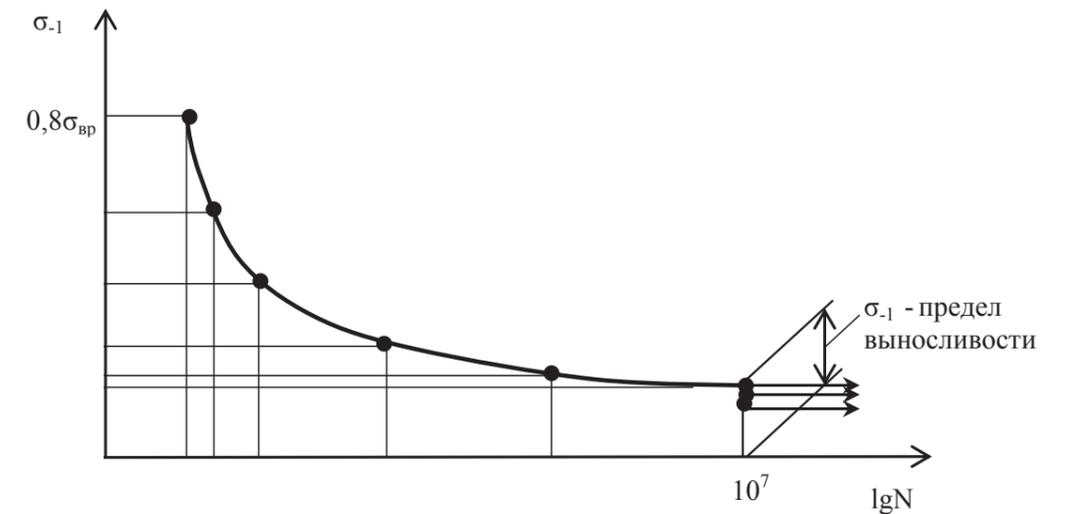


Рис. 74. Кривая усталости

Число циклов, до которого ведется испытание, называется базой испытаний. Для стальных деталей это 10^7 циклов, для цветных материалов – 10^8 циклов. В результате испытаний устанавливается то наибольшее значение максимального напряжения цикла, при котором образец работает не разрушаясь до базы испытаний. Такое напряжение называется пределом выносливости. Предел выносливости обозначается σ_{-1} , где R – коэффициент асимметрии цикла.

Испытание на выносливость – очень длительный процесс, поэтому сделан ряд попыток связать эмпирическими формулами предел выносливости с пределом прочности материала:

$$\sigma_{-1} \approx (0,4 - 0,5)\sigma_B \text{ – для сталей;}$$

$$\sigma_{-1} \approx (0,25 - 0,5)\sigma_B \text{ – для цветных металлов.}$$

На усталостную прочность влияют концентраторы напряжений (резкие изменения размеров поперечного сечения детали), при их наличии уменьшается предел выносливости, диаметр детали (чем больше площадь поперечного сечения образца, тем меньше усталостная прочность), а также шероховатость поверхности детали (при увеличении микронеровностей поверхности детали уменьшается значение предела выносливости). Все эти факторы учитываются при расчете предела выносливости детали введением коэффициентов:

$$K_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1K}}; \quad K_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1K}} \text{ – эффективные коэффициенты концентрации напряжений;}$$

$$\varepsilon_\sigma = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{-1}}; \quad \varepsilon_\tau = \frac{\tau_{-1d}}{\tau_{-1}} \text{ – коэффициенты масштабного фактора;}$$

$$\beta_\sigma = \frac{\sigma'_{-1}}{\sigma_{-1}}; \quad \beta_\tau = \frac{\tau'_{-1}}{\tau_{-1}} \text{ – коэффициенты качества поверхности,}$$

где σ_{-1} , τ_{-1} – предел выносливости стандартного полированного образца диаметром 7,5 мм;

σ_{-1K} , τ_{-1K} – предел выносливости образца с концентратором напряжения;

σ_{-1d} , τ_{-1d} – предел выносливости образца заданного поперечного размера;

σ'_{-1} , τ'_{-1} – предел выносливости образца с заданной шероховатостью поверхности.

С учетом факторов, влияющих на предел выносливости, его величина определится по формуле:

$$\sigma''_{-1} = \frac{K_\sigma}{\beta_\sigma \cdot \varepsilon_\sigma} \cdot \sigma_{-1}; \quad \tau''_{-1} = \frac{K_\tau}{\beta_\tau \cdot \varepsilon_\tau} \cdot \tau_{-1}.$$

Повышение предела выносливости достигается путем создания в поверхностном слое детали предварительных напряжений сжатия. Это достигается поверхностным пластическим деформированием (выглаживанием), дробеструйной обработкой, поверхностной закалкой токами высокой частоты, химико-термической обработкой (цементацией, азотированием, диффузионной металлизацией с последующей поверхностной закалкой), термомеханической обработкой.

При расчете на усталость определяют коэффициент запаса прочности для опасных и предпо-

ложительно опасных сечений детали. Условие прочности формулируется в виде: расчетный коэффициент запаса должен быть больше или равен нормативному коэффициенту и имеет вид:

$$n \geq [n].$$

Нормативный коэффициент запаса берется в пределах $[n] = 1,4 \div 3,0$.

При сложном напряженном состоянии расчетный коэффициент запаса прочности определяется:

$$n = \frac{n_\sigma \cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}},$$

где n_σ и n_τ – коэффициенты запаса прочности при изгибе и кручении и определяются по формулам:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\beta_\sigma \cdot \varepsilon_\sigma} \cdot \sigma_a + \psi_\sigma \cdot \sigma_m}, \quad n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_\tau}{\beta_\tau \cdot \varepsilon_\tau} \cdot \tau_a + \psi_\tau \cdot \tau_m};$$

где σ_{-1}, τ_{-1} – пределы выносливости симметричного цикла при изгибе и кручении;

σ_a, τ_a – амплитудное напряжение цикла при изгибе и кручении;

K_σ, K_τ – эффективные коэффициенты концентрации напряжений;

$\varepsilon_\sigma, \varepsilon_\tau$ – коэффициенты масштабного фактора при изгибе и кручении;

β_σ, β_τ – коэффициенты качества поверхности при изгибе и кручении;

ψ_σ, ψ_τ – коэффициенты чувствительности материала к асимметрии цикла, определяются по формулам:

$$\psi_\sigma = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}; \quad \psi_\tau = \frac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0},$$

где σ_0, τ_0 – пределы выносливости при отнулевых циклах.

Для проверки правильности определения коэффициентов запаса усталостной прочности при действии напряжений с асимметричными циклами строятся диаграммы предельных напряжений в координатах $\sigma_{\max} - \sigma_m$ и диаграмма в координатах $\sigma_a - \sigma_m$ (диаграмма предельных амплитуд), которая применяется наиболее часто. Эта диаграмма строится на основании результатов трех основных испытаний образцов: предела выносливости при симметричном цикле – σ_{-1}, τ_{-1} ; предела выносливости при отнулевом цикле – σ_0, τ_0 и предела текучести при растяжении и сдвиге – σ_T, τ_T .

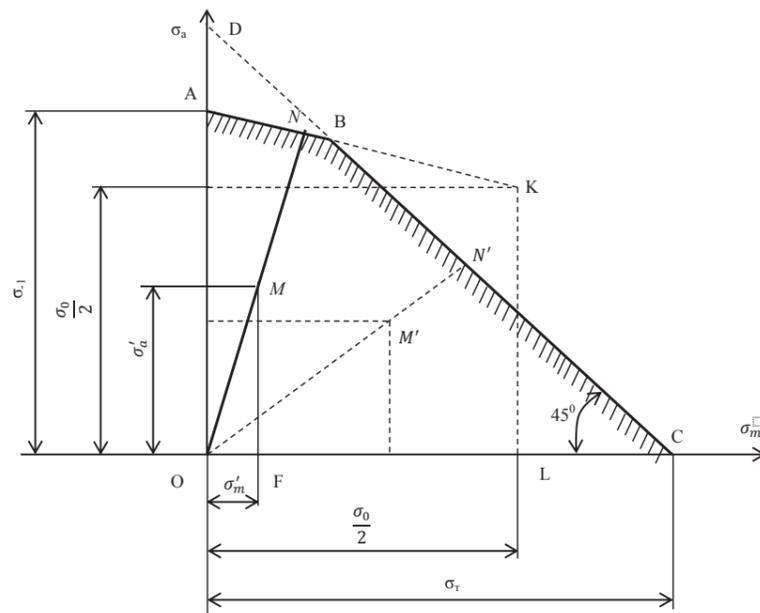


Рис. 75. Диаграмма предельных амплитуд

Прямая CD, проведенная под углом 45°, ограничивает напряжения, равные пределу текучести материала σ_T при превышении которых произойдут пластическая деформация и нарушение прочности материала.

Прямая AK будет ограничивать напряжения, при которых будет развиваться усталостная трещина.

Область безопасных циклов ограничена ломаной линией ABC и осями координат. Положение рабочей точки M на диаграмме определяется координатами: $\sigma'_m = K_\sigma \cdot \sigma_m$ и $\sigma'_a = \frac{K_\sigma}{\beta_\sigma \cdot \varepsilon_\sigma} \cdot \sigma_a$. Коэффициент усталостной прочности по Серенсу-Кинасошвили:

$n_R = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\beta_\sigma \cdot \varepsilon_\sigma} \cdot \sigma_a + \psi_\sigma \cdot \sigma_m}$. Эта же величина

может быть получена из диаграммы (рис. 75) как отношение отрезков ON и OM прямой подобных циклов, взятых в масштабе диаграммы $n_R = \frac{ON}{OM}$.

Если рабочая точка окажется в положении M' (рис. 75), то коэффициент запаса определяется по отношению к пределу текучести σ_T материала балки $n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma'_a + \sigma'_m}$ и по диаграмме $n_T = \frac{ON'}{OM'}$.

В первом случае значение коэффициента n_R показывает, что увеличение наибольшего напряжения цикла $\sigma_{\max} = \sigma'_m + \sigma'_a$ в n_R раз выведет балку из строя за счет развития трещин усталости; во втором случае увеличение наибольшего напряжения цикла в n_T раз выведет балку из строя за счет появления пластических деформаций.

Если рабочая точка оказалась за пределами области ABC, допустимых циклов, то балка выйдет из строя при ее первом нагружении. Диаграмма предельных амплитуд для касательных напряжений строится по тем же показателям, только вместо нормальных напряжений берутся касательные напряжения цикла.

Динамической называют нагрузку, быстро изменяющуюся во времени. Действие таких нагрузок сопровождается колебаниями элементов конструкций.

Напряжения и деформации, вызываемые такими нагрузками, называются динамическими.

Динамический расчет должен обеспечить необходимую прочность конструкции и не допустить значительных ее деформаций.

Общий метод расчета на динамическую нагрузку основан на известном принципе – принципе Даламбера, по которому всякое движущееся с ускорением тело может рассматриваться как находящееся в состоянии мгновенного равновесия, если к действующим на него внешним силам добавить силу инерции, направленную в сторону, противоположную ускорению.

Для тела весом G, движущегося вверх с ускорением с помощью каната (рис. 76), уравнение равновесия сил с учетом силы инерции и продольной силы натяжения каната можно составить спроектировав все силы на ось z, действующие на тело: $\Sigma F_z = 0; N_d - G - F_{in} = 0$.

Откуда динамическая продольная сила будет равна:

$$N_d = G + F_{in} = G + m \cdot a = G + \frac{G}{g} \cdot a = G \left(1 + \frac{a}{g} \right).$$



Рис. 76. Расчетная схема для тела, движущегося с ускорением

Динамические напряжения определяются как $\sigma_d \cdot A = G \left(1 + \frac{a}{g} \right); \sigma_d = \frac{G}{A} \left(1 + \frac{a}{g} \right); \sigma_d = \sigma_{ст} \cdot k_d$

где $\sigma_{ст}$ – статические напряжения от действия груза;

$$k_d - \text{динамический коэффициент, } k_d = \left(1 + \frac{a}{q}\right).$$

К динамическим относится и ударная нагрузка, хотя при расчете на удар в ряде случаев пренебрегают силами инерции, а используют закон сохранения энергии.

Рассмотрим случай продольного удара груза по неподвижному телу. Пусть груз весом G падает с высоты H на неподвижный стержень длиной l (рис. 77). Если груз G приложить к стержню статически, то стержень упруго укоротится на величину

$$\delta_{ст} = \frac{G \cdot l}{E \cdot A}.$$

При падении груза с высоты H стержень укоротится на величину

$$\delta_d = \frac{F_d \cdot l}{E \cdot A}.$$

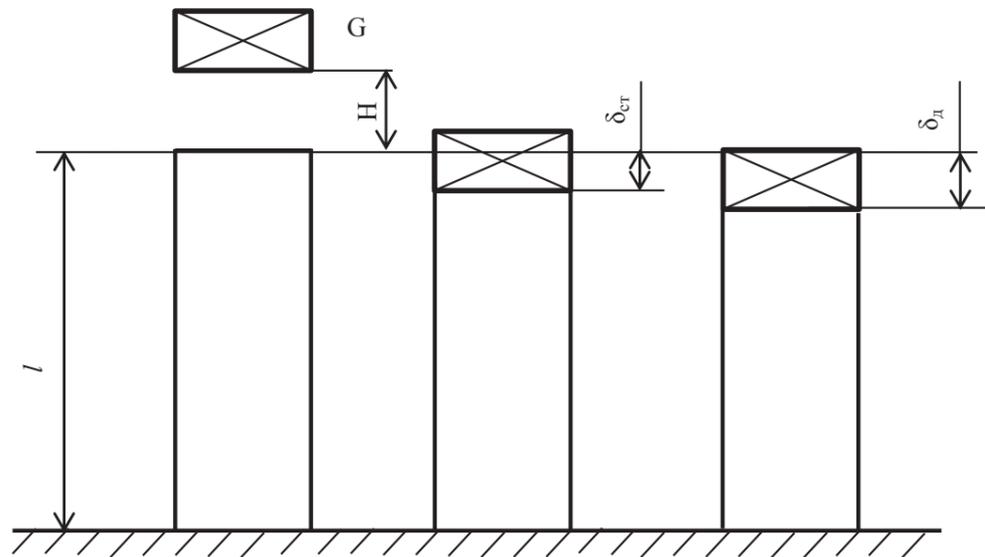


Рис. 77. Расчетная схема к определению коэффициента динамичности

Примем отношение $\frac{\delta_d}{\delta_{ст}} = k_d$ – коэффициентом динамичности, или $\delta_d = k_d \cdot \delta_{ст}$.

Принимая, что напряжения при ударе не превосходят предела пропорциональности материала, получим:

$$\sigma_d = \sigma_{ст} \cdot k_d,$$

где $\sigma_d, \sigma_{ст}$ – динамическое и статическое напряжения.

Определим коэффициент динамичности k_d из условия равенства работы падающего груза и внутренней потенциальной энергии деформации:

$$W = U_d.$$

Работа внешних сил $W = G \cdot (H + \delta_d)$. Внутренняя потенциальная энергия определяется из уравнения $U_d = \frac{1}{2} F_d \delta_d$.

С учетом равенства $W = U_d$ и после преобразований будем иметь:

$$G \cdot (H + \delta_d) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta_d^2 \cdot G}{\delta_{ст}}; \quad \delta_d^2 - 2\delta_d \cdot \delta_{ст} - 2H \cdot \delta_{ст} = 0.$$

Решая последнее уравнение относительно δ_d , получим:

$$\delta_d = \delta_{ст} \pm \sqrt{\delta_{ст}^2 + 2 \cdot \delta_{ст} \cdot H}; \quad \delta_d = \delta_{ст} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}}\right).$$

Откуда $k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}}$. Из формулы коэффициента динамичности видно, чтобы снизить

величину динамического перемещения и динамических напряжений, нужно увеличить величину статического перемещения. С этой целью применяются упругие элементы (пружины, резиновые прокладки и т. д.).

Студентам, обучающимся по направлениям подготовки «Техносферная безопасность» и «Нефтегазовое дело», в будущей работе придется иметь дело с сосудами, по давлением стенки которых воспринимают давление жидкости, газов, сыпучих тел. Если сосуды имеют форму тел вращения и толщина стенок незначительна, а нагрузка осесимметрична, то с небольшой погрешностью можно сказать, что в стенках сосуда возникают только нормальные растягивающие (сжимающие) напряжения, равномерно распределенные по толщине стенки.

Для сосуда, испытывающего внутреннее давление (рис. 78, а) выделим элементарный объем с размерами $dl_1; dl_2$ и радиусами кривизны сосуда в месте выделения элемента ρ_1 и ρ_2 (рис. 78, б).

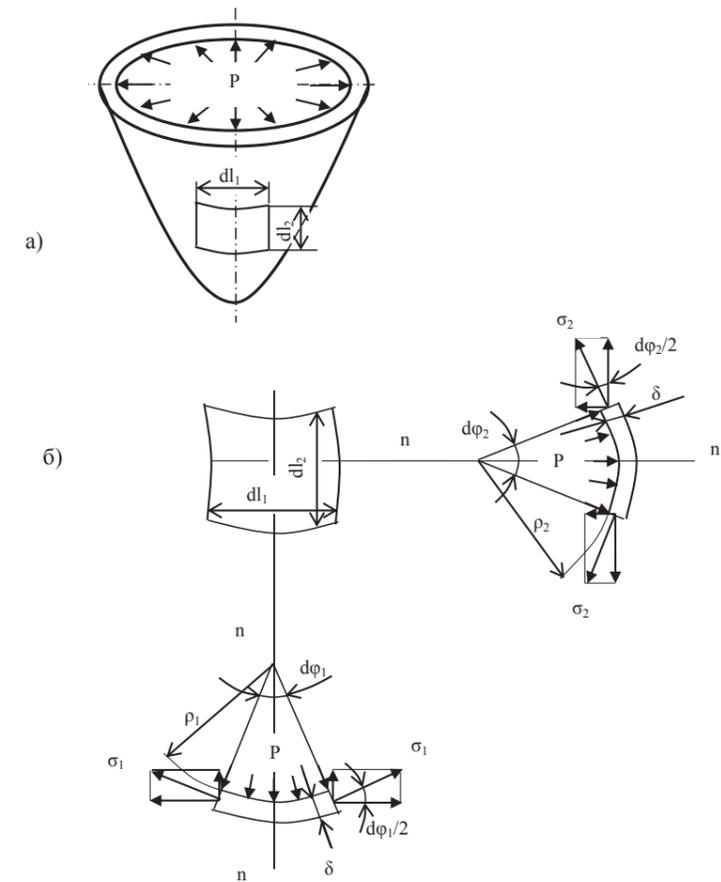


Рис. 78. Схема сосуда под давлением

Составим уравнение равновесия элемента, спроектировав силы на направление нормали n -н к поверхности элемента:

$$p \cdot dl_1 \cdot dl_2 - 2\sigma_1 \cdot \delta \cdot dl_1 \cdot \sin \frac{d\varphi_1}{2} - 2\sigma_2 \cdot \delta \cdot dl_2 \cdot \sin \frac{d\varphi_2}{2} = 0.$$

Ввиду малости элементов $\sin \frac{d\varphi_1}{2} \approx \frac{d\varphi_1}{2}, \sin \frac{d\varphi_2}{2} \approx \frac{d\varphi_2}{2}$ получим:

$$p \cdot dl_1 \cdot dl_2 - 2\sigma_1 \cdot \delta \cdot dl_1 \cdot \frac{d\varphi_1}{2} - 2\sigma_2 \cdot \delta \cdot dl_2 \cdot \frac{d\varphi_2}{2} = 0.$$

Учитывая, что $d\varphi_1 = \frac{dl_2}{\rho_1}$; $d\varphi_2 = \frac{dl_1}{\rho_2}$, получим:

$$p \cdot dl_1 \cdot dl_2 - \sigma_1 \cdot \delta \cdot dl_1 \cdot \frac{dl_2}{\rho_1} - \sigma_2 \cdot \delta \cdot dl_2 \cdot \frac{dl_1}{\rho_2} = 0.$$

Откуда $\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{\delta}$ – формула Лапласа.

Рассмотрим расчет сферического и цилиндрического сосудов:

а) сферический сосуд: $\rho_1 = \rho_2 = R$; $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$.

Из формулы Лапласа $\frac{\sigma}{R} + \frac{\sigma}{R} = \frac{p}{\delta}$; $\frac{2\sigma}{R} = \frac{p}{\delta}$; откуда $\sigma = \frac{p \cdot R}{2\delta}$.

Так как имеет место плоское напряженное состояние, то прочность определяется с использованием теорий прочности.

Сравниваем главные напряжения с напряжением $\sigma = 0$ и присваиваем индекс главным напряжениям: $\sigma_1 = \sigma$; $\sigma_2 = \sigma$; $\sigma_3 = 0$.

По теории наибольших касательных напряжений: $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{p \cdot R}{2\delta} \leq [\sigma]$.

По энергетической теории прочности:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma^2 + \sigma^2)} = \sigma = \frac{p \cdot R}{2\delta} \leq [\sigma].$$

Условие прочности по теории наибольших касательных напряжений и по энергетической теории прочности эквивалентные напряжения имеют одинаковый результат;

б) цилиндрический сосуд: $\rho_1 = R$; $\rho_2 = \infty$.

По формуле Лапласа имеем: $\frac{\sigma_1}{R} + \frac{\sigma_2}{\infty} = \frac{p}{\delta}$; $\frac{\sigma_1}{R} = \frac{p}{\delta}$. Откуда $\sigma_1 = \frac{p \cdot R}{\delta}$.

Для определения σ_2 рассечем сосуд плоскостью, перпендикулярной оси (рис. 79), проектируя силы на ось z.

$$-p \cdot \pi \cdot R^2 + \sigma_2 \cdot 2\pi \cdot R \cdot \delta = 0; \quad \sigma_2 = \frac{p \cdot R}{2\delta}.$$

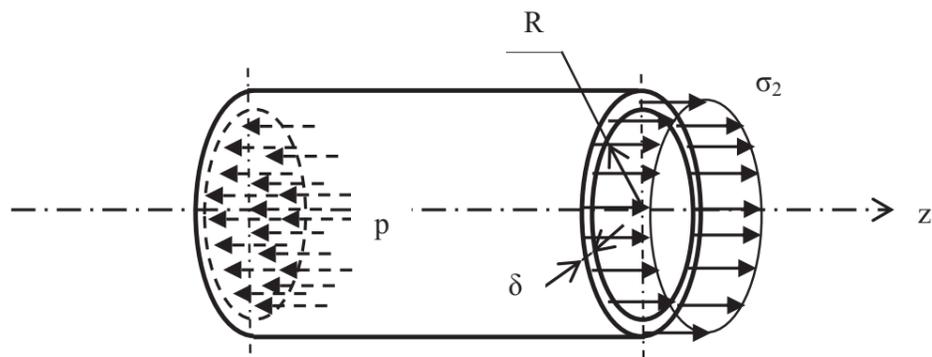


Рис. 79. Схема цилиндрического сосуда для определения главных напряжений σ_2

Тогда главные напряжения будут равны: $\sigma_1 = \frac{p \cdot R}{\delta}$; $\sigma_2 = \frac{p \cdot R}{2\delta}$; $\sigma_3 = 0$.

Условие прочности по теории наибольших касательных напряжений:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{p \cdot R}{\delta} \leq [\sigma].$$

По энергетической теории прочности:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = 0,86 \frac{p \cdot R}{\delta} \leq [\sigma].$$

Разница в расчетах составляет приблизительно 14 %. Для расчета цилиндрических сосудов (тонкостенных труб) рекомендуется применять энергетическую теорию прочности. Формулу Лапласа следует применять, если $\delta \leq \frac{1}{10} \cdot \rho$.

Вопросы для самопроверки:

1. Дать определение цикла напряжения.
2. Привести схемы симметричного и несимметричного циклов.
3. Что называется коэффициентом асимметрии цикла?
4. Что называется пределом выносливости материала?
5. Как определяется предел выносливости и как строится кривая усталости?
6. Какие факторы влияют на величину предела выносливости?
7. Расчеты на прочность при действии знакопеременных нормальных и касательных напряжений.
8. Прочность при ударных нагрузках. Коэффициент динамичности. Определение динамических напряжений и перемещений.
9. Запишите формулу Лапласа для сферического сосуда, для трубы.

V. УКАЗАНИЯ ПО ОФОРМЛЕНИЮ И ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

Расчетно-графические работы выполняются студентами в виде контрольной работы, которая составлена по многовариантной схеме. Выбор варианта задания и необходимых данных производится по первым буквам своей фамилии, имени и отчества, по таблицам, приведенным к каждой задаче контрольной работы.

Контрольная работа, выполненная не в соответствии с этими указаниями, не рассматривается и возвращается студенту.

При выполнении контрольной работы необходимо соблюдать следующие требования:

1. Контрольная работа выполняется на гладкой или клетчатой писчей бумаге формата А4 (297 x 210 мм).

2. Контрольная работа должна иметь титульный лист, оформленный, как представлено на рисунке 80.

3. Все расчеты и пояснения в контрольной работе оформляются только на одной стороне листа (обратная сторона листа используется для замечаний преподавателя и исправления возможных ошибок). На левой стороне листа оставляется поле шириной 25 мм для сшивки листов. Работа выполняется чернилами, четко и аккуратно. Допускается применение набора текста на компьютере. (Шрифт текста Times New Roman, размер шрифта 14 пт, межстрочный интервал полуторный, отступ первой строки абзаца 0,5 см, выравнивание текста по ширине, автоматическая расстановка переносов. В остальном тексте – межстрочный интервал одинарный.) Решение каждой задачи рекомендуется начинать с новой страницы.

4. Перед решением каждой задачи нужно выписать условие задачи с ее числовыми значениями, и на чертеже должны быть указаны числовые, а не буквенные значения.

5. Все чертежи, расчетные схемы и эпюры выполняются на отдельных листах с сохранением масштаба и применением чертежных инструментов. Эпюры внутренних силовых факторов должны быть выполнены строго под расчетной схемой, озаглавлены с указанием размерности, заштрихованы и на них должны быть указаны все характерные ординаты, включая экстремальные значения.

6. Решение задач должно сопровождаться краткими пояснениями, в случае необходимости пояснение иллюстрируется чертежами либо эскизами. Рекомендуется задачу решать в общем виде, а затем в конечную формулу подставлять численные значения величин, вычислять результаты. Полученные результаты необходимо определить в соответствии с существующими правилами вычислений.

Единицы измерения именованных величин указываются обязательно в окончательных расчетах. В конце работы приводится список использованной литературы.

7. Все листы и титульный лист должны быть аккуратно сброшюрованы, страницы пронумерованы, а рисунки и таблицы пронумерованы. В конце контрольной работы студентом указывается дата ее выполнения и ставится подпись студента.

8. По получении проверенной работы студент должен исправить в ней все отмеченные ошибки и выполнить все сделанные ему указания. По контрольной работе перед зачетом или экзаменом проводится собеседование, в процессе которого могут быть заданы вопросы теоретического и практического характера.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САХАЛИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК И ТЕХНОСФЕРНОЙ БЕЗОПАСНОСТИ
КАФЕДРА БЕЗОПАСНОСТИ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Контрольная работа по механике (машиноведению),
модуль «Сопротивление материалов»

Выполнил:
студент 3-го курса ОЗО направление подготовки:
20.03.01 Техносферная безопасность
Иванов Иван Иванович

Проверил:
доцент, к. т. н. Петров В. В.

Адрес: Сахалинская область,
г. Корсаков, ул. Советская, д. 15, кв. 54.
E-mail: vv_ivanov@mail.ru

Южно-Сахалинск – 2020

Рис. 80. Пример оформления титульного листа контрольной работы

VI. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Расчетно-графические работы выполняются по многовариантным заданиям на контрольные работы. Для каждого задания имеются примеры выполнения заданий. Для каждого направления подготовки выполняется разное количество заданий, которые приведены ниже.

- 20.03.01 «Техносферная безопасность» – задания 1–6, 8, 9, 11.
- 44.03.01 «Педагогическое образование», профиль «Технология» – задания 1–6, 8, 9, 11.
- 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» – задания 1–6.
- 21.03.01 «Нефтегазовое дело» – все задания.
- 20.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов» – все задания.
- 08.03.01 «Строительство» – все задания
- 05.03.01 «Геология» – задания 1–6, 8.

ЗАДАЧА № 1. Расчет ступенчатого стержня

Для ступенчатого стержня ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_T = 240$ МПа) необходимо определить:

1. Продольные силы по его длине и построить эпюру продольных сил.
2. Определить нормальные напряжения в поперечных сечениях и построить эпюру нормальных напряжений.
3. Определить коэффициент запаса прочности для опасного сечения.
4. Определить аналитически нормальное и касательное напряжения в опасном сечении на площадке, расположенной под углом α к поперечному сечению стержня.
5. Определить полное перемещение свободного конца стержня и построить эпюру перемещений.

Данные для расчета приведены в таблице 2 и рисунке 81.

Таблица 2

Алфавит	№ схемы	Нагрузка, кН			Площадь, см ²		Длина участка, м				α , град
		F_1	F_2	F_3	A_1	A_2	a	b	c	d	
А.К.Ф.	1	30	10	5	1,8	2,5	0,2	0,5	0,7	0,4	45
Б.Л.Х.	2	16	15	10	2,5	3,4	0,2	0,6	0,7	0,5	35
В.М.Ц.	3	32	16	9	1,6	2,3	0,2	0,7	0,5	0,6	30
Г.Н.Ч.	4	36	20	12	1,1	1,7	0,5	0,2	0,7	0,4	40
Д.О.Ш.	5	26	13	7	1,3	2,3	0,5	0,7	0,6	0,2	0
Е.П.Щ.	6	18	12	5	1,8	2,6	0,5	0,6	0,2	0,7	50
Е.Р.Ы.	7	24	11	6	0,9	1,8	0,7	0,2	0,5	0,4	55
Ж.С.Э.	8	27	14	8	1,2	1,8	0,7	0,5	0,6	0,2	40
З.Т.Ю.	9	11	16	20	0,6	1,2	0,7	0,6	0,2	0,5	15
И.У.Я.	10	17	26	30	1,2	1,8	0,6	0,2	0,7	0,6	60

Порядок выбора данных контрольной работы:

1. № схемы – начальная буква фамилии.
2. Нагрузки F – начальная буква имени.
3. Площади A – начальная буква отчества.
4. Длина участка – начальная буква фамилии.
5. Угол α – начальная буква имени.

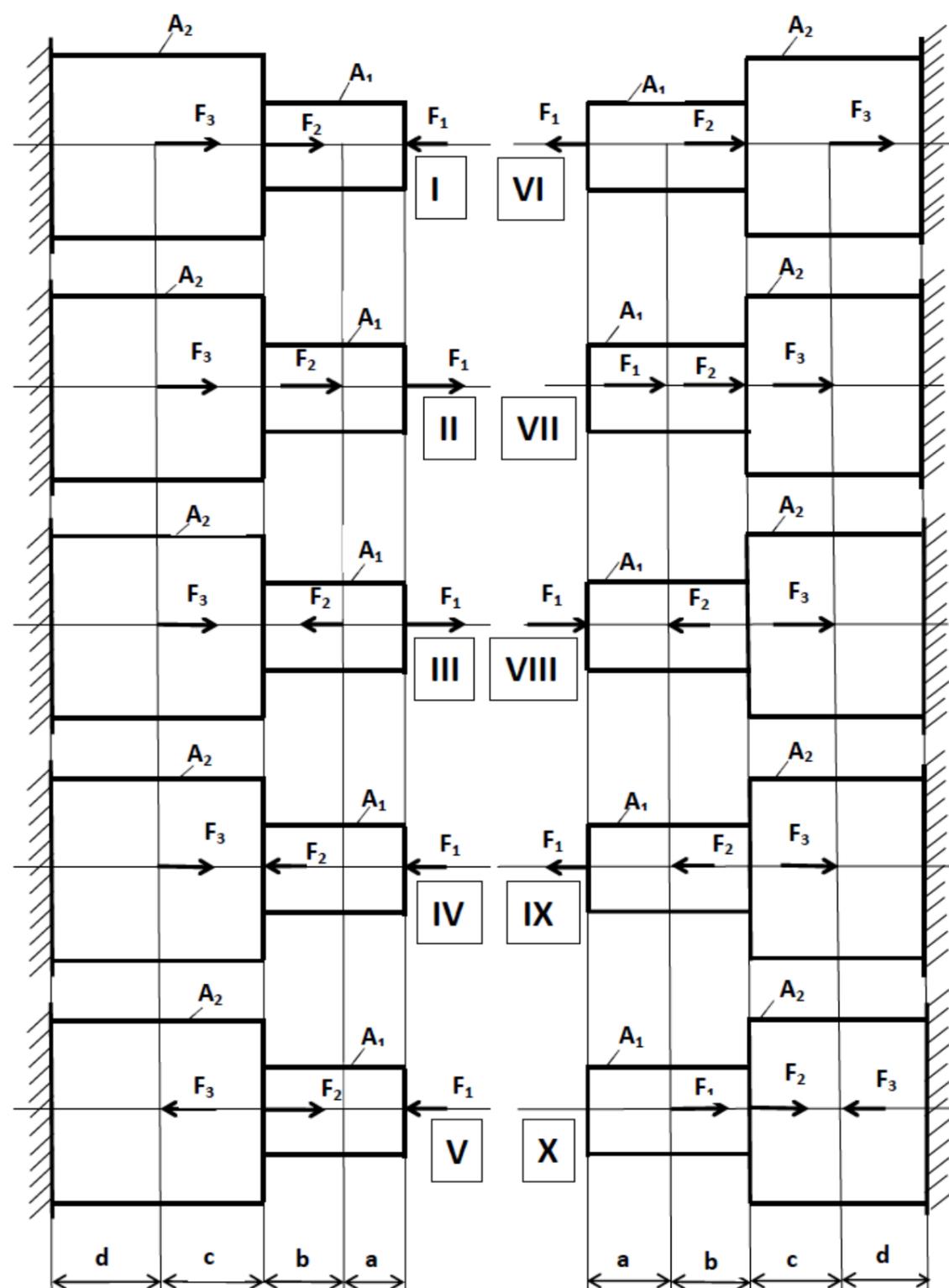


Рис. 81. Схемы для задачи 1

ЗАДАЧА № 2. Расчет статически неопределимого ступенчатого стержня

Для статически неопределимого стержня, нагруженного системой внешних сил (рис. 82, табл. 3), определить:

1. Продольные силы и нормальные напряжения в поперечных сечениях ступенчатого стержня.
2. Построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений.
3. Проверить условие прочности для опасного сечения стержня при $[\sigma] = 160$ МПа.
4. Построить эпюру перемещений ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа).

Таблица 3

Алфавит	№ схемы	Сила, кН		Площадь, см ²		Длина участка, м		
		F ₁	F ₂	A ₁	A ₂	a = d	b	c
А.К.Ф.	1	20	40	2,0	2,5	0,2	0,5	0,7
Б.Л.Х.	2	25	44	2,5	3,4	0,2	0,6	0,7
В.М.Ц.	3	30	50	2,0	2,3	0,2	0,7	0,5
Г.Н.Ч.	4	35	24	1,5	2,7	0,5	0,2	0,7
Д.О.Ш.	5	40	30	1,8	2,3	0,5	0,7	0,6
Е.П.Щ.	6	45	32	2,1	2,6	0,5	0,6	0,2
Е.Р.Ы.	7	50	36	2,2	2,8	0,7	0,2	0,5
Ж.С.Э.	8	55	15	2,5	3,0	0,7	0,5	0,6
З.Т.Ю.	9	60	20	2,4	3,2	0,7	0,6	0,2
И.У.Я.	10	70	22	2,5	3,8	0,6	0,2	0,7

Порядок выбора данных:

1. № схемы – начальная буква фамилии.
2. Значение сил – начальная буква имени.
3. Площадь сечения – начальная буква отчества.
4. Длина участка – начальная буква фамилии.

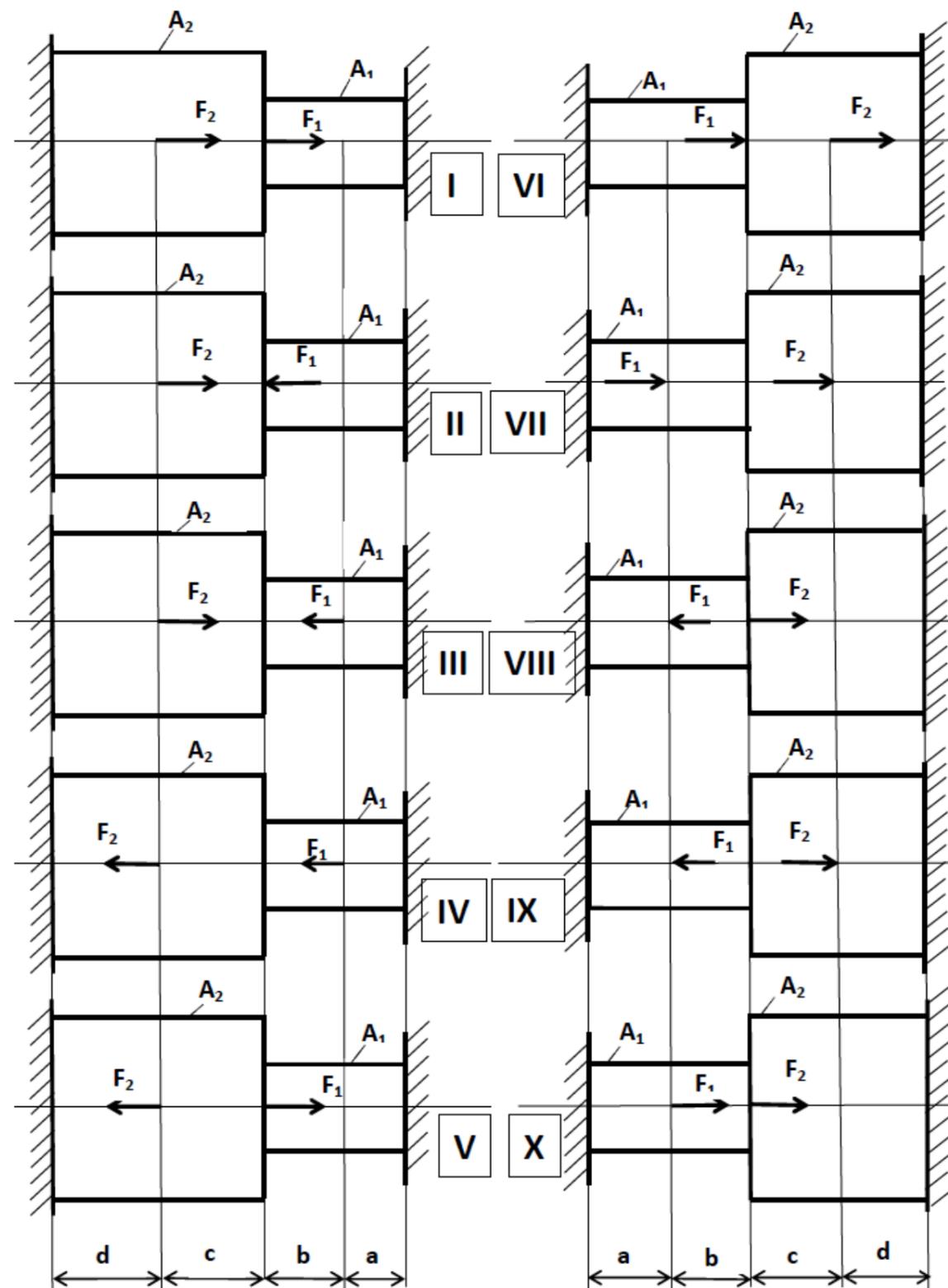


Рис. 82. Схемы для задачи 2

ЗАДАЧА № 3. Практические расчеты на срез и смятие

Для схем (рис. 83, табл. 3) I–IV определить необходимое количество заклепок диаметром d для соединения листов внахлест, если $[\tau_{ср}] = 80$ МПа, а $[\sigma_{см}] = 320$ МПа. Толщины листов и величина растягивающих усилий приведены в таблице 4.

Для схемы VII определить длину фланговых и лобового шва, а для схемы VIII – ширину привариваемой пластины и длину фланговых швов для соединения внахлест двух листов, если для сварных швов $[\tau_{ср}] = 100$ МПа, а $[\sigma] = 160$ МПа. Толщины листов и величина растягивающих усилий приведены в таблице 3.

Таблица 4

Алфавит	№ схемы	Толщина листов, мм			Диаметр заклепок, мм	Сила F , кН
		δ_1	δ_2	δ_3		
А.К.Ф.	1	10	10		20	250
Б.Л.Х.	2	8	8	10	17	220
В.М.Ц.	3	6	6	6	15	200
Г.Н.Ч.	1	5	5		15	150
Д.О.Ш.	4	10	10	10	17	250
Е.П.Щ.	5	8	8	8	15	200
Е.Р.Ы.	6	8	10	8	12	150
Ж.С.Э.	7	8	8		11	220
З.Т.Ю.	7	10	10		13	240
И.У.Я.	8	10	10		15	220

Порядок выбора данных:

1. № схемы и толщина листов – начальная буква фамилии.
2. Диаметр заклепок – начальная буква имени.
3. Сила – начальная буква отчества.

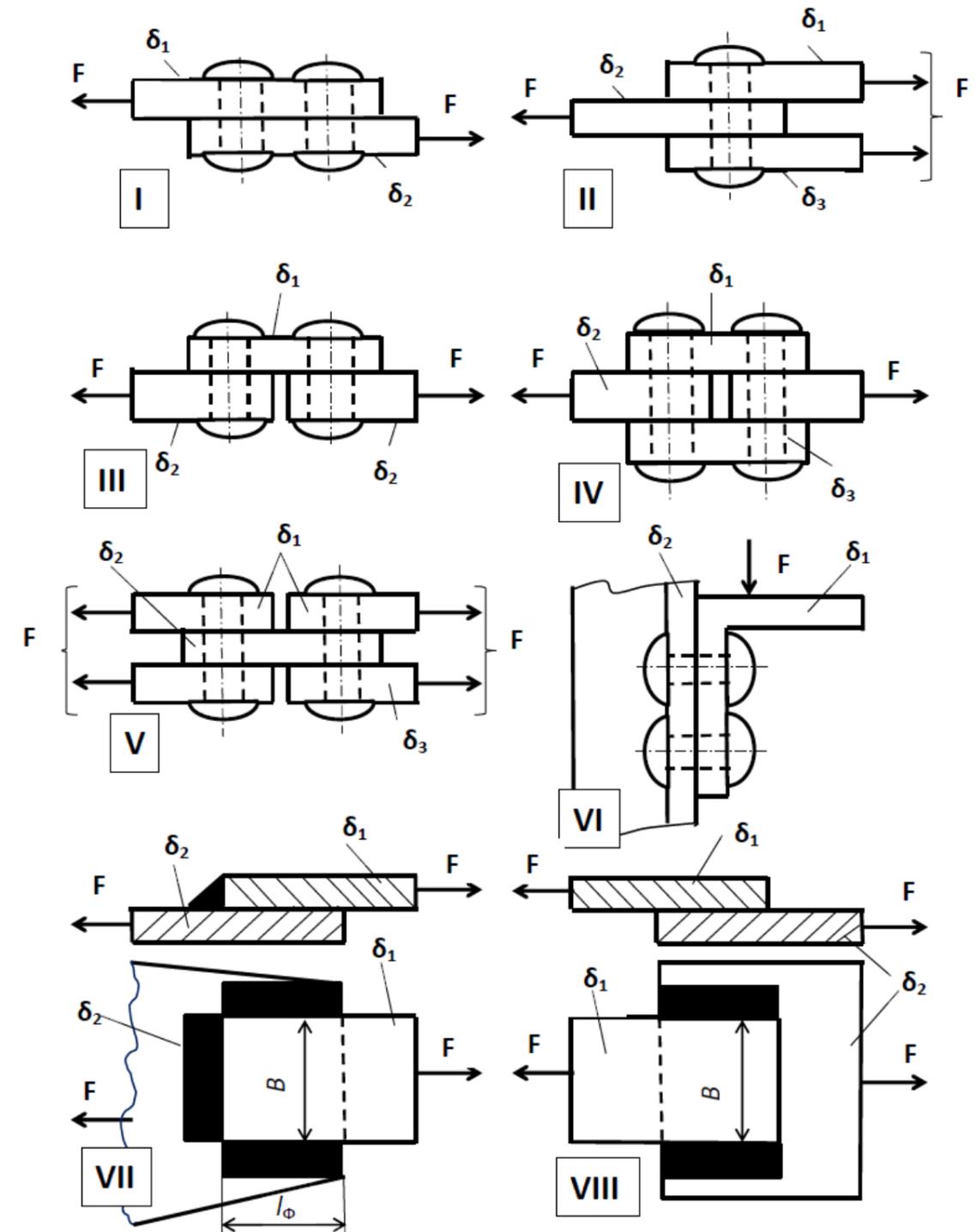


Рис. 83. Схемы для задачи 3

ЗАДАЧА № 4. Расчет вала на кручение

Для заданного вала при $[\tau] = 80 \text{ МПа}$, $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $[\theta] = 0,05 \text{ рад/м}$ требуется:

1. Построить эпюру крутящих моментов.
2. Определить диаметр вала из условия прочности и жесткости на кручение.
3. Построить эпюру максимальных касательных напряжений.
4. Построить эпюру углов закручивания, производя отсчет углов от опорного защемления.
5. Из условия равнопрочности вала для опасного участка заменить круглое поперечное сечение вала кольцевым при $\alpha = 0,7$ и сравнить вес вала.

Данные для расчета приведены в таблице 5 и рисунке 84.

Таблица 5

Алфавит	№ схемы	Направление моментов				Значение моментов, кН·м				Длина участка вала, м			
		M_1	M_2	M_3	M_4	M_1	M_2	M_3	M_4	a	b	c	d
А.К.Ф.	1	-	-	-	+	2	3	4	5	0,2	0,5	0,7	0,6
Б.Л.Х.	2	-	-	+	+	5	4	3	2	0,2	0,6	0,7	0,5
В.М.Ц.	3	-	+	+	+	2	4	3	5	0,2	0,7	0,5	0,6
Г.Н.Ч.	4	+	-	+	-	2	3	4	5	0,5	0,2	0,7	0,6
Д.О.Ш.	5	+	+	-	-	3	2	4	5	0,5	0,7	0,6	0,2
Е.П.Щ.	6	+	-	-	+	3	4	2	5	0,5	0,6	0,2	0,7
Е.Р.Ы.	7	+	-	+	+	3	5	4	2	0,7	0,2	0,5	0,6
Ж.С.Э.	8	-	+	-	+	4	3	2	5	0,7	0,5	0,6	0,2
З.Т.Ю.	9	-	+	+	-	4	2	3	5	0,7	0,6	0,2	0,5
И.У.Я.	10	+	-	-	-	4	5	3	2	0,6	0,2	0,7	0,5

Порядок выбора данных:

1. Направление скручивающих моментов – начальная буква фамилии.
2. Моменты – начальная буква имени.
3. Длина участков – начальная буква отчества.

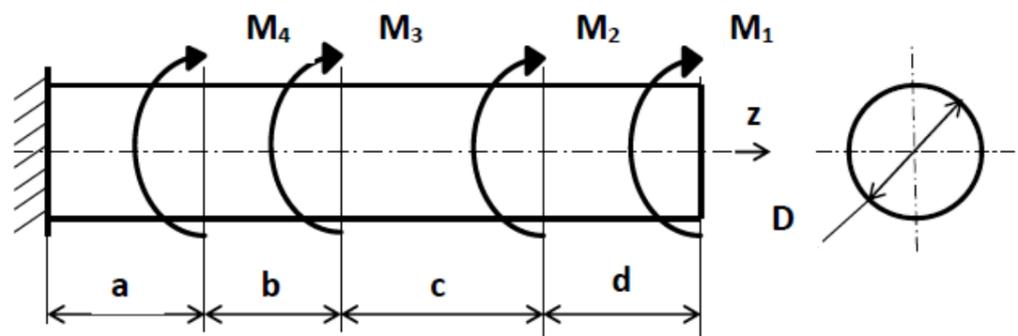


Рис. 84. Схемы для задачи 4

Примечание: направление скручивающего момента направить согласно варианту задания. Момент направлен против движения часовой стрелки.

ЗАДАЧА № 5. Геометрические характеристики плоских сечений

Для составного поперечного сечения, изготовленного из стандартных прокатных профилей, требуется:

1. Определить положение центра тяжести относительно произвольных осей.
2. Построить центральные оси, параллельные выбранной произвольной системе осей, относительно которых определен центр тяжести сечения.
3. Определить величины осевых и центробежного момента инерции относительно центральных осей.
4. Определить положение главных центральных осей инерции.
5. Найти экстремальные значения осевых моментов инерции относительно главных центральных осей инерции.
6. Определить главные радиусы инерции и построить эллипс инерции.
7. Начертить сечение в масштабе и указать на нем все оси и все размеры.
8. При расчете все необходимые данные следует брать из таблиц сортамента. Данные для расчета приведены в таблице 6 и рисунке 85.

Таблица 6

Алфавит	№ схемы	Уголок	Швеллер
А.К.Ф.	1	80 x 80 x 8	№ 14
Б.Л.Х.	2	80 x 80 x 10	№ 16
В.М.Ц.	3	90 x 90 x 8	№ 18
Г.Н.Ч.	4	40 x 40 x 4	№ 12
Д.О.Ш.	5	60 x 60 x 5	№ 18-а
Е.П.Щ.	6	100 x 100 x 8	№ 22-а
Е.Р.Ы.	7	140 x 90 x 10	№ 30
Ж.С.Э.	8	160 x 100 x 10	№ 27
З.Т.Ю.	9	70 x 45 x 5	№ 33
И.У.Я.	10	40 x 25 x 4	№ 24-а

Порядок выбора данных:

1. № схемы – начальная буква фамилии.
2. Уголок – начальная буква имени.
3. Швеллер – начальная буква отчества.

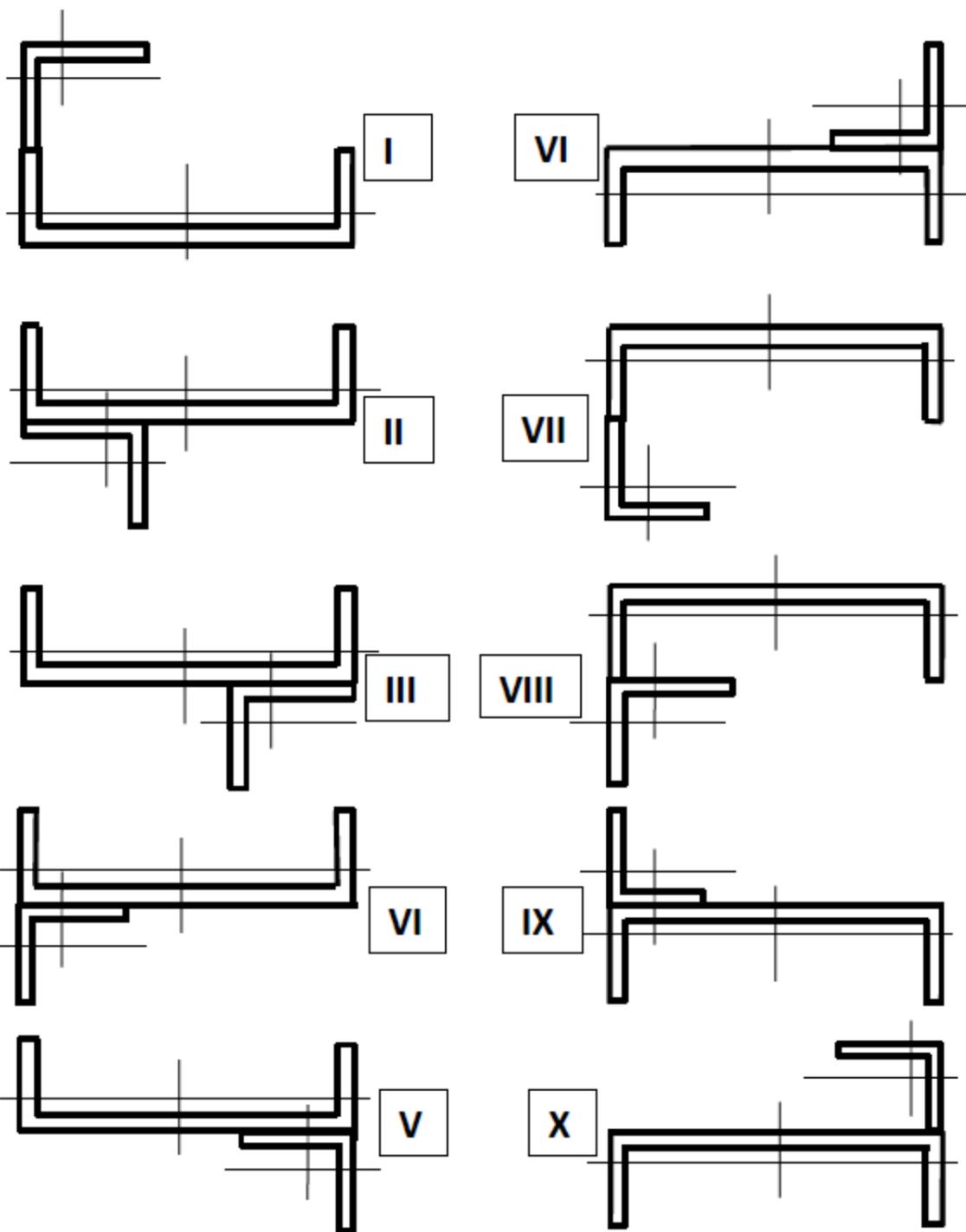


Рис. 85. Схемы для задачи 5

ЗАДАЧА № 6. Расчет балки на изгиб

Для заданных балок требуется:

1. Из условий равновесия балки определить реакции опор.
2. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.
3. Из расчета на прочность по нормальным напряжениям подобрать двутавровое, круглое и прямоугольное сечения и сравнить массу балки каждого профиля, если материал балки – сталь 3, $[\sigma] = 160$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.
4. Для опасного сечения балки двутаврового сечения проверить прочность по эквивалентным напряжениям с использованием теории наибольших касательных напряжений.
5. Для консольно закрепленной балки двутаврового сечения (рис. 86, б) определить прогиб и угол поворота свободного конца балки.

Данные для расчета приведены в таблице 7 и рисунке 86.

Таблица 7

Алфавит	№ схемы	Внешняя нагрузка			Длина участка балки, м			Отношение h/b
		q, кН/м	F, кН	M, кНм	a	b	c	
А.К.Ф.	1	20	100	15	0,5	0,6	0,4	2
Б.Л.Х.	2	25	80	20	0,8	0,2	0,4	1,5
В.М.Ц.	3	30	70	22	0,3	0,5	0,8	1,25
Г.Н.Ч.	4	35	90	24	0,9	0,2	0,4	1,75
Д.О.Ш.	5	40	60	30	0,2	0,5	0,6	2,5
Е.П.Щ.	6	45	50	32	0,9	0,5	0,3	2
Е.Р.Ы.	7	50	30	36	2,0	1,5	1,0	1,5
Ж.С.Э.	8	55	20	40	2,5	1,2	1,8	1,25
З.Т.Ю.	9	60	120	44	2,8	1,8	1,2	1,75
И.У.Я.	10	70	40	50	3,0	2,2	0,8	2,5

Порядок выбора данных:

1. № схемы, h/b – начальная буква фамилии.
2. F, a, c – начальная буква имени.
3. q, M, b – начальная буква отчества.

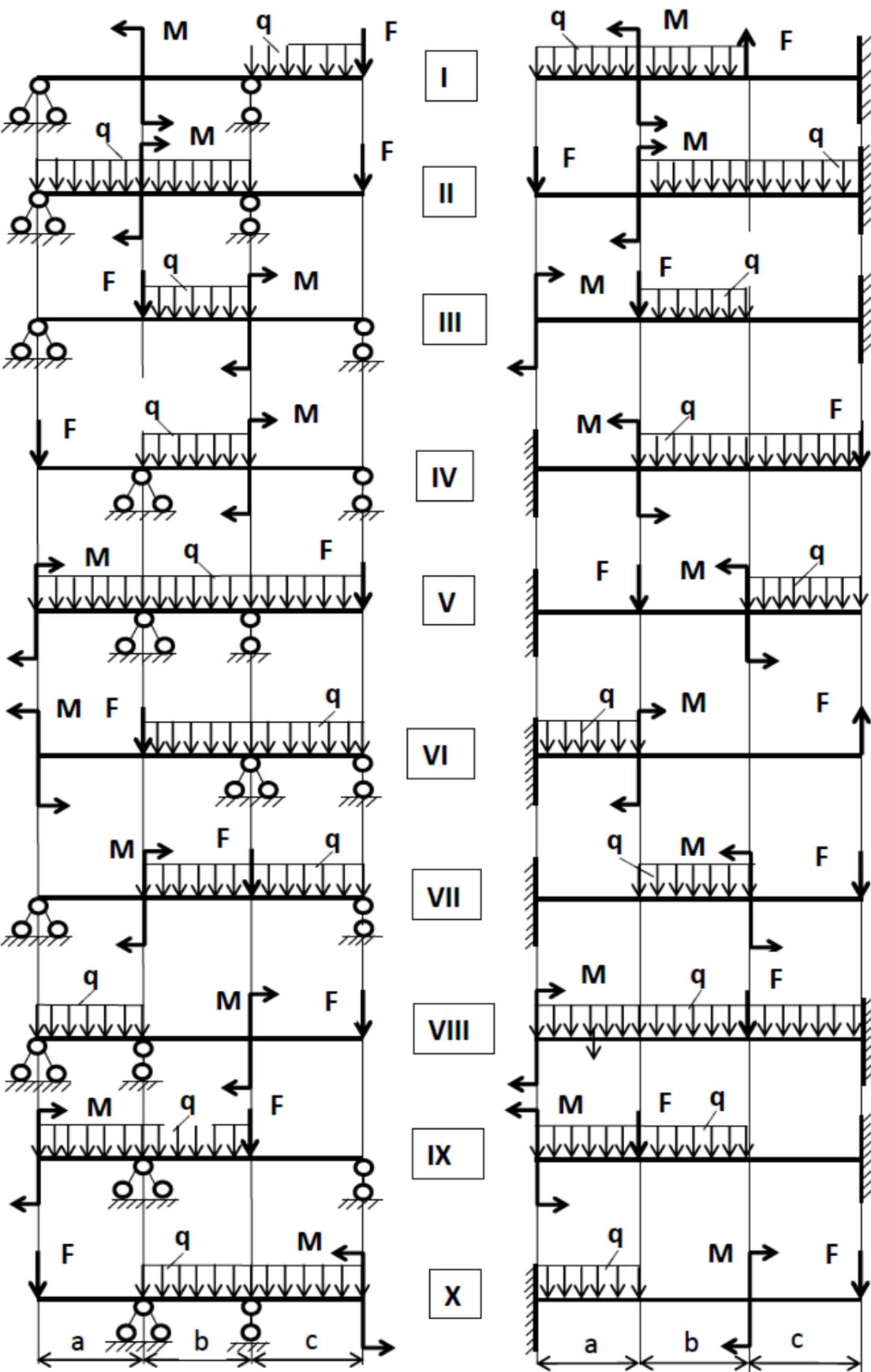


Рис. 86. Схемы для задачи 6

ЗАДАЧА № 7. Расчет статически неопределимых систем

Для заданного абсолютно жесткого бруса, имеющего шарнирно-неподвижную опору и две тяги из упругопластического материала, нагруженного переменной по значению силой F (рис. 87, табл. 8), требуется:

1. Вычертить расчетную схему в определенном масштабе.
2. Найти в зависимости от силы F значения усилий в тягах.
3. Определить в процессе увеличения силы F ее значение, при котором напряжение в одной из тяг достигнет предела текучести.
4. Определить в процессе увеличения силы F ее значение, при котором несущая способность обеих тяг будет исчерпана.
5. Найти значение грузоподъемности из расчета по методу допускаемых напряжений и методу разрушающих нагрузок, если коэффициент запаса прочности $k = 1,5$, допускаемые напряжения $[\sigma] = \sigma_T/k$, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа и предел текучести материала тяг $\sigma_T = 240$ МПа. Сопоставить результаты и сделать выводы.

Таблица 8

Алфавит	№ схемы	Площади стержней, см ²		Длина участка бруса, м			Длина тяги, м	
		A_1	A_2	a	b	c	l_1	l_2
А.К.Ф.	1	2	12	1,5	1,6	1,4	0,6	2,4
Б.Л.Х.	2	3	11	1,8	1,2	1,4	0,8	2,2
В.М.Ц.	3	4	10	1,3	1,5	1,8	1,0	2,0
Г.Н.Ч.	4	5	9	1,9	1,2	1,4	1,2	1,8
Д.О.Ш.	5	6	8	1,2	1,5	1,6	1,4	1,6
Е.П.Щ.	6	7	7	1,9	1,5	1,3	1,6	1,4
Е.Р.Ы.	7	8	5	2,0	1,5	1,0	1,8	1,2
Ж.С.Э.	8	9	4	1,5	1,2	1,8	2,0	1,0
З.Т.Ю.	9	10	3	1,8	1,8	1,2	2,2	0,8
И.У.Я.	10	11	2	1,0	2,2	1,8	2,4	0,6

Порядок выбора данных:

1. № схемы, l_1, l_2 – начальная буква фамилии.
2. A_1, A_2 – начальная буква имени.
3. a, b, c – начальная буква отчества.

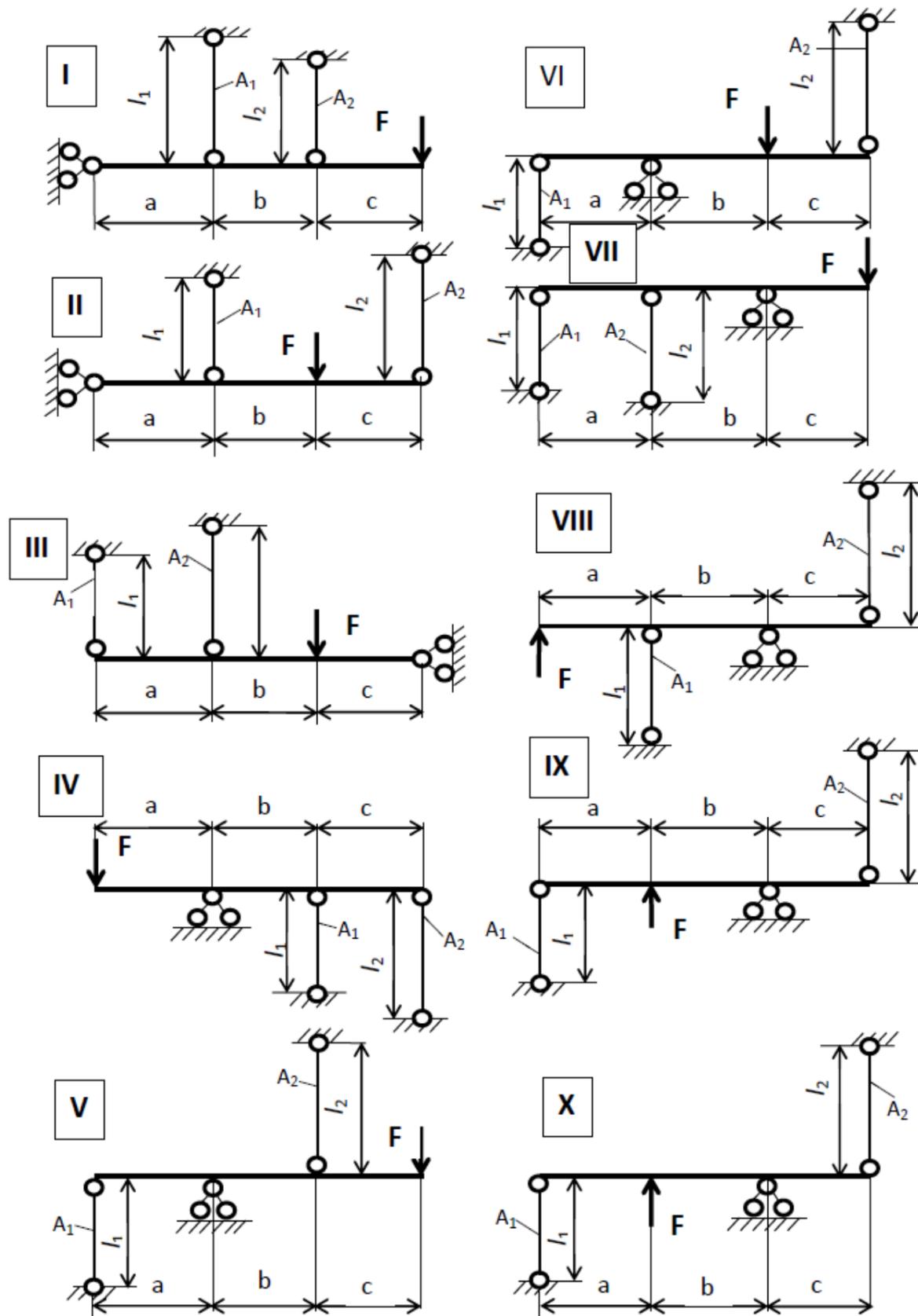


Рис. 87. Схемы для задачи 7

ЗАДАЧА № 8. Расчет статически неопределимых балок

Для статически неопределимой балки постоянного поперечного сечения (рис. 88, табл. 9) требуется:

1. Построить эпюры изгибающих моментов M и поперечных сил Q .
2. Подобрать номер прокатного двутавра из условия прочности по нормальным напряжениям при $[\sigma] = 160$ МПа.
3. Изобразить вид упругой оси балки исходя из эпюры изгибающих моментов и условий закрепления балки.

Таблица 9

Алфавит	№ схемы	Внешняя нагрузка			Размеры участков балки, м		
		q, кН/м	F, кН	M, кНм	a	b	c
А.К.Ф.	1	5	20	70	1,5	1,6	1,4
Б.Л.Х.	2	10	25	65	1,8	1,2	1,4
В.М.Ц.	3	15	30	50	1,3	1,5	1,8
Г.Н.Ч.	4	20	35	45	1,9	1,2	1,4
Д.О.Ш.	5	25	40	40	1,2	1,5	1,6
Е.П.Щ.	6	30	45	35	1,9	1,5	1,3
Е.Р.Ы.	7	35	50	30	2,0	1,5	1,0
Ж.С.Э.	8	40	55	25	1,5	1,2	1,8
З.Т.Ю.	9	45	60	20	1,8	1,8	1,2
И.У.Я.	10	50	65	15	1,0	2,2	1,8

Порядок выбора данных:

1. № схемы – начальная буква фамилии.
2. q, F, M – начальная буква имени.
3. a, b, c – начальная буква отчества.

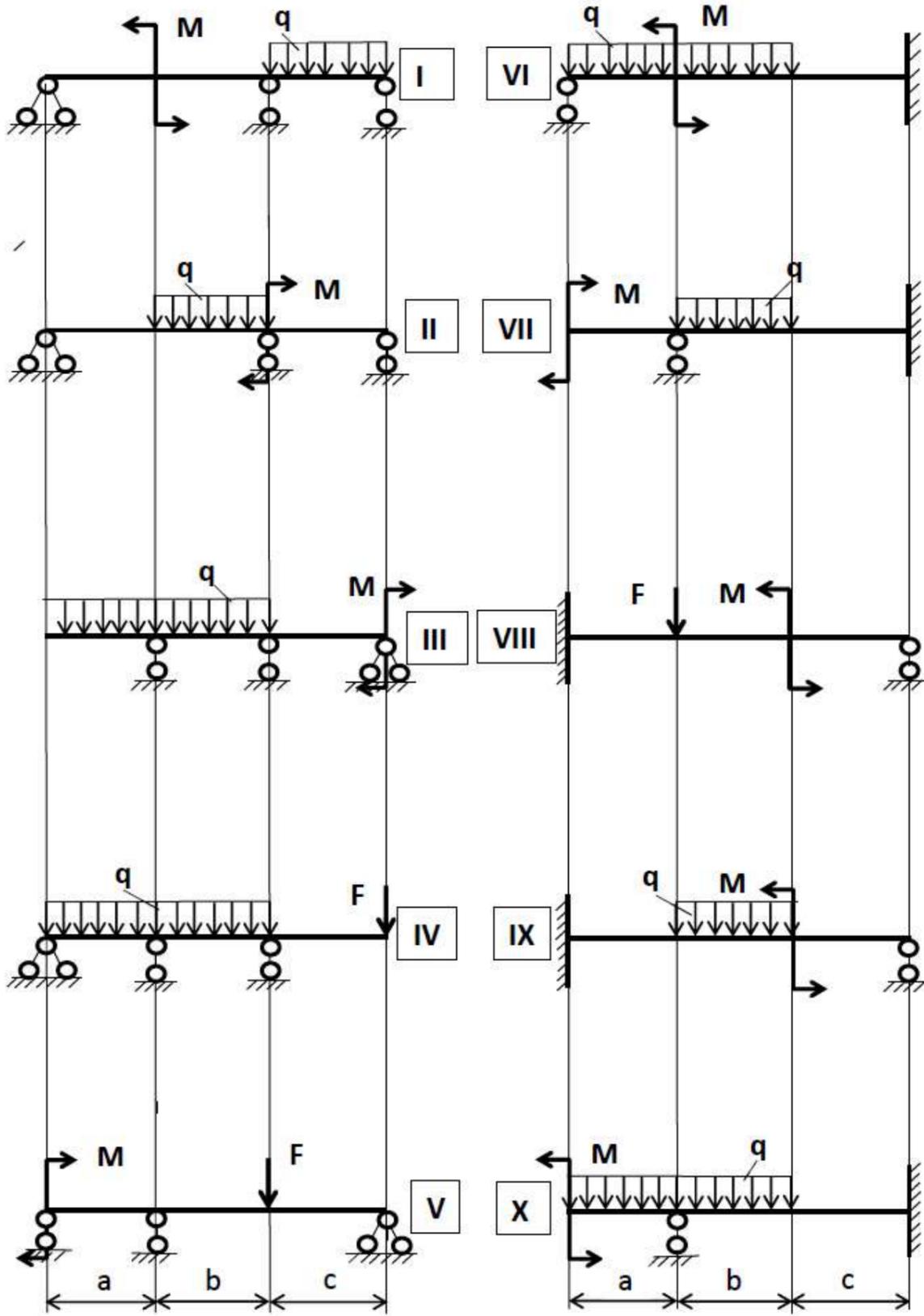


Рис. 88. Схемы для задачи 8

ЗАДАЧА № 9. Сложное сопротивление

Деревянная балка прямоугольного поперечного сечения ($b \times h$), нагруженная в соответствии с рисунком 89 и данными таблицы 10, требуется:

1. Найти размеры поперечного сечения балки из условия прочности при $[\sigma] = 12 \text{ МПа}$.
2. Построить эпюру распределения нормальных напряжений в опасном сечении.

Таблица 10

Алфавит	№ схемы	Внешняя нагрузка			Длина участка балки, м			Отношение размеров поперечного сечения b/h
		F, кН	q, кН/м	M, кНм	a	b	c	
А.К.Ф.	1	9	10	40	1,5	1,6	1,4	1,1
Б.Л.Х.	2	8	12	38	1,8	1,2	1,4	1,2
В.М.Ц.	3	6	14	36	1,3	1,5	1,8	1,3
Г.Н.Ч.	4	5	16	34	1,9	1,2	1,4	1,4
Д.О.Ш.	5	6	18	32	1,2	1,5	1,6	1,5
Е.П.Щ.	6	10	20	30	1,9	1,5	1,3	1,6
Е.Р.Ы.	7	8	22	28	2,0	1,5	1,0	1,7
Ж.С.Э.	8	9	24	26	1,5	1,2	1,8	1,8
З.Т.Ю.	9	10	26	24	1,8	1,8	1,2	1,9
И.У.Я.	10	11	28	20	1,0	2,2	1,8	2,0

Порядок выбора данных:

1. № схемы, b/h – начальная буква фамилии.
2. F, q, M – начальная буква имени.
3. a, b, c – начальная буква отчества.

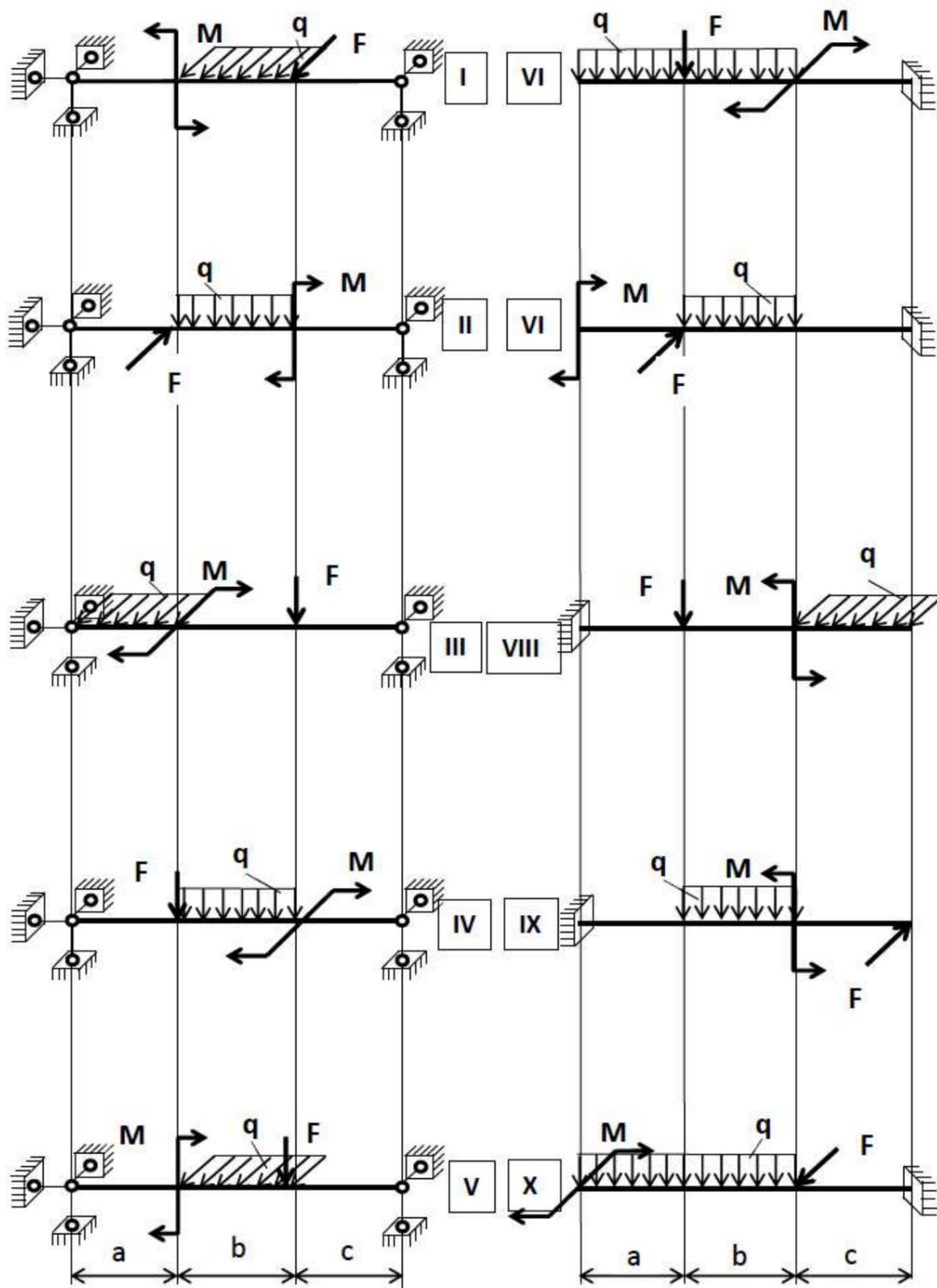


Рис. 89. Схемы для задачи 9

ЗАДАЧА 10. Сложное сопротивление

Изогнутый стальной брус круглого поперечного сечения загружен системой сил в соответствии с рисунком 90 и данными таблицы 11. Проверить прочность бруса, используя третью теорию прочности при $[\sigma] = 160$ МПа.

Таблица 11

Алфавит	№ схемы	Длина участка бруса и его диаметр, м				Нагрузка, кН	
		a	b	c	d	F ₁	F ₂
А.К.Ф.	1	0,5	0,4	0,5	0,08	19	5
Б.Л.Х.	2	0,8	0,5	0,6	0,10	18	6
В.М.Ц.	3	0,3	0,6	0,7	0,12	16	7
Г.Н.Ч.	4	0,9	0,7	0,4	0,14	15	8
Д.О.Ш.	1	0,2	0,8	0,6	0,16	16	9
Е.П.Щ.	2	0,9	0,7	0,3	0,14	10	10
Е.Р.Ы.	3	0,6	0,6	0,6	0,12	18	9
Ж.С.Э.	4	0,5	0,5	0,8	0,10	19	8
З.Т.Ю.	1	0,8	0,4	0,7	0,08	10	7
И.У.Я.	2	0,6	0,3	0,6	0,06	11	6

Порядок выбора данных:

1. № схемы – начальная буква фамилии.
2. F₁, F₂ – начальная буква имени.
3. a, b, c, d – начальная буква отчества.

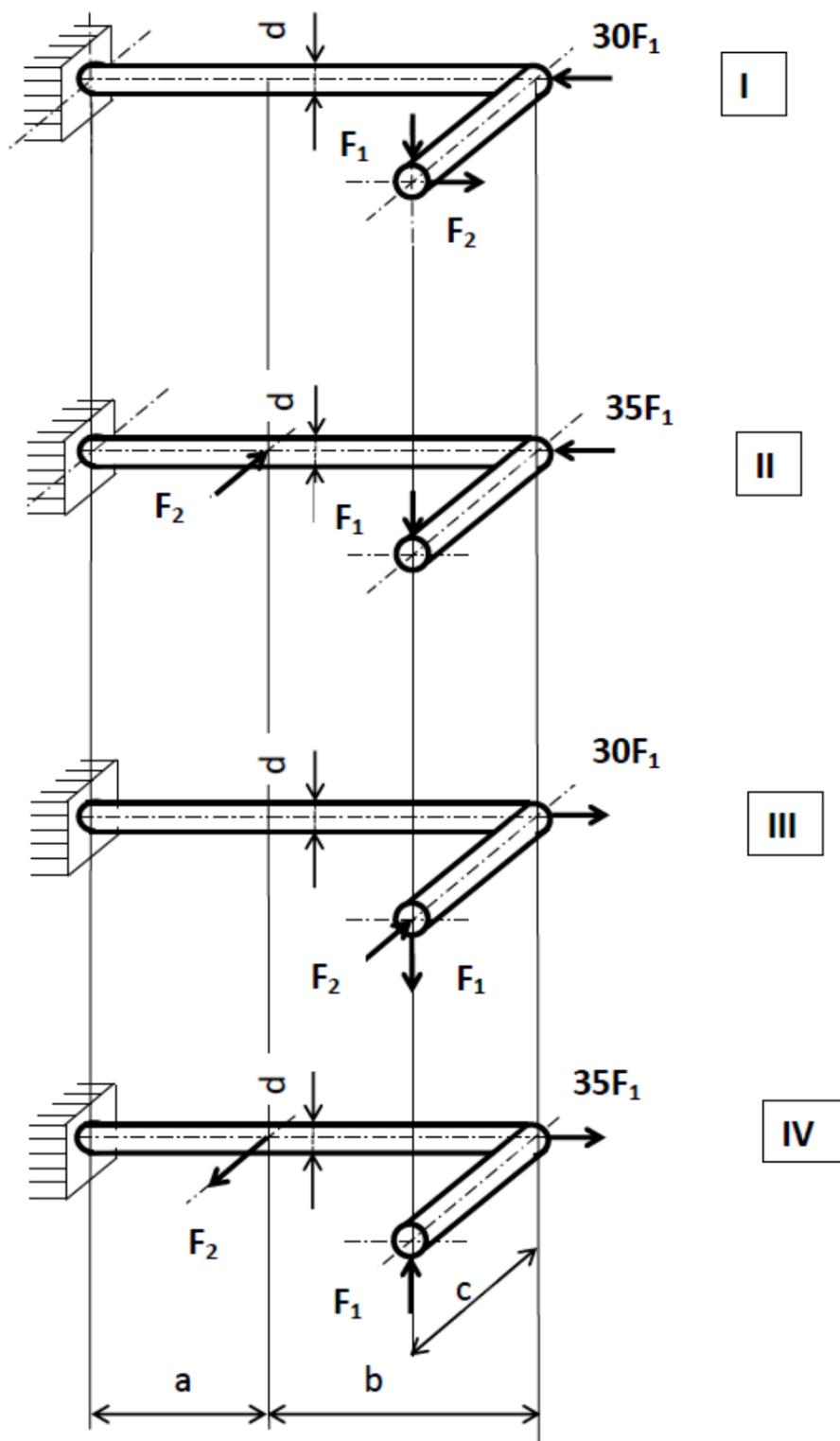


Рис. 90. Схемы для задачи 10

ЗАДАЧА № 11. Расчеты на устойчивость

Для центрально сжатой стальной стойки, закрепленной в соответствии с рисунком 91, таблицей 12, принимая $[\sigma] = 160$ МПа, требуется:

1. Определить грузоподъемность $[F]$ стойки из условия устойчивости, имеющей двутавровое поперечное сечение.
2. Найти критическую силу $F_{кр}$ и коэффициент запаса устойчивости.
3. Загружая стойку нагрузкой $[F]$, определенной в пункте п. 1, подобрать поперечное сечение в виде кольца с соотношением внутреннего и наружного диаметра α .

Таблица 12

Алфавит	№ схемы	Номер двутавра	Отношение диаметров, α	Длина стойки, м
А.К.Ф.	1	24	0,70	2,4
Б.Л.Х.	2	27	0,72	2,6
В.М.Ц.	3	30	0,74	2,8
Г.Н.Ч.	4	33	0,76	3,0
Д.О.Ш.	5	36	0,78	3,2
Е.П.Щ.	6	40	0,80	3,4
Е.Р.Ы.	7	45	0,82	3,6
Ж.С.Э.	8	50	0,84	3,8
З.Т.Ю.	9	55	0,86	4,0
И.У.Я.	10	60	0,88	4,2

Порядок выбора данных:

1. № схемы – начальная буква фамилии.
2. Номер двутавра и длина стойки – начальная буква имени.
3. α – начальная буква отчества.

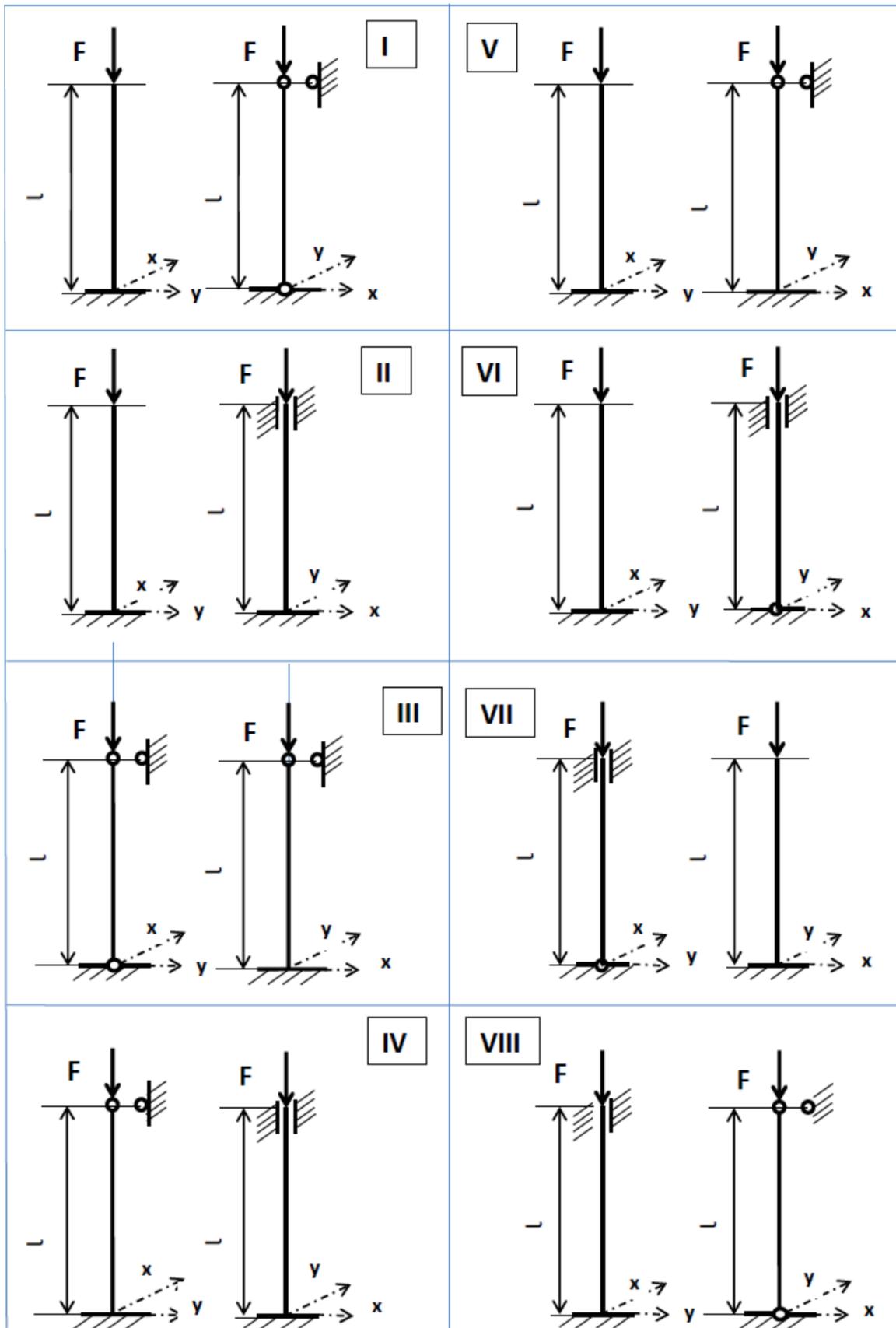


Рис. 91. Схемы для задачи 11

ЗАДАЧА № 12. Расчеты на ударную нагрузку

Груз массой m падает с высоты h на двутавровую стальную балку (рис. 92, табл. 13). Проверить прочность балки при $[\sigma] = 160$ МПа.

Таблица 13

Алфавит	№ схемы	Длина участка балки, м			Номер двутавра	m , кг	h , см
		a	b	c			
А.К.Ф.	1	0,5	0,4	0,5	24	100	1
Б.Л.Х.	2	0,8	0,5	0,6	27	150	2
В.М.Ц.	3	0,3	0,6	0,7	30	200	3
Г.Н.Ч.	4	0,9	0,7	0,4	33	250	4
Д.О.Ш.	1	0,2	0,8	0,6	36	300	5
Е.П.Щ.	2	0,9	0,7	0,3	40	350	6
Е.Р.Ы.	3	0,6	0,6	0,6	45	400	5
Ж.С.Э.	4	0,5	0,5	0,8	50	450	4
З.Т.Ю.	1	0,8	0,4	0,7	55	500	3
И.У.Я.	2	0,6	0,3	0,6	60	550	2

Порядок выбора данных:

1. № схемы, h – начальная буква фамилии.
2. a, b, c – начальная буква имени.
3. Номер двутавра, m – начальная буква отчества.

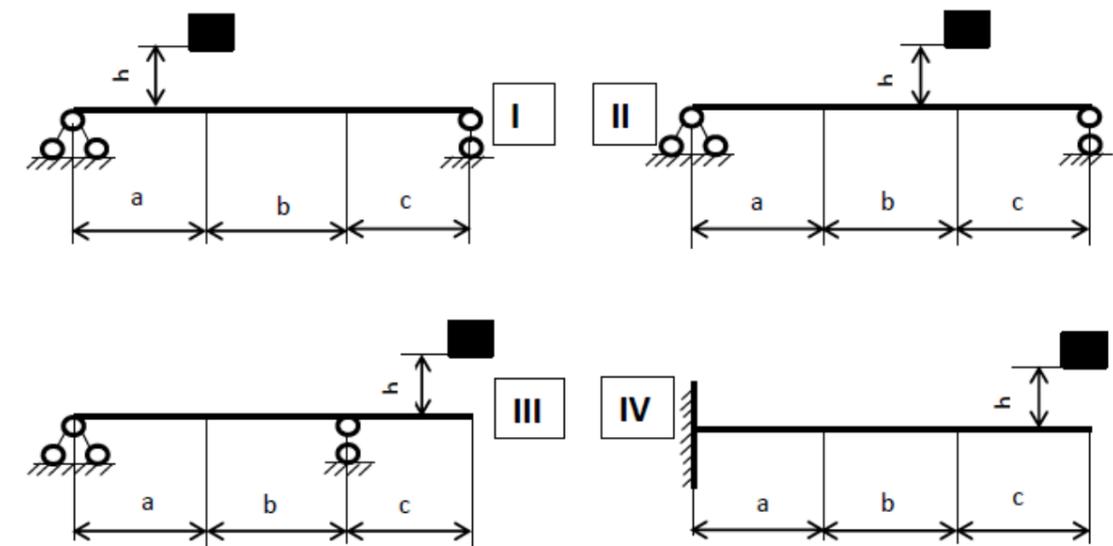


Рис. 92. Схемы для задачи 12

ЗАДАЧА № 13. Расчеты на вибрационную нагрузку

Электромотор массой M установлен на стальной двутавровой балке. Частота вращения ротора мотора – n , масса вращающихся неуравновешенных частей – m , эксцентриситет их – e (рис. 93, табл. 14).

Пренебрегая массой балки, требуется:

1. Проверить балку на резонанс.
2. Проверить прочность балки при $[\sigma] = 160$ МПа.

Таблица 14

Алфавит	№ схемы	Номер двутавра	Длина участка балки, м			M, кг	m, кг	n, об/мин	e, м
			a	b	c				
А.К.Ф.	1	24	0,5	0,4	0,5	400	60	500	0,1
Б.Л.Х.	2	27	0,8	0,5	0,6	450	70	550	0,12
В.М.Ц.	3	30	0,3	0,6	0,7	500	80	600	0,14
Г.Н.Ч.	4	33	0,9	0,7	0,4	550	90	650	0,16
Д.О.Ш.	1	36	0,2	0,8	0,6	600	100	700	0,18
Е.П.Щ.	2	40	0,9	0,7	0,3	650	110	750	0,20
Е.Р.Ы.	3	45	0,6	0,6	0,6	700	120	800	0,22
Ж.С.Э.	4	50	0,5	0,5	0,8	750	125	850	0,24
З.Т.Ю.	1	55	0,8	0,4	0,7	800	130	900	0,26
И.У.Я.	2	60	0,6	0,3	0,6	850	135	950	0,28

Порядок выбора данных:

1. № схемы, M, e – начальная буква фамилии.
2. a, b, c, n – начальная буква имени.
3. Номер двутавра, m – начальная буква отчества.

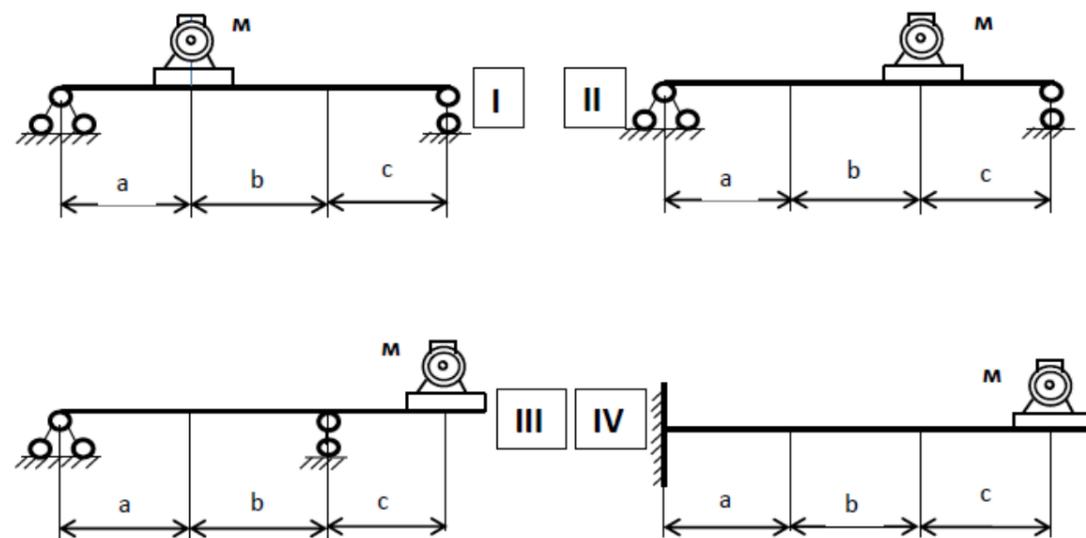


Рис. 93. Схемы для задачи 13

VII. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Студенты направлений подготовки 20.03.01 «Техносферная безопасность» и 44.03.01 «Педагогическое образование», профиль «Технология» выполняют задачи № 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11 контрольной работы.

Студенты направления подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» выполняют задачи № 1, 3, 4, 5, 6, 7 контрольной работы.

Студенты направлений подготовки 13.03.02 «Нефтегазовое дело» и «Строительство» выполняют задачи № 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 контрольной работы.

Студенты направления подготовки 13.03.02 «Автомобили и автомобильное хозяйство» выполняют задачи №1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 13.

Расчетно-графическое задание № 1

К решению задачи можно приступить после изучения темы «Основные понятия и определения, растяжения и сжатия».

Первая задача требует умения строить эпюры продольных сил, нормальных напряжений, перемещений стержня и проводить расчеты на прочность и жесткость стержня при деформации растяжения (сжатия).

При работе бруса на растяжение (сжатие) в его поперечных сечениях возникает только продольная сила N , остальные внутренние силовые факторы равны нулю. Она определяется с помощью метода сечений (правило РОЗУ). Продольная сила N в произвольном поперечном сечении бруса численно равна алгебраической сумме проекций внешних сил на его продольную ось, действующих на оставшуюся часть стержня.

Правило знаков для продольной силы: продольная сила N положительна, если относительно рассматриваемого сечения внешняя сила растягивает стержень, и продольная сила отрицательна, если внешняя сила сжимает стержень.

При растяжении (сжатии) стержня в его поперечных сечениях возникают нормальные напряжения $\sigma = \frac{N}{A}$ (A – площадь поперечного сечения стержня).

Изменение длины стержня (удлинение или укорочение) равно алгебраической сумме удлинений (укорочений) его отдельных участков и вычисляется по формуле:

$$\Delta l = \sum \Delta l_i = \sum \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot A_i'}$$

где N_i, l_i, A_i' – соответственно продольная сила, длина и площадь поперечного сечения i участка стержня; E – модуль продольной упругости.

Напряжения в наклонных сечениях стержня определяются по формулам:

$$\sigma_\alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha; \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha, \text{ где } \alpha \text{ – угол между поперечным и наклонным сечением.}$$

$$\text{Условие прочности при растяжении (сжатии)} \quad \sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq [\sigma].$$

Задача № 1. Расчет ступенчатого стержня.

Для ступенчатого стержня ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_T = 240$ МПа) необходимо определить:

1. Продольные силы по его длине и построить эпюру продольных сил.
2. Определить нормальные напряжения в поперечных сечениях и построить эпюру нормальных напряжений.
3. Определить коэффициент запаса прочности для опасного сечения.
4. Определить аналитически нормальное и касательное напряжения в опасном сечении на площадке, расположенной под углом α к поперечному сечению стержня.
5. Определить полное перемещение свободного конца стержня и построить эпюру перемещений.

Решение:

1. Выбираем по таблице исходные данные согласно варианту:

№ схемы	Нагрузка, кН			Площадь, см ²		Длина участка, м				α, град
	F ₁	F ₂	F ₃	A ₁	A ₂	a	b	c	d	
9	10	15	35	2	2,5	0,5	0,4	0,3	0,4	50

2. На отдельной странице чертим расчетную схему с указанием исходных данных (рис. 94, а).
3. Из уравнения равновесия стержня определяем реакцию опоры стержня R_A. Для этого проводим ось z в любую сторону и проектируем все внешние силы, действующие на стержень на ось z. $\Sigma F_z = 0; F_1 + F_2 - F_3 - R_A = 0$; откуда $R_A = F_1 + F_2 - F_3 = 10 + 15 - 35 = -10$ кН. Минус показывает, что реакция опоры направлена в противоположную сторону. Зачеркиваем первоначальное направление реакции опоры и направляем ее в противоположную сторону. Указываем числовое значение реакции опоры.
4. Делим стержень на участки. Границами участков являются точки приложения сосредоточенных сил, начало и конец приложения распределенных усилий и сечения, где изменяется площадь поперечного сечения стержня. Проводим через границы участков линии, перпендикулярные оси стержня.
5. Присваиваем номер каждому участку. Нумерацию участков следует вести со свободного конца стержня, чтобы не искать реакцию в заделке. Если реакция в заделке известна или определена с помощью уравнений равновесия, то нумерацию можно вести с любого конца стержня. Для нашей задачи нумерацию участков начнем со свободного конца стержня.
6. Методом сечений (правило РОЗУ) определяем продольную силу на каждом участке. Расчет продольных сил и нормальных напряжений сводим в таблицу 15.

Таблица 15

Расчет продольных сил и нормальных напряжений

№ участка	z ≤ z ≤	Уравнение усилий и напряжений на участке
I	0 ≤ z ₁ ≤ 0,5 м	$N_1 = F_1 = 10 \text{ кН}$
		$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{10 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}} = 50 \text{ МПа}$
II	0 ≤ z ₂ ≤ 0,4 м	$N_2 = F_1 + F_2 = 10 + 15 = 25 \text{ кН}$
		$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_1} = \frac{25 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}} = 125 \text{ МПа}$
III	0 ≤ z ₃ ≤ 0,3 м	$N_3 = F_1 + F_2 = 10 + 15 = 25 \text{ кН}$
		$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_2} = \frac{25 \cdot 10^3}{2,5 \cdot 10^{-4}} = 100 \text{ МПа}$
IV	0 ≤ z ₄ ≤ 0,4 м	$N_4 = F_1 + F_2 - F_3 = 10 + 15 - 35 = -10 \text{ кН}$
		$\sigma_2 = \frac{N_4}{A_1} = -\frac{10 \cdot 10^3}{2,5 \cdot 10^{-4}} = -40 \text{ МПа}$

По полученным значениям строим эпюру продольных сил (см. рис. 94, б) и нормальных напряжений (см. рис. 94, в).

7. Определим коэффициент запаса прочности. Опасным участком является участок II, где действуют максимальные по величине напряжения. Нормальные напряжения на участке II будут равны $\sigma_2 = \sigma_{\max} = 125$ МПа. Коэффициент запаса прочности определится:

$$n = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}} = \frac{240}{125} = 1,92.$$

Для определения нормального и касательного напряжения в наклонном сечении рассечем стержень на участке II плоскостью под углом α = 50° к поперечному сечению (рис. 95).

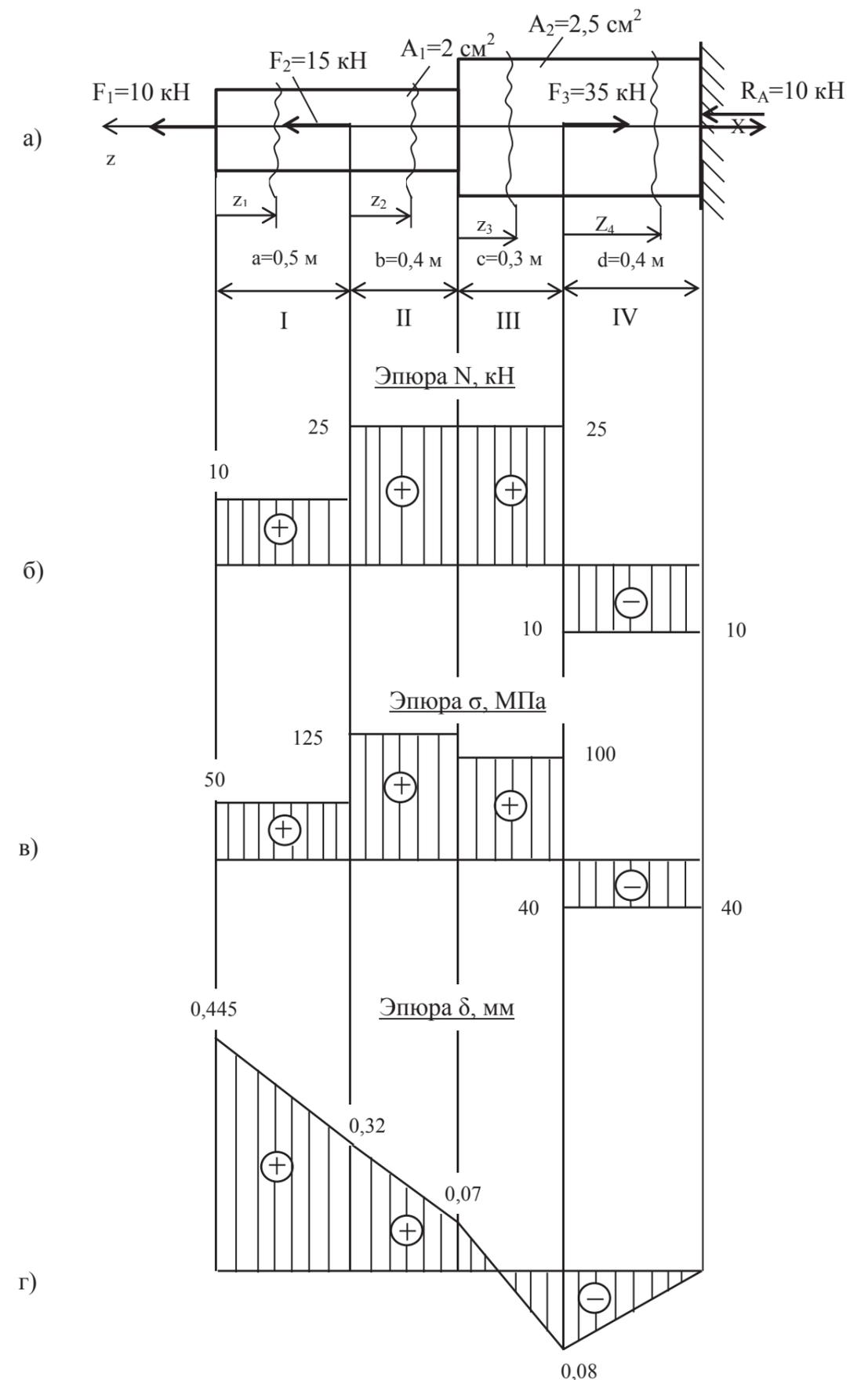


Рис. 94. Расчетная схема и эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений

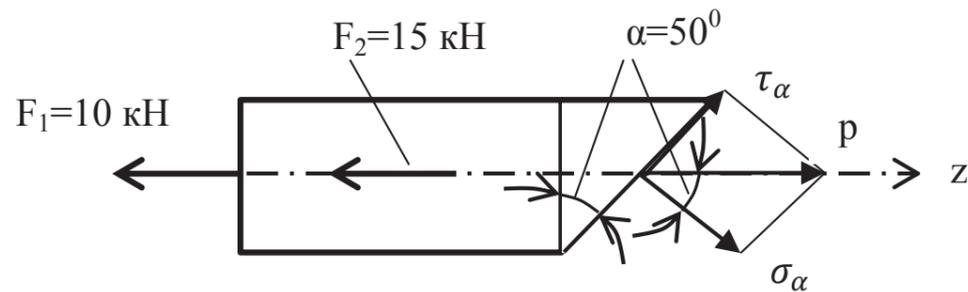


Рис. 95. Схема для определения напряжений в наклонном сечении

Напряжения в наклонной площадке будут равны:

$$\sigma_\alpha = \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha = 125 \cdot \cos^2 50^\circ = 125 \cdot 0,6428^2 = 51,64 \text{ МПа};$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha = \frac{125}{2} \sin 2 \cdot 50^\circ = 62,5 \cdot 0,9848 = 61,55 \text{ МПа}.$$

Полное перемещение свободного конца стержня определится как алгебраическая сумма удлинений (укорочений) участков стержня. Определим абсолютные удлинения, укорочения участков стержня:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} = \frac{\sigma_1 \cdot l_1}{E} = \frac{50 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^5} = 1,25 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_1} = \frac{\sigma_2 \cdot l_2}{E} = \frac{125 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^5} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot A_2} = \frac{\sigma_3 \cdot l_3}{E} = \frac{100 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^5} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\Delta l_4 = \frac{N_4 \cdot l_4}{E \cdot A_2} = \frac{\sigma_4 \cdot l_4}{E} = -\frac{40 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^5} = -0,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Для построения эпюры перемещений выберем начало координат. Им является сечение заделки стержня. Тогда перемещение левого конца участка IV будет равно его укорочению:

$$\delta_4 = \Delta l_4 = -0,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Перемещение левого конца участка III:

$$\delta_3 = \delta_4 + \Delta l_3 = (-0,8 + 1,5) \cdot 10^{-4} = 0,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Перемещение левого конца участка II:

$$\delta_2 = \delta_3 + \Delta l_2 = (-0,7 + 2,5) \cdot 10^{-4} = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Полное перемещение свободного конца стержня:

$$\delta_1 = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 = \delta_2 + \Delta l_1 = (3,2 + 1,25) \cdot 10^{-4} = 4,45 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Свободный конец стержня удлинится на 0,445 мм. Строим эпюру перемещений сечений стержня (рис. 94, г).

Расчетно-графическое задание № 2

Прежде чем приступить к решению задачи, следует изучить по учебнику материал, относящийся к статически неопределимым системам, работающим на растяжение (сжатие). Стержни, реакции опор у которых не могут быть определены из уравнений равновесия, называются статически неопределимыми. Для решения статически неопределимых стержней, кроме уравнений равновесия, необходимо составить дополнительные уравнения совместности деформаций. Этим уравнениям необходимо составить столько, сколько раз стержень статически неопределим. Величина статической неопределимости n определяется по разности количества неизвестных реак-

ций опор R и количества независимых уравнений равновесия по формуле $n = R - y$. В этом будет состоять статическая сторона задачи.

Геометрическая сторона задачи состоит в выборе основной системы. Для этого отбрасывается такое количество опор, чтобы стержень стал статически определимым. Отброшенные опоры заменяются реакциями. Полученный таким образом статически определяемый стержень и будет основной системой. Для того, чтобы она была эквивалентна заданному стержню по характеру деформирования, необходимо выполнение условий (перемещение под отброшенной опорой равно нулю, общее перемещение равно нулю).

Физическая сторона задачи состоит в том, чтобы определить общее перемещение от действующей нагрузки и реакций связи и составить уравнение совместности деформаций, при котором перемещение будет равно нулю, из которого и определяются реакции опор.

Задача № 2. Расчет статически неопределимого ступенчатого стержня.

Для статически неопределимого стержня, нагруженного системой внешних сил, определить:

1. Продольные силы и нормальные напряжения в поперечных сечениях ступенчатого стержня.
2. Построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений.
3. Проверить условие прочности для опасного сечения стержня при $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.
4. Построить эпюру перемещений ($E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$).

Решение:

1. Выбираем по таблице исходные данные согласно варианту:

№ схемы	Сила, кН		Площадь, см ²		Длина участка, м			
	F ₁	F ₂	A ₁	A ₂	a	b	c	d
9	15	35	2,0	2,5	0,4	0,6	0,7	0,4

2. На отдельной странице чертим расчетную схему с указанием исходных данных (рис. 96, а).
3. Определяем степень статической неопределимости системы по формуле $n = R - y$, где $R = 2$, так как неизвестны две реакции опоры R_A и R_B ; $y = 1$, потому что из трех уравнений равновесия для плоской системы сил стержня можно составить только одно уравнение равновесия:

$$\sum F_z = 0; -R_A - F_1 + F_2 + R_B = 0.$$

В результате получим $n = R - y = 2 - 1 = 1$, что система один раз статически неопределима.

4. Отбрасывая опору B и заменяя ее реакцией связи R_B , получаем основную систему, которая будет статически определима (см. рис. 96, б). Сечения стержня могут перемещаться. Решили геометрическую сторону задачи.

5. Решение физической стороны задачи будет состоять в том, что деформации основной системы и расчетной схемы будут эквивалентны при условии, что общее удлинение стержня будет равно нулю, так как стержень зажат с двух сторон. Составляем уравнение совместности деформации: $\Delta l_\Sigma = \Delta l_{R_B} + \Delta l_{F_1} + \Delta l_{F_2} = 0$. Применяя принцип независимости действия сил, найдем перемещение сечения B стержня отдельно от внешних сил и неизвестной реакции R_B .

$$\text{Прикладываем к основной системе реакцию опоры } R_B \text{ и находим } \Delta l_{R_B} = \frac{R_B \cdot (a+b)}{E \cdot A_1} + \frac{R_B \cdot (c+d)}{E \cdot A_2}.$$

$$\text{Прикладываем к основной системе внешнюю силу } F_2 \text{ и находим } \Delta l_{F_2} = \frac{F_2 \cdot c}{E \cdot A_2} + \frac{F_2 \cdot (a+b)}{E \cdot A_1}.$$

$$\text{Прикладываем к основной системе внешнюю силу } F_1 \text{ и находим } \Delta l_{F_1} = -\frac{F_1 \cdot a}{E \cdot A_1}. \text{ Уравнение со-}$$

вместности деформации запишется в виде:

$$\Delta l_\Sigma = \Delta l_{R_B} + \Delta l_{F_1} + \Delta l_{F_2} = \frac{R_B \cdot (a+b)}{E \cdot A_1} + \frac{R_B \cdot (c+d)}{E \cdot A_2} + \frac{F_2 \cdot c}{E \cdot A_2} + \frac{F_2 \cdot (a+b)}{E \cdot A_1} - \frac{F_1 \cdot a}{E \cdot A_1} = 0.$$

$$R_B = \frac{F_1 \cdot a \cdot A_2 - F_2 \cdot c \cdot A_1 - F_2 \cdot (a+b) \cdot A_2}{(a+b) \cdot A_2 + (c+d) \cdot A_1} = \frac{15 \cdot 0,5 \cdot 2,5 - 35 \cdot 0,3 \cdot 2 - 35 \cdot 0,9 \cdot 2,5}{0,9 \cdot 2,5 + 0,7 \cdot 2} = -22,19 \text{ кН}.$$

Минус показывает, что направление реакции опоры R_B нужно сменить на противоположное (рис. 96, а). Далее задача решается как статически определимая.

6. Делим стержень на участки и присваиваем номер каждому участку.

7. Методом сечений определяем продольную силу на каждом участке. Результаты вычислений продольной силы и нормального напряжения сводим в таблицу 16.

Таблица 16

Расчет продольных сил и нормальных напряжений

№ участка	z	Уравнение усилий и напряжений на участке
I	$0 \leq z_1 \leq 0,4 \text{ м}$	$N_1 = -R_B = -22,19 \text{ кН}$
		$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_2} = -\frac{22,19 \cdot 10^3}{2,5 \cdot 10^{-4}} = -88,76 \text{ МПа}$
II	$0 \leq z_2 \leq 0,3 \text{ м}$	$N_2 = -R_B + F_2 = -22,19 + 35 = 12,81 \text{ кН}$
		$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{12,81 \cdot 10^3}{2,5 \cdot 10^{-4}} = 51,24 \text{ МПа}$
III	$0 \leq z_3 \leq 0,4 \text{ м}$	$N_3 = -R_B + F_2 = -22,19 + 35 = 12,81 \text{ кН}$
		$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_1} = \frac{12,81 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}} = 64,05 \text{ МПа}$
IV	$0 \leq z_4 \leq 0,5 \text{ м}$	$N_4 = -R_B + F_2 - F_3 = -22,19 + 35 - 35 = -2,19 \text{ кН}$
		$\sigma_2 = \frac{N_4}{A_1} = -\frac{2,19 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}} = -10,95 \text{ МПа}$

По полученным значениям строим эпюру продольных сил (рис. 96, в) и нормальных напряжений (рис. 96, г).

8. Проверим прочность стержня. Для этого по эпюре нормальных напряжений определим опасный участок, это участок, где действуют максимальные по абсолютной величине напряжения. В нашем случае таким участком является участок номер I, и его прочность будет обеспечена:

$$\sigma_1 = 88,76 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

9. Для построения эпюры перемещений возьмем за начало координат левое сечение заделки А. Тогда перемещение правого конца участка IV будет равно его удлинению:

$$\delta_4 = \Delta l_4 = \frac{N_4 \cdot l_4}{E \cdot A_1} = \frac{\sigma_4 \cdot l_4}{E} = -\frac{10,95 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^5} = -0,274 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Перемещение левого конца участка III:

$$\delta_3 = \delta_4 + \Delta l_3 = \delta_4 + \frac{\sigma_3 \cdot l_3}{E} = -0,274 \cdot 10^{-4} + \frac{64,05 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^5} = 1,007 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Перемещение левого конца участка II:

$$\delta_2 = \delta_3 + \Delta l_2 = \delta_3 + \frac{\sigma_2 \cdot l_2}{E} = 1,007 \cdot 10^{-4} + \frac{51,24 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^5} = 1,776 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Полное перемещение свободного конца стержня:

$$\delta_1 = \delta_2 + \Delta l_1 = \delta_2 + \frac{\sigma_1 \cdot l_1}{E} = 1,776 \cdot 10^{-4} - \frac{88,76 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^5} = 0.$$

Строим эпюру перемещений сечений стержня (рис. 96, д). Эпюра перемещений является проверкой правильности решения задачи.

Расчетно-графическое задание № 3

Прежде чем приступить к решению задачи, следует изучить по учебнику материал, относя-

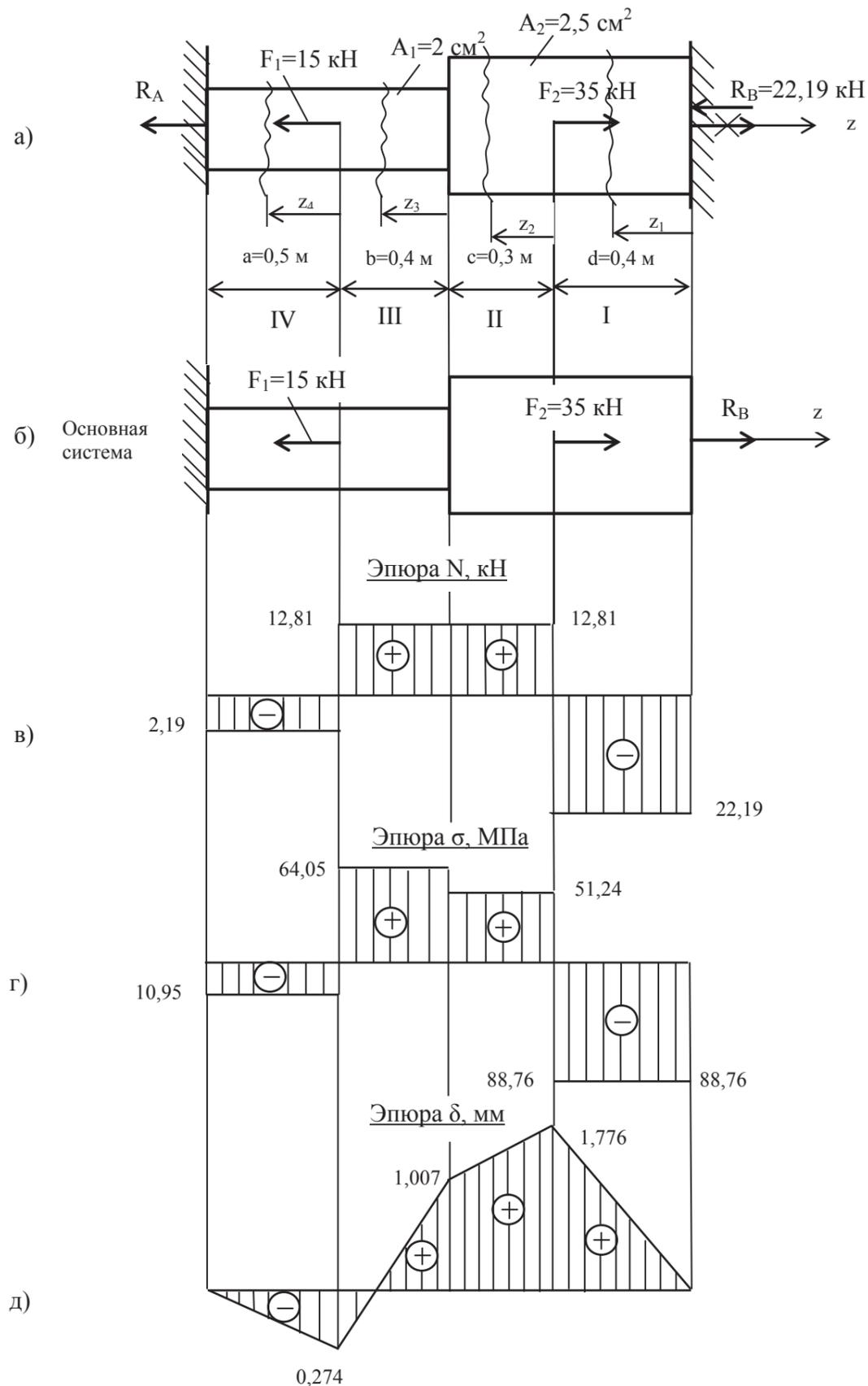


Рис. 96. Расчетная схема, основная система и эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений

щийся к теме напряженного состояния в точке, уяснить виды напряженного состояния, главные площадки и площадки сдвига, главные напряжения и экстремальные касательные напряжения, а также теорию чистого сдвига. Следует уточнить область практического применения сдвига при расчетах заклепочных, болтовых, шпоночных, шлицевых и других видов соединений на срез и смятие. При расчетах соединений на срез и смятие нужно четко представить, по каким площадкам действуют касательные напряжения среза и нормальные напряжения смятия. К этой теме относятся расчеты на прочность сварочных соединений.

Задача № 3 а. Практические расчеты на срез и смятие

Для заданной схемы заклепочного соединения определить необходимое количество заклепок для соединения листов внахлест, если $[\tau_{ср}] = 80$ МПа, а $[\sigma_{см}] = 320$ МПа.

Решение:

1. Выбираем по таблице исходные данные:

№ схемы	Толщина листов, мм			Диаметр заклепок, мм	Сила F, кН
	δ_1	δ_2	δ_3		
2	10	40	10	20	250

2. Чертим расчетную схему с указанием исходных данных (рис. 97).

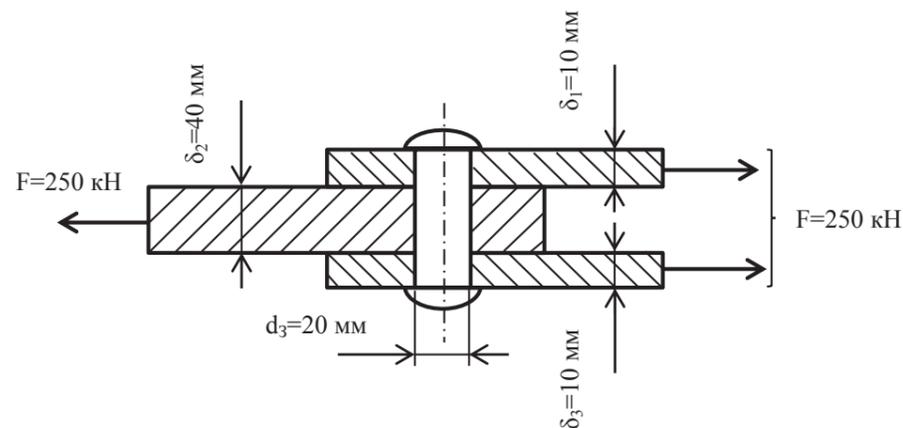


Рис. 97. Расчетная схема заклепочного соединения

Заклепочное соединение одновременно должно удовлетворять условию прочности на срез и смятие, поэтому определяем количество заклепок n исходя из деформации среза:

$$n \geq \frac{4F}{\pi \cdot d_3^2 \cdot m \cdot [\tau_{ср}]} = \frac{4 \cdot 250 \cdot 10^3}{3,14 \cdot (20 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 2 \cdot 80 \cdot 10^6} = 4,98,$$

где $m = 2$ – количество плоскостей среза.

$$\text{Из условия прочности на смятие: } n \geq \frac{F}{d \cdot \delta_{\min} \cdot [\sigma_{см}]} = \frac{250 \cdot 10^3}{(20 \cdot 10^{-3}) \cdot (20 \cdot 10^{-3}) \cdot 320 \cdot 10^6} = 1,95,$$

где $\delta_{\min} = 20$ мм – это минимальная толщина двух пластин $\delta_1 + \delta_3$, приходящихся на силу F. Толщина пластины $\delta_2 = 40$ мм $> \delta_1 + \delta_3 + 20$ мм.

Из двух расчетов выбираем большее значение и округляем до целого числа заклепок. Принимаем $n = 5$ шт.

Задача № 3 б. Расчет сварочного соединения

Для сварочного соединения, выполненного внахлест, определить длину фланговых и лобового

сварочных швов, если для сварных швов $[\tau_{св}] = 100$ МПа, а для материала пластины $[\sigma] = 160$ МПа.

Решение:

1. Выбираем по таблице исходные данные:

№ схемы	Толщина листов, мм			Диаметр заклепок, мм	Сила F, кН
	δ_1	δ_2	δ_3		
7	8	8			300

2. Чертим расчетную схему с указанием исходных данных (рис. 98).

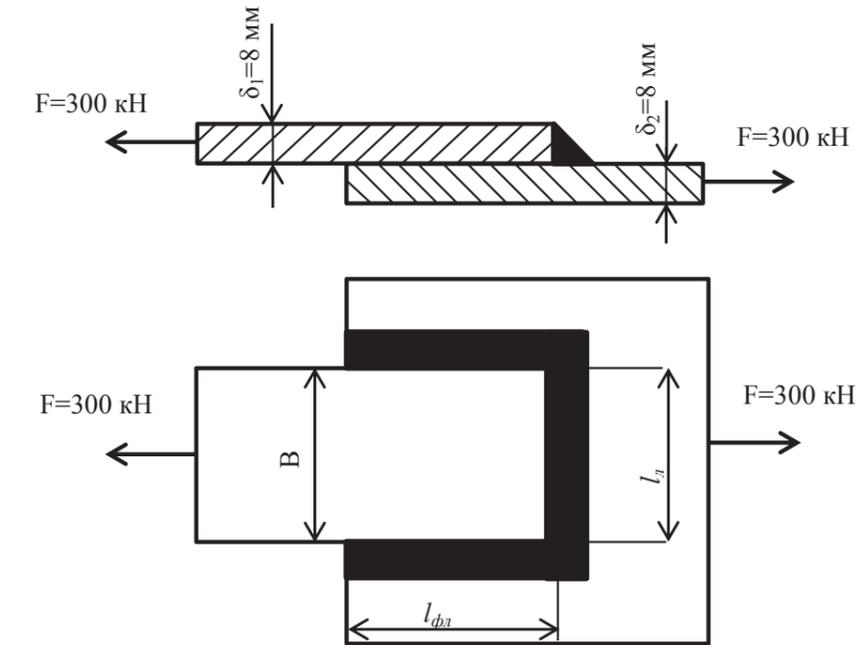


Рис. 98. Расчетная схема сварочного соединения

3. Величина лобового сварочного шва равна ширине верхней пластины $l_n = B$. Пластина испытывает деформацию растяжения. Из условия прочности пластины на растяжение

$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{B \cdot \delta} = \frac{F}{l_n \cdot \delta} \leq [\sigma]$ определим длину лобового сварочного шва:

$$l_n \geq \frac{F}{\delta \cdot [\sigma]} = \frac{300 \cdot 10^3}{(8 \cdot 10^{-3}) \cdot (160 \cdot 10^6)} = 0,234 \text{ м.}$$

4. Из условия прочности сварочного соединения, выполненного внахлестку:

$$\tau_{св} = \frac{F}{A_{св}} = \frac{F}{0,7 \cdot \delta \cdot (2 \cdot l_{фл} + l_n)} \leq [\tau_{св}],$$

определим длину флангового сварочного шва:

$$l_{фл} = \frac{\frac{F}{0,7 \cdot \delta \cdot [\tau_{св}]} - l_n}{2} = \frac{\frac{300 \cdot 10^3}{0,7 \cdot (8 \cdot 10^{-3}) \cdot 100 \cdot 10^6} - 0,234}{2} = 0,151 \text{ м.}$$

Расчетно-графическое задание № 4

К решению задачи можно приступить после изучения тем «Сдвиг» и «Кручение».

При кручении в поперечных сечениях бруса возникает только один внутренний силовой фактор – крутящий момент M_k . Крутящие моменты, возникающие в поперечных сечениях вала, определяются по внешним скручивающим $M_{ск}$ или вращающим $M_{вр}$ моментам с помощью метода сечений. Крутящий момент M_k в любом поперечном сечении вала численно равен алгебраической сумме внешних скручивающих или вращающих моментов, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Вал должен одновременно удовлетворять условиям прочности и жесткости:

$$\begin{cases} \tau_{max} = \frac{M_{kmax}}{W_\rho} \leq [\tau]; \\ \theta_{max} = \frac{M_{kmax}}{G \cdot I_\rho} \leq [\theta]. \end{cases}$$

M_{kmax} – крутящий момент в опасном сечении вала, определяется по эпюре крутящих моментов;

W_ρ – полярный момент сопротивления сечения:

– для вала круглого поперечного сечения $W_\rho = \frac{\pi D^3}{16} = 0,2D^3$, где D – диаметр вала;

– для вала кольцевого поперечного сечения $W_\rho^k = 0,2D_k^3(1 - \alpha^4)$, где D_k – наружный диаметр вала; $\alpha = \frac{d_k}{D_k}$ – отношение внутреннего диаметра кольцевого вала к наружному; I_ρ – полярный момент инерции сечения $I_\rho = \frac{\pi D^4}{32} = 0,1D^4$.

Угол поворота одного поперечного сечения вала относительно другого называется углом закручивания участка вала, величина которого определяется $\varphi = \frac{M_k \cdot \ell}{G \cdot J_p}$. Произведение модуля сдвига G на полярный момент инерции сечения J_p называется жесткостью сечения.

Угол φ положителен, если при взгляде относительно внешней нормали рассматриваемого сечения он направлен против часовой стрелки, и отрицателен, если по часовой стрелке.

Задача № 4. Расчет вала на кручение

Для заданного вала при $[\tau] = 80$ МПа, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа, $[\theta] = 0,05$ рад/м требуется:

1. Построить эпюру крутящих моментов.
2. Определить диаметр вала из условия прочности и жесткости на кручение.
3. Построить эпюру максимальных касательных напряжений.
4. Построить эпюру углов закручивания, производя отсчет углов от опорного защемления.
5. Из условия равнопрочности вала для опасного участка заменить круглое поперечное сечение вала кольцевым при $\alpha = 0,7$ и сравнить вес вала.

Решение:

1. Выбираем по таблице исходные данные:

№ схемы	Направление моментов				Значение моментов, кН·м				Длина участка вала, м			
	M_1	M_2	M_3	M_4	M_1	M_2	M_3	M_4	a	b	c	d
9	+	-	-	+	1	3	4	5	0,4	0,2	0,5	0,6

2. На отдельной странице чертим расчетную схему с указанием исходных данных согласно таблице (рис. 99, а).

Направление скручивающих моментов на расчетной схеме определяем по знакам в таблице исходных данных. Если стоит знак (+), то со стороны оси z момент направлен против направления движения часовой стрелки, если (-), то по часовой стрелке.

3. Из уравнения равновесия вала определяем реактивный момент в сечении заделки вала M_A . Для этого проводим ось z в любую сторону и проектируем все внешние скручивающие моменты, действующие относительно оси z .

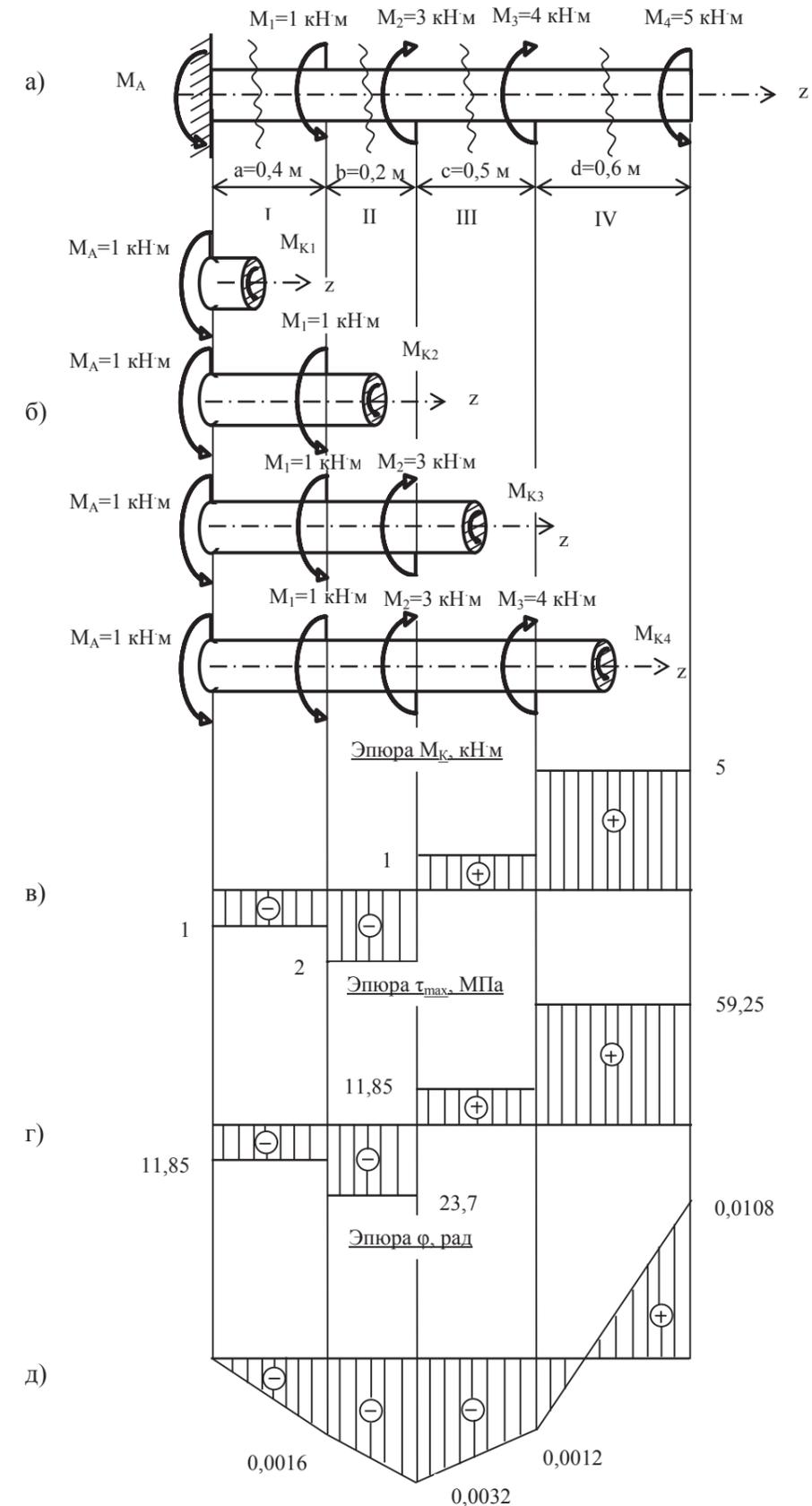


Рис. 99. Расчетная схема и эпюры вала при кручении

$\Sigma M_z = 0; M_A + M_1 - M_2 - M_3 + M_4 = 0$; откуда $M_A = -M_1 + M_2 + M_3 - M_4 = -1 + 3 + 4 - 5 = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Указываем числовое значение реактивного момента $M_A = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$ на расчетной схеме.

4. Делим вал на участки. Границами участков являются сечения приложения скручивающих моментов, сечения, где изменяется площадь поперечного сечения вала. Проводим через границы участков линии, перпендикулярные оси вала.

5. Присваиваем номер каждому участку. Чтобы не искать реакцию в заделке, нумерацию участков следует вести со свободного конца вала. Если реакция в заделке определена с помощью уравнений равновесия, то нумерацию можно вести с любого конца вала. Для нашей задачи нумерацию участков начнем с левого конца вала.

6. Методом сечений (правило РОЗУ) определяем крутящий момент на каждом участке. Уравнение равновесия оставшейся части вала определяем с помощью метода местных координат (рис. 99, б). Расчет крутящих моментов сводим в таблицу 17.

Таблица 17

Расчет крутящих моментов

№ участка	$z \leq$	Уравнение крутящих моментов на участке
I	$0 \leq z \leq 0,4 \text{ м}$	$\Sigma m_z = 0; M_{k1} + M_A = 0; M_{k1} = -M_A = -1 \text{ кН} \cdot \text{м}$
II	$0 \leq z \leq 0,2 \text{ м}$	$\Sigma m_z = 0; M_{k2} + M_A + M_1 = 0;$
		$M_{k2} = -M_A - M_1 = -1 - 1 = -2 \text{ кН} \cdot \text{м}$
III	$0 \leq z \leq 0,5 \text{ м}$	$\Sigma m_z = 0; M_{k3} + M_A + M_1 - M_2 = 0;$
		$M_{k3} = -M_A - M_1 + M_2 = -1 - 1 + 3 = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$
IV	$0 \leq z \leq 0,6 \text{ м}$	$\Sigma m_z = 0; M_{k4} + M_A + M_1 - M_2 - M_3 = 0;$
		$M_{k4} = -M_A - M_1 + M_2 + M_3 = -1 - 1 + 3 + 4 = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}$

По полученным значениям строим эпюру крутящих моментов (рис. 99, в). По эпюре крутящих моментов определяем опасный участок. В нашем случае это участок IV, где действует максимальный крутящий момент $M_{max} = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

7. Определяем диаметр вала из условия прочности: $\tau_{max} = \frac{M_{max}}{W_\rho} \leq [\tau]$;

откуда $W_\rho \geq \frac{M_{max}}{[\tau]} = 0,2D^3$; $D = \sqrt[3]{\frac{M_{max}}{0,2[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 70 \cdot 10^6}} = 0,072 \text{ м} = 72 \text{ мм}$.

Определяем диаметр вала из условия жесткости: $\theta_{max} = \frac{M_{max}}{G \cdot I_\rho} \leq [\theta]$.

Откуда $I_\rho \geq \frac{M_{max}}{G \cdot [\theta]} = 0,1D^4$; $D = \sqrt[4]{\frac{M_{max}}{0,1G \cdot [\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{5 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 0,05}} = 0,059 \text{ м} = 59 \text{ мм}$.

Из двух проектных расчетов выбираем больший диаметр вала и округляем до значения, кратного пяти. Принимаем диаметр вала $D = 75 \text{ мм} = 0,075 \text{ м}$.

8. Определим максимальные касательные напряжения на каждом участке. Результаты расчетов сводим в таблицу 18.

Таблица 18

Расчет максимальных касательных напряжений

№ участка	$z \leq$	Уравнение максимальных касательных напряжений на участке
I	$0 \leq z \leq 0,4 \text{ м}$	$\tau_{1max} = \frac{M_{k1}}{W_\rho} = \frac{M_{k1}}{0,2D^3} = \frac{-1 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 0,075^3} = -11,85 \text{ МПа}$

№ участка	$z \leq$	Уравнение максимальных касательных напряжений на участке
II	$0 \leq z \leq 0,2 \text{ м}$	$\tau_{2max} = \frac{M_{k2}}{W_\rho} = \frac{M_{k2}}{0,2D^3} = \frac{-2 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 0,075^3} = -23,70 \text{ МПа}$
III	$0 \leq z \leq 0,5 \text{ м}$	$\tau_{3max} = \frac{M_{k3}}{W_\rho} = \frac{M_{k3}}{0,2D^3} = \frac{1 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 0,075^3} = 11,85 \text{ МПа}$
IV	$0 \leq z \leq 0,6 \text{ м}$	$\tau_{4max} = \frac{M_{k4}}{W_\rho} = \frac{M_{k4}}{0,2D^3} = \frac{5 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 0,075^3} = 59,25 \text{ МПа}$

По полученным значениям строим эпюру касательных напряжений на участках вала (рис. 99, г).

9. Определяем величину углов закручивания каждого участка. Результаты расчетов сводим в таблицу 19.

Таблица 19

Расчет углов закручивания

№ участка	$z \leq$	Уравнение углов закручивания на участке
I	$0 \leq z \leq 0,4 \text{ м}$	$\varphi_1 = \frac{M_{k1} \cdot l_1}{G \cdot I_\rho} = \frac{M_{k1} \cdot l_1}{G \cdot 0,1 \cdot D^4} = \frac{-1 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,1 \cdot 0,075^4} = -0,0016 \text{ рад}$
II	$0 \leq z \leq 0,2 \text{ м}$	$\varphi_2 = \frac{M_{k2} \cdot l_2}{G \cdot I_\rho} = \frac{M_{k2} \cdot l_2}{G \cdot 0,1 \cdot D^4} = \frac{-2 \cdot 10^3 \cdot 0,2}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,1 \cdot 0,075^4} = -0,0016 \text{ рад}$
III	$0 \leq z \leq 0,5 \text{ м}$	$\varphi_3 = \frac{M_{k3} \cdot l_3}{G \cdot I_\rho} = \frac{M_{k3} \cdot l_3}{G \cdot 0,1 \cdot D^4} = \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,1 \cdot 0,075^4} = 0,002 \text{ рад}$
IV	$0 \leq z \leq 0,6 \text{ м}$	$\varphi_4 = \frac{M_{k4} \cdot l_4}{G \cdot I_\rho} = \frac{M_{k4} \cdot l_4}{G \cdot 0,1 \cdot D^4} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,1 \cdot 0,075^4} = 0,012 \text{ рад}$

Построение углов закручивания поперечных сечений вала начинаем от опорного защемления и учитываем, что угол закручивания последующего участка равен алгебраической сумме углов закручивания предыдущих участков (рис. 99, д).

10. Для опасного участка IV заменим вал круглого поперечного сечения кольцевым из условия равнопрочности валов. Условие равнопрочности означает, что касательные напряжения, действующие на поверхности вала круглого $\tau_{max} = \frac{M_{kmax}}{W_\rho}$ и кольцевого поперечного сечения

$\tau_{max}^k = \frac{M_{kmax}}{W_\rho^k}$, равны друг другу. Тогда имеем: $W_\rho = W_\rho^k$ или $0,2D^3 = 0,2D_k^3(1 - \alpha^4)$, откуда

наружный диаметр кольцевого вала равен: $D_k = \sqrt[3]{\frac{D^3}{1 - \alpha^4}} = \sqrt[3]{\frac{0,075^3}{1 - 0,7^4}} = 0,082 \text{ м}$. Внутренний диаметр $d_k = \alpha \cdot D_k = 0,7 \cdot 0,082 = 0,057 \text{ м}$.

Для сравнения веса разделим вес вала круглого поперечного сечения G на вес вала кольцевого поперечного сечения G_k . С учетом того, что длина участка вала и плотность материала вала одинакова, отношение равно:

$$\frac{G}{G_k} = \frac{\rho \cdot A \cdot l}{\rho \cdot A_k \cdot l} = \frac{A}{A_k} = \frac{\pi \cdot D^2/4}{\pi \cdot \frac{D_k^2}{4} - \pi \cdot \frac{d_k^2}{4}} = \frac{D^2}{D_k^2 - d_k^2} = \frac{0,075^2}{0,082^2 - 0,057^2} = 1,62.$$

Получили, что вал кольцевого сечения легче вала круглого поперечного сечения. Экономия металла в случае кольцевого вала составит 1,62 раза.

Расчетно-графическое задание № 5

К решению задачи следует приступить после изучения раздела «Геометрические характеристики плоских сечений».

Размеры и форма поперечных сечений определяют значения таких геометрических характеристик, как площадь поперечного сечения A , статический момент сечения S_x, S_y , осевые I_x, I_y , полярный I_p , центробежный I_{xy} моменты инерции сечения, осевые моменты W_x, W_y , полярный момент W_p сопротивления сечения, радиусы инерции i_x, i_y инерции сечения.

Необходимо уяснить такие понятия, как «центр тяжести поперечного сечения», «главные оси инерции» и «главные центральные оси инерции».

Задача 5. Геометрические характеристики плоских сечений.

Для составного поперечного сечения, изготовленного из стандартных прокатных профилей, требуется:

1. Определить положение центра тяжести относительно произвольных осей.
2. Построить центральные оси, параллельные выбранной произвольной системе осей, относительно которых определен центр тяжести сечения.
3. Определить величины осевых и центробежного момента инерции относительно центральных осей.
4. Определить положение главных центральных осей инерции.
5. Найти экстремальные значения осевых моментов инерции относительно главных центральных осей инерции.
6. Определить главные радиусы инерции и построить эллипс инерции.
7. Начертить сечение в масштабе и указать на нем все оси и все размеры.
8. При расчете все необходимые данные следует брать из таблиц сортамента.

Решение:

1. Выбираем по таблице методических указаний исходные данные:

№ схемы	Уголок	Швеллер
1	70 x 70 x 8	№ 10

2. Выписываем из сортамента размеры и геометрические характеристики стального горячекатанного швеллера с прямыми полками № 10 ГОСТ 8240-89 и сводим в таблицу 20.

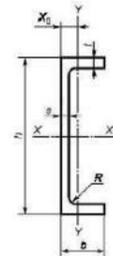


Таблица 20

Геометрические характеристики стального горячекатанного швеллера

№ швеллера	h	b	s	t	R	r	A, см ²	Справочные значения для осей						Z ₀ , см	
								X-X				Y-Y			
								I _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см	S _x , см ³	I _y , см ⁴	W _y , см ³		i _y , см
10П	100	46	4,5	7,6	7,0	4,0	10,90	174,0	34,9	3,99	20,50	22,60	7,37	1,44	1,53

3. Выписываем из сортамента размеры и геометрические характеристики горячекатанного стального равнополочного уголка № 7 ГОСТ 8509-93 и сводим в таблицу 21.

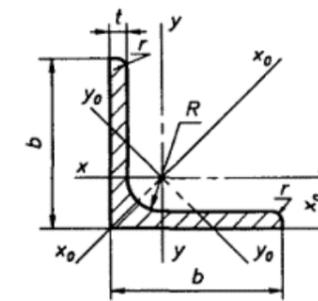


Таблица 21

Геометрические характеристики горячекатанного стального равнополочного уголка

Номер уголка	b	t	R	r	A, см ²	Справочные значения величин для осей									
						x-x		x ₀ -x ₀		y ₀ -y ₀		Y _{xy} , см ⁴	X _{0'} , см		
						I _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см	I _{x0} max, см ⁴	i _{x0} max, см	I _{y0} min, см ⁴			W _{y0'} , см ³	i _{y0} min, см
7	70	8	8,0	2,7	10,67	48,16	9,68	2,12	76,35	2,68	19,97	6,99	1,37	28,20	2,02

4. На отдельной странице чертим составное сечение в масштабе 1:1 (рис. 100) с указанием исходных данных. Учитывая, что швеллер занимает горизонтальное положение в составном сечении, справочные значения для осей x-x и y-y меняем местами.

Отмечаем центры тяжести швеллера через C_1 и равнополочного уголка через C_2 и проводим через них центральные оси X_{C1}, Y_{C1} и X_{C2}, Y_{C2} .

5. Определяем положение центра тяжести главных осей составного сечения.

Для этого выбираем вспомогательные оси X и Y , проведенные через крайнюю левую точку составного сечения (в качестве вспомогательных осей можно выбрать любые оси, параллельные или совпадающие с осями X_{C1}, Y_{C1}), и определяем расстояния от вспомогательных осей до центра тяжести каждого из сечений:

$$X_{C1} = \frac{H_1}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ см};$$

$$X_{C2} = H_1 - z_{02} = 10 - 2,02 = 7,98 \text{ см};$$

$$Y_{C1} = z_{01} = 1,53 \text{ см};$$

$$Y_{C2} = B_1 + B_2 - z_{02} = 4,6 + 7,0 - 2,02 = 9,58 \text{ см}.$$

Координаты центра тяжести составного сечения определим по формулам:

$$X_C = \frac{\sum A_i \cdot X_{Ci}}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot X_{C1} + A_2 \cdot X_{C2}}{A_1 + A_2} + \frac{10,9 \cdot 5 + 10,67 \cdot 7,98}{10,5 + 10,67} = 6,60 \text{ см};$$

$$Y_C = \frac{\sum A_i \cdot Y_{Ci}}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot Y_{C1} + A_2 \cdot Y_{C2}}{A_1 + A_2} + \frac{10,9 \cdot 1,53 + 10,67 \cdot 9,58}{10,5 + 10,67} = 5,62 \text{ см}.$$

Для проверки правильности определения положения центра тяжести составного сечения нужно соединить центры тяжести O_1 и O_2 составляющих сечений. Центр тяжести составного сечения должен лежать на этой линии.

Через полученные координаты проводим через центр тяжести центральные оси X_C и Y_C .

Находим расстояния между центральными осями составного сечения X_C и Y_C и центральными осями швеллера X_{C1}, Y_{C1} и уголка X_{C2}, Y_{C2} :

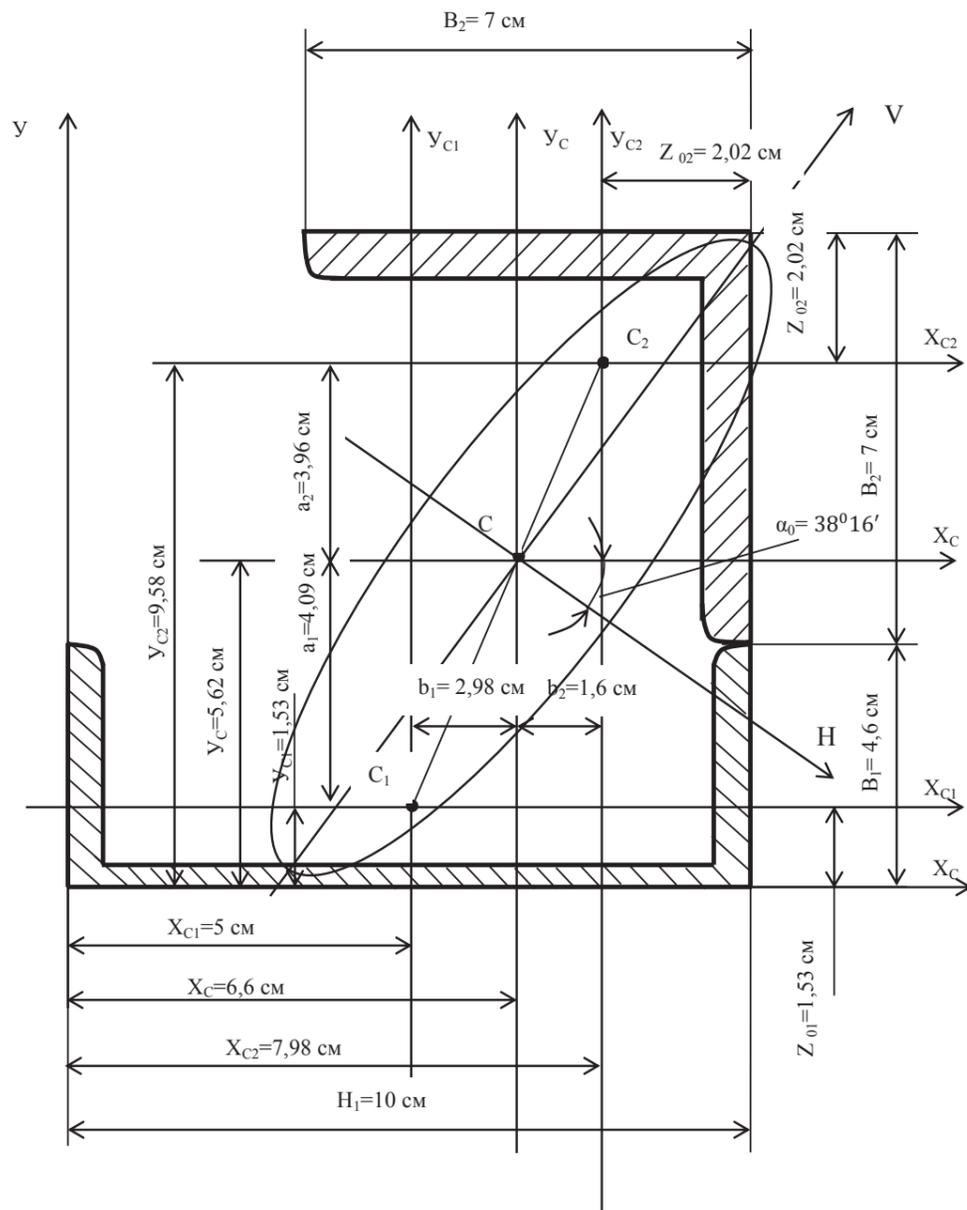


Рис. 100. Схема составного сечения

$$a_1 = Y_{C1} - Y_C = 1,53 - 5,62 = -4,09 \text{ см.}$$

$$a_2 = Y_{C2} - Y_C = 9,58 - 5,62 = 3,96 \text{ см.}$$

$$b_1 = X_{C1} - X_C = 5 - 7,98 = -2,98 \text{ см.}$$

$$b_2 = X_{C2} - X_C = 6,6 - 5 = 1,60 \text{ см.}$$

6. Определяем значение осевых моментов инерции относительно центральных осей X_C и Y_C . Величина осевых моментов инерции сечения определится по формулам:

$$I_{X_C} = \sum (I_{X_{Ci}} + a_i^2 \cdot A_i) = I_{X_{C1}} + I_{X_{C2}} + a_1^2 \cdot A_1 + a_2^2 \cdot A_2 =$$

$$= 22,6 + 48,16 + (-4,09)^2 \cdot 10,9 + 3,96^2 \cdot 10,67 = 420,42 \text{ см}^4$$

$$I_{Y_C} = \sum (I_{Y_{Ci}} + b_i^2 \cdot A_i) = I_{Y_{C1}} + I_{Y_{C2}} + b_1^2 \cdot A_1 + b_2^2 \cdot A_2 =$$

$$= 174 + 48,16 + (-2,98)^2 \cdot 10,9 + 1,60^2 \cdot 10,67 = 346,27 \text{ см}^4.$$

Величина центробежного момента инерции сечения определится по формуле:

$$I_{X_C Y_C} = \sum (I_{X_{Ci} Y_{Ci}} + a_i \cdot b_i \cdot A_i) = I_{X_{C1} Y_{C1}} + I_{X_{C2} Y_{C2}} + a_1 \cdot b_1 \cdot A_1 + a_2 \cdot b_2 \cdot A_2 =$$

$$= 0 - 48,16 + (-4,09) \cdot (-2,98) \cdot 10,9 + 3,96 \cdot 1,6 \cdot 10,67 = 152,30 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент швеллера равен нулю, так как ось Y_{C1} является осью симметрии сечения.

Центробежный момент инерции уголка определится из формулы:

$$I_{X_{C2} Y_{C2}} = \pm \frac{I_{max} + I_{min}}{2} \cdot \sin 2\alpha = -\frac{76,35 + 19,97}{2} \cdot \sin 2 \cdot 45^\circ = -48,16 \text{ см}^4.$$

Знак центробежного момента инерции уголка определяется по расположению уголка в составном сечении в пространстве и берется согласно рисунку 101.

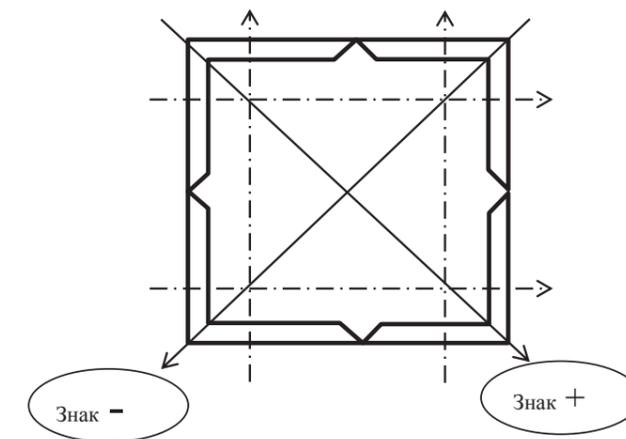


Рис. 101. Выбор знака центробежного момента инерции уголка

7. Определяем положение главных центральных осей инерции сечения:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{X_C Y_C}}{I_{X_C} - I_{Y_C}} = -\frac{2 \cdot 152,3}{420,42 - 346,27} = -4,108.$$

$$2\alpha_0 = \operatorname{arctg}(-4,108) = -76^\circ 32'; \quad \alpha_0 = -38^\circ 16'.$$

Проводим главные центральные оси инерции. Для этого оси X_C и Y_C поворачиваем по часовой стрелке на угол $\alpha_0 = 38^\circ 16'$. Это оси V и H .

8. Определяем главные центральные моменты инерции относительно осей V и H :

$$I_{\min} = \frac{I_{X_C} + I_{Y_C}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{X_C} - I_{Y_C})^2 + 4 \cdot I_{X_C Y_C}^2} =$$

$$= \frac{420,42 + 346,27}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(420,42 - 346,27)^2 + 4 \cdot 152,3^2} =$$

$$= 383,345 \pm 313,495 \text{ см}^4.$$

$$I_{\max} = I_H = 383,345 + 313,495 = 696,84 \text{ см}^4;$$

$$I_{\min} = I_V = 383,345 - 313,495 = 69,85 \text{ см}^4.$$

Проверка $I_{x_c} + I_{y_c} = I_{max} + I_{min}$; $420,42 + 346,27 = 696,84 + 69,85$; $766,69 \text{ см}^4 = 766,69 \text{ см}^4$.

Вычисления главных центральных моментов инерции выполнены верно.

9. Определяем главные радиусы инерции:

$$i_{max} = i_H = \sqrt{\frac{I_{max}}{\sum A}} = \sqrt{\frac{696,84}{21,17}} = 7,74 \text{ см.}$$

$$i_{min} = i_V = \sqrt{\frac{I_{min}}{\sum A}} = \sqrt{\frac{69,85}{21,17}} = 1,76 \text{ см.}$$

Откладывая по оси V значение радиуса инерции $i_{max} = i_H = 7,74 \text{ см}$, а по оси H $i_{min} = i_V = 1,76 \text{ см}$, рисуем эллипс инерции на составном сечении.

Расчетно-графическое задание № 6

К решению задачи следует приступить после изучения темы «Чистый и поперечный прямой изгиб». При чистом изгибе в поперечных сечениях возникает только изгибающий момент, а при поперечном – изгибающий момент и поперечная сила. Особое внимание необходимо обратить на правило знаков для поперечной силы и изгибающего момента при составлении уравнений равновесия и построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов. Необходимо изучить вопрос о напряжениях, возникающих при изгибе в поперечных сечениях балки и распределении напряжений по поперечному сечению; понять, как определяются опасное сечение балки и опасные точки поперечного сечения, которые лимитируют прочность балки. В зависимости от вида изгиба, поперечного сечения, распределения нормальных и касательных напряжений производится оценка прочности балки по нормальным, касательным или эквивалентным напряжениям. Следует изучить вопросы, связанные с определением линейных и угловых перемещений балки (прогиб и угол поворота поперечных сечений балки). Освоить методы определения перемещений балки при помощи универсальных уравнений метода начальных параметров, формулы Мора и способом Верещагина (способ перемножения эпюр).

Задача 6 (а). Расчет балки на изгиб.

Для заданной балки требуется:

1. Из условий равновесия балки определить реакции опор.
2. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Используя эпюру изгибающих моментов, построить изогнутую ось балки.
3. Из расчета на прочность по нормальным напряжениям подобрать двутавровое, круглое и прямоугольное сечения и сравнить массу балки каждого профиля, если материал балки – сталь 3, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

4. Для опасного сечения балки двутаврового сечения проверить прочность по эквивалентным напряжениям с использованием теории наибольших касательных напряжений.

Данные для расчета приведены в таблице 6 и рисунке 86.

Решение:

1. Выбираем по таблице исходные данные согласно варианту:

№ схемы	Внешняя нагрузка			Длина участка балки, м			Отношение h/b
	q, кН/м	F, кН	M, кНм	a	b	c	
1	20	100	10	0,5	0,6	0,7	2

2. На отдельной странице чертим расчетную схему с указанием исходных данных (рис. 102, а). На опорах балки будут возникать реакции опор R_A и R_B .

3. Из уравнения равновесия балки определяем реакции опор балки R_A и R_B . Для этого для плоской системы составляем три уравнения равновесия:

$$\sum m_A(F) = 0; \quad F \cdot a - q \cdot \frac{(b+c)^2}{2} + M + R_B \cdot (b+c) = 0$$

$$R_B = \frac{-F \cdot a + \frac{q(b+c)^2}{2} - M}{b+c} = \frac{-100 \cdot 0,5 + \frac{20(0,6+0,7)^2}{2} - 10}{0,6+0,7} = -33,15 \text{ кН};$$

$$\sum m_B(F) = 0; \quad F \cdot (a+b+c) + q \cdot \frac{(b+c)^2}{2} + M - R_A \cdot (b+c) = 0$$

$$R_A = \frac{F \cdot (a+b+c) + \frac{q(b+c)^2}{2} + M}{b+c} = \frac{100 \cdot (0,5+0,6+0,7) + \frac{20(0,6+0,7)^2}{2} + 10}{0,6+0,7} = 159,15 \text{ кН}.$$

Минус R_B показывает, что реакция опоры направлена в противоположную сторону. Зачеркиваем первоначальное направление реакции опоры и направляем ее в противоположную сторону. Указываем числовое значение реакций опор и делаем проверку:

$$\sum F_y = 0; \quad -F + R_A - q(b+c) - R_B = 0;$$

$$-100 + 159,15 - 20(0,6+0,7) - 33,15 = 0.$$

Реакции опор R_A и R_B определены верно.

4. Делим балку на участки. Границами участков являются точки приложения внешних сил, начало и конец приложения распределенных усилий, плоскости приложения внешних моментов и сечения, где изменяется площадь поперечного сечения балки. Проводим через границы участков линии, перпендикулярные оси балки.

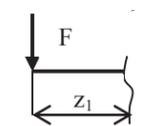
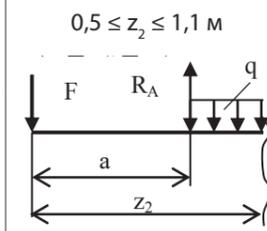
5. Присваиваем номер каждому участку. Нумерацию участков можно вести с любого конца балки, если определены реакции опор. Для нашей задачи нумерацию участков начнем с левого конца балки.

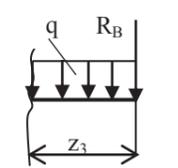
6. Методом сечений (правило РОЗУ) определяем поперечную силу Q и изгибающий момент $M_{и}$ на каждом участке.

Расчет поперечных сил Q и изгибающих моментов $M_{и}$ сводим в таблицу 22.

Таблица 22

Расчет поперечных сил и изгибающих моментов

№ участка	$\leq z \leq$	Уравнение поперечных сил и изгибающих моментов на участке
I	$0 \leq z_1 \leq 0,5 \text{ м}$	$Q = -F = -100 \text{ кН}$
		$M_{и1} = -F \cdot z_1;$ При $z_1 = 0$; $M_{и1} = 0$; При $z_1 = 0,5 \text{ м}$; $M_{и1} = -F \cdot 0,5 = -100 \cdot 0,5 = -50 \text{ кН} \cdot \text{м}$
II	$0,5 \leq z_2 \leq 1,1 \text{ м}$	$Q_2 = -F + R_A - q \cdot (z_2 - a);$ При $z_2 = 0,5 \text{ м}$; $Q_2 = -F + R_A = -100 + 159,15 = 59,15 \text{ кН}$; При $z_2 = 1,1 \text{ м}$; $Q_2 = -F + R_A - q \cdot (1,1 - 0,5) = -100 + 159,15 - 20 \cdot 0,6 = 47,15 \text{ кН}$
		$M_{и2} = -F \cdot z_2 + R_A \cdot (z_2 - a) - q \cdot (z_2 - a)^2 / 2;$ При $z_2 = 0,5 \text{ м}$; $M_{и2} = -F \cdot 0,5 = -100 \cdot 0,5 = -50 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $M_{и2} = -F \cdot 1,1 + R_A \cdot (1,1 - 0,5) - \frac{q(1,1-0,5)^2}{2} = -100 \cdot 1,1 + 159,15 \cdot (1,1 - 0,5) - \frac{20(1,1-0,5)^2}{2} = -18,11 \text{ кН} \cdot \text{м}$

№ участка	z	Уравнение поперечных сил и изгибающих моментов на участке
III	$0 \leq z_3 \leq 0,7 \text{ м}$	$Q_3 = R_B + q \cdot z_3;$ При $z_3 = 0; Q_3 = R_B = 33,15 \text{ кН};$ При $z_3 = 0,7 \text{ м}; Q_3 = R_B + q \cdot 0,7 = 33,15 + 20 \cdot 0,7 = 47,15 \text{ кН}$
		$M_{ИЗ} = -R_B \cdot z_3 - q \cdot \frac{z_3^2}{2};$ При $z_3 = 0; M_{ИЗ} = 0;$ При $z_3 = 0,7 \text{ м}; M_{ИЗ} = -R_B \cdot 0,7 - q \cdot \frac{0,7^2}{2} =$ $= -33,15 \cdot 0,7 - 20 \cdot \frac{0,7^2}{2} = -28,11 \text{ кН} \cdot \text{м}$

По полученным значениям строим эпюру поперечных сил Q (рис. 102, б) и изгибающих моментов $M_{И}$ (рис. 102, в).

Пользуясь эпюрой изгибающих моментов, изображаем возможную изогнутую ось балки, учитывая, что при положительном изгибающем моменте ось балки имеет выпуклость вниз, а при отрицательном моменте – вверх (рис. 102, г).

7. По эпюре изгибающих моментов определяем опасное сечение. В нашем случае это сечение под опорой А, где изгибающий момент достигает максимального значения: $M_{И\max} = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Из расчета на прочность по нормальным напряжениям подбираем двутавровое поперечное сечение: $\sigma_{\max} = \frac{M_{И\max}}{W_x} \leq [\sigma]$, откуда

$$W_x \geq \frac{M_{И\max}}{[\sigma]} = \frac{50 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 31,25 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 = 321,5 \text{ см}^3.$$

Согласно Приложению I по сортаменту «Двутавры стальные горячекатаные (ГОСТ 8239-89)», выбираем двутавр № 27, у которого $W_x^I = 371 \text{ см}^3$, это ближайшее большее значение к расчетному моменту сопротивления сечения. Выписываем геометрические характеристики двутавра № 27 (табл. 23).

Таблица 23

Геометрические характеристики двутавра № 27

Номер двутавра	Размеры сечения, мм				Площадь сечения, см ²	Справочные величины для осей					
	h	b	s	t		x – x				y – y	
						$I_x, \text{ см}^4$	$W_x, \text{ см}^3$	$i_x, \text{ см}$	$S_x, \text{ см}^3$	$I_y, \text{ см}^4$	$W_y, \text{ см}^3$
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5

Подбираем диаметр круглого поперечного сечения балки с учетом, что осевой момент сопротивления балки круглого поперечного сечения равен:

$$W_x = 0,1D^3; D = \sqrt[3]{\frac{W_x}{0,1}} = \sqrt[3]{\frac{321,5}{0,1}} = 14,76 \text{ см}.$$

Подбираем размеры прямоугольного поперечного сечения балки с учетом, что $h/b = 2$, а.

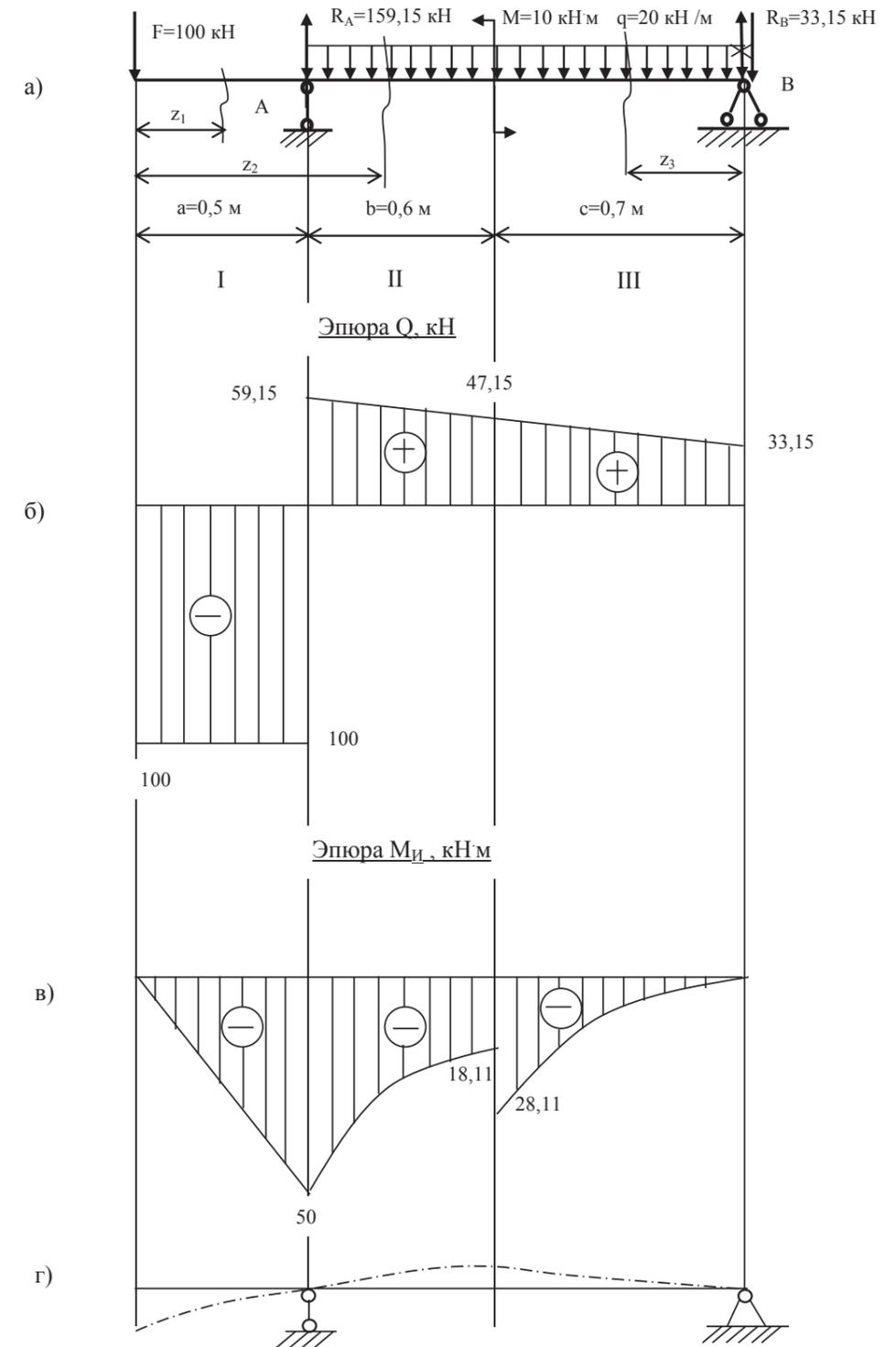


Рис. 102. Расчетная схема и эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{4b^3}{6} = \frac{2b^3}{3}; b = \sqrt[3]{\frac{3W_x}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 321,5}{2}} = 7,84 \text{ см};$$

$$h = 2b = 2 \cdot 7,84 = 15,68 \text{ см}.$$

Из условия равнопрочности сравним вес балок с различным поперечным сечением. Вес балки

можно определить как произведение объема балки на величину плотности материала. Учитывая, что длина и плотность материала балки одинаковы, получим, что для сравнения веса балки достаточно сравнить их площади поперечных сечений:

$$A_{\perp} = 40,2 \text{ см}^2 - \text{для двутаврового сечения};$$

$$A_0 = \frac{\pi \cdot D^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 14,76^2}{4} = 171,02 \text{ см}^2 - \text{для круглого поперечного сечения};$$

$$A_{\square} = b \cdot h = 7,84 \cdot 15,68 = 122,93 \text{ см}^2 - \text{для прямоугольного поперечного сечения. Получили, что}$$

самым выгодным поперечным сечением при изгибе является двутавр, за ним следует прямоугольное поперечное сечение и затем круглое поперечное сечение:

$$\frac{A_0}{A_{\perp}} = \frac{171,02}{40,2} = 4,25; \quad \frac{A_{\square}}{A_{\perp}} = \frac{122,93}{40,2} = 3,06.$$

Экономия материала при использовании двутаврового сечения по сравнению с круглым поперечным сечением балки составит 4,25 раза, а прямоугольного – 3,06 раза.

8. Для опасного сечения балки двутаврового сечения проверим прочность по эквивалентным напряжениям с использованием теории наибольших касательных напряжений. Для этого вычертим в масштабе 2:1 поперечное сечение двутавровой балки (рис. 103, а).

Распределение нормальных напряжений по поперечному сечению подчиняется закону:

$$\sigma = \frac{M_{изг} \cdot y}{I_y}$$

$$\text{При } y = \frac{H}{2}; \sigma_{max} = \frac{M_{изгmax} \cdot \frac{H}{2}}{I_x} = \frac{M_{изгmax}}{W_x} = \frac{50 \cdot 10^3}{371 \cdot 10^{-6}} = 134,7 \text{ МПа.}$$

$$\text{При } y = -\frac{H}{2}; \sigma_{min} = \frac{M_{изгmax} \cdot (-\frac{H}{2})}{I_x} = -\frac{M_{изгmax}}{W_x} = -\frac{50 \cdot 10^3}{371 \cdot 10^{-6}} = -134,7 \text{ МПа.}$$

$$\text{При } y = y_{a-a} = \left(\frac{h}{2} - t\right) = \left(\frac{270}{2} - 9,8\right) \cdot 10^{-3} = 125,2 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\sigma_{a-a} = \frac{M_{изгmax} \cdot y_{a-a}}{I_x} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 125,2 \cdot 10^{-3}}{5010 \cdot 10^{-8}} = 125 \text{ МПа.}$$

Строим эпюру распределения нормальных напряжений по поперечному сечению (рис. 103, б). Распределение касательных напряжений по поперечному сечению подчиняется закону:

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{ост}}{b \cdot I_x}$$

$$\text{При } y = 0; \tau_{max} = \frac{Q \cdot S_x^{ост}}{b \cdot I_x} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 210 \cdot 10^{-6}}{6 \cdot 10^{-3} \cdot 5010 \cdot 10^{-8}} = 139,7 \text{ МПа.}$$

$$\text{При } y = y_{a-a} = \left(\frac{h}{2} - t\right) = \left(\frac{270}{2} - 9,8\right) \cdot 10^{-3} = 125,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad b = s = 6 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$S_x^{ост} = A_{ост} \cdot y_{цт} = B \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right) = 125 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{270}{2} - \frac{9,8}{2}\right) \cdot 10^{-3} = 159,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$\tau_{a-a} = \frac{Q \cdot S_x^{ост}}{b \cdot I_x} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 159,4 \cdot 10^{-6}}{6 \cdot 10^{-3} \cdot 5010 \cdot 10^{-8}} = 53 \text{ МПа.}$$

$$\text{При } y = y_{a-a} = 125,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad b = B = 125 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\tau_{a-a} = \frac{Q \cdot S_x^{ост}}{b \cdot I_x} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 159,4 \cdot 10^{-6}}{125 \cdot 10^{-3} \cdot 5010 \cdot 10^{-8}} = 2,55 \text{ МПа.}$$

По полученным значениям строим эпюру распределения касательных напряжений по поперечному сечению (рис. 103, в).

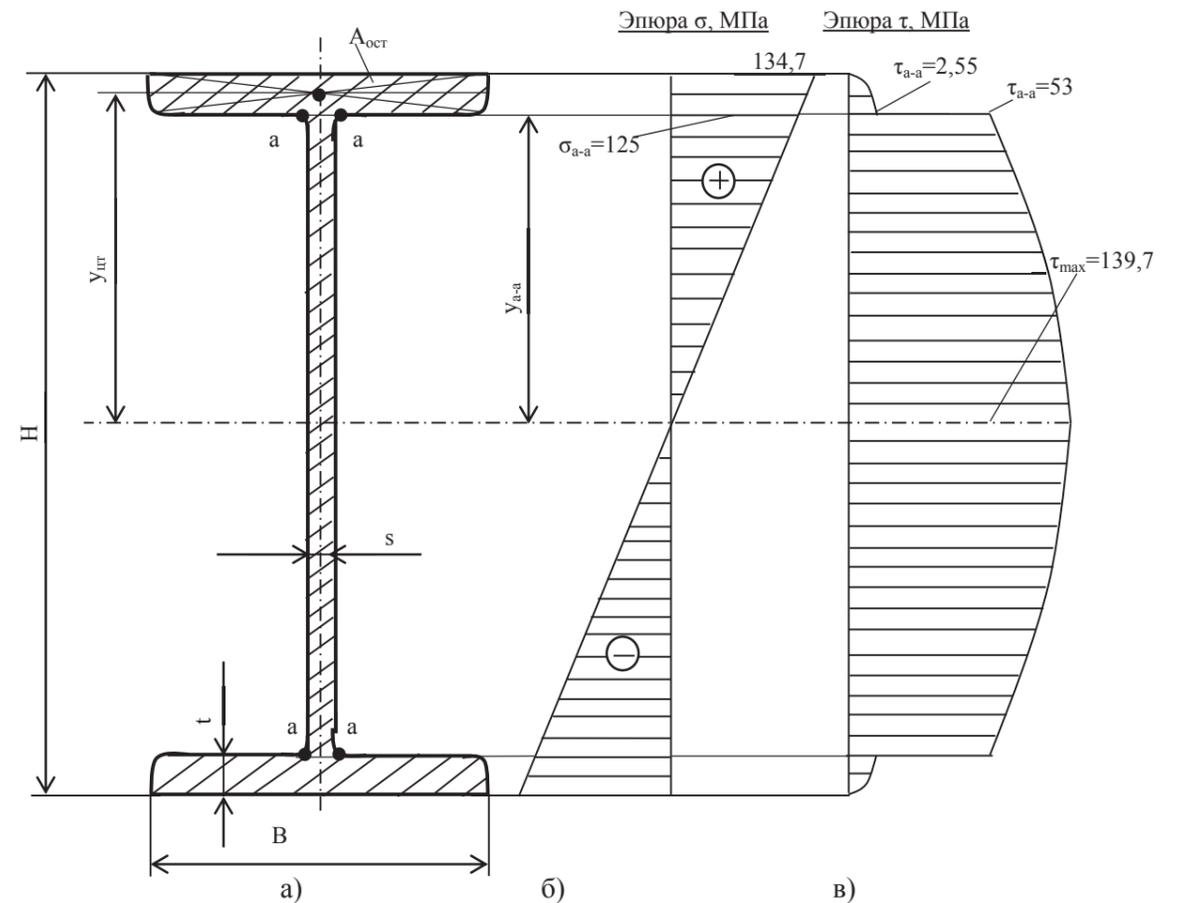


Рис. 103. Поперечное сечение двутавра и эпюры нормальных и касательных напряжений

В сечении а-а там, где стойка переходит в полку, действуют значительные значения нормальных $\sigma_{a-a} = 125 \text{ МПа}$ и касательных $\tau_{a-a} = 53 \text{ МПа}$ напряжений. Для двутаврового сечения это наиболее слабое место, поэтому его следует проверить на прочность с использованием теории наибольших касательных напряжений:

$$\sigma_{экр} = \sqrt{\sigma_{a-a}^2 + 4\tau_{a-a}^2} = \sqrt{125^2 + 4 \cdot 53^2} = 135,8 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

Условие прочности по эквивалентным напряжениям выполняется.

Задача 6 (б). Расчет балки на изгиб.

Для заданной балки требуется:

1. Из условий равновесия балки определить реакции опор.
2. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.
3. Из расчета на прочность по нормальным напряжениям подобрать двутавровое, круглое и прямоугольное сечения и сравнить массу балки каждого профиля, если материал балки – сталь 3, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.
4. Для опасного сечения балки двутаврового сечения проверить прочность по эквивалентным напряжениям с использованием теории наибольших касательных напряжений.
5. Для консольно закрепленной балки двутаврового сечения (рис. 86, б) определить прогиб и угол поворота свободного конца балки.

Данные для расчета приведены в таблице 6 и рисунке 86, б.

Решение:

1. Выбираем по таблице исходные данные согласно варианту:

№ схемы	Внешняя нагрузка			Длина участка балки, м			Отношение h/b
	q, кН/м	F, кН	M, кНм	a	b	c	
1	10	50	20	0,5	0,6	0,7	2

2. На отдельной странице чертим расчетную схему с указанием исходных данных (рис. 104, а). В заделке балки будут возникать реакции опор R_B и M_B .

3. Из уравнения равновесия балки определяем реакции опор балки R_B и M_B . Для этого для плоской системы составляем три уравнения равновесия:

$$\sum m_B(F) = 0; \quad -M + q \cdot \frac{(b+c)^2}{2} + F \cdot c + M_B = 0$$

$$M_B = -M + q \cdot \frac{(b+c)^2}{2} + F \cdot c = -20 + 10 \cdot \frac{(0,6+0,7)^2}{2} + 50 \cdot 0,7 = 23,45 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\sum m_A(F) = 0; \quad -M - q(b+c) \left(\frac{b+c}{2} + a \right) - F \cdot (a+b) + R_B \cdot (a+b+c) - M_A = 0$$

$$R_B = \frac{M + q(b+c) \left(\frac{b+c}{2} + a \right) + F \cdot (a+b) + M_A}{a+b+c} =$$

$$= \frac{20 + 10(0,6+0,7) \left(\frac{0,6+0,7}{2} + 0,5 \right) + 50(0,5+0,6) + 23,45}{0,5+0,6+0,7} = 63 \text{ кН}.$$

Указываем числовое значение реакций опор на расчетной схеме и делаем проверку:

$$\sum F_y = 0; \quad -F - q(b+c) - R_B = 0;$$

$$-50 - 10(0,6+0,7) + 63 = 0.$$

Реакции опор M_B и R_B определены верно.

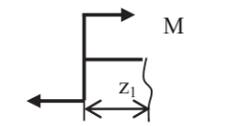
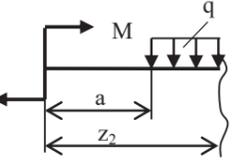
4. Делим балку на участки. Границами участков являются точки приложения внешних сил, начало и конец приложения распределенных усилий, плоскости приложения внешних моментов и сечения, где изменяется площадь поперечного сечения балки. Проводим через границы участков линии, перпендикулярные оси балки.

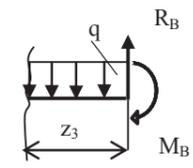
5. Присваиваем номер каждому участку. Нумерацию участков начнем с левого конца балки.

6. Методом сечений (правило РОЗУ) определяем поперечную силу Q и изгибающий момент $M_{И}$ на каждом участке.

Расчет поперечных сил Q и изгибающих моментов $M_{И}$ сводим в таблицу 24.

Таблица 24

Расчет поперечных сил и изгибающих моментов		
№ участка	$\leq z \leq$	Уравнение поперечных сил и изгибающих моментов на участке
I	$0 \leq z_1 \leq 0,5 \text{ м}$ 	$Q_1 = 0$
		$M_{И1} = M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$
II	$0,5 \leq z_2 \leq 1,1 \text{ м}$ 	$Q_2 = -q \cdot (z_2 - a);$ При $z_2 = 0,5 \text{ м}; Q_2 = 0;$ При $z_2 = 1,1 \text{ м}; Q_2 = -q \cdot (1,1 - 0,5) = -10 \cdot 0,6 = -6 \text{ кН}$
		$M_{И2} = M - q(z_2 - a)^2/2;$ При $z_2 = 0,5 \text{ м}; M_{И2} = 20 \text{ кН} \cdot \text{м};$ При $z_2 = 1,1 \text{ м};$ $M_{И2} = M - \frac{q(1,1-0,5)^2}{2} = 20 - \frac{10(1,1-0,5)^2}{2} = 18,2 \text{ кН} \cdot \text{м}$

№ участка	$\leq z \leq$	Уравнение поперечных сил и изгибающих моментов на участке
III	$0 \leq z_3 \leq 0,7 \text{ м}$ 	$Q_3 = -R_B + q \cdot z_3;$ При $z_3 = 0; Q_3 = -R_B = -63 \text{ кН};$ При $z_3 = 0,7 \text{ м}; Q_3 = -R_B + q \cdot 0,7 = -63 + 10 \cdot 0,7 = -56 \text{ кН}$
		$M_{И3} = -M_B + R_B \cdot z_3 - q \cdot \frac{z_3^2}{2};$ При $z_3 = 0; M_{И3} = -M_B = -23,45 \text{ кН} \cdot \text{м};$ При $z_3 = 0,7 \text{ м}; M_{И3} = -M_B + R_B \cdot 0,7 - q \cdot \frac{0,7^2}{2} =$ $= -23,45 + 63 \cdot 0,7 - 10 \cdot \frac{0,7^2}{2} = 18,2 \text{ кН} \cdot \text{м}$

По полученным значениям строим эпюру поперечных сил Q (рис. 104, б) и изгибающих моментов $M_{И}$ (рис. 104, в).

Пользуясь эпюрой изгибающих моментов, изображаем возможную изогнутую ось балки, учитывая, что при положительном изгибающем моменте ось балки имеет выпуклость вниз, а при отрицательном моменте – вверх (рис. 104, г).

7. По эпюре изгибающих моментов определяем опасное сечение. В нашем случае это сечение заделки, где изгибающий момент достигает максимального значения:

$$M_{И\max} = 23,45 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Из расчета на прочность по нормальным напряжениям подбираем двутавровое поперечное сечение:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{И\max}}{W_x} \leq [\sigma], \text{ откуда:}$$

$$W_x \geq \frac{M_{И\max}}{[\sigma]} = \frac{23,45 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 14,66 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 = 146,6 \text{ см}^3.$$

По Приложению I для сортамента «Двутавры стальные горячекатаные (ГОСТ 8239-89)» выбираем двутавр № 18 а, у которого $W_x^I = 159 \text{ см}^3$, это ближайшее большее значение к расчетному моменту сопротивления сечения. Выписываем геометрические характеристики двутавра № 18 а (табл. 25).

Таблица 25

Геометрические характеристики двутавров № 18 а, 20

Номер двутавра	Размеры сечения, мм				Площадь сечения, см ²	Справочные величины для осей					
	h	b	s	t		x - x			y - y		
						I _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см	S _x , см ³	I _y , см ⁴	W _y , см ³
18 а	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1

Подбираем диаметр круглого поперечного сечения балки с учетом, что осевой момент сопротивления балки круглого поперечного сечения равен:

$$W_x = 0,1D^3; \quad D = \sqrt[3]{\frac{W_x}{0,1}} = \sqrt[3]{\frac{146,6}{0,1}} = 11,36 \text{ см}.$$

Подбираем размеры прямоугольного поперечного сечения балки с учетом, что h/b = 2, а.

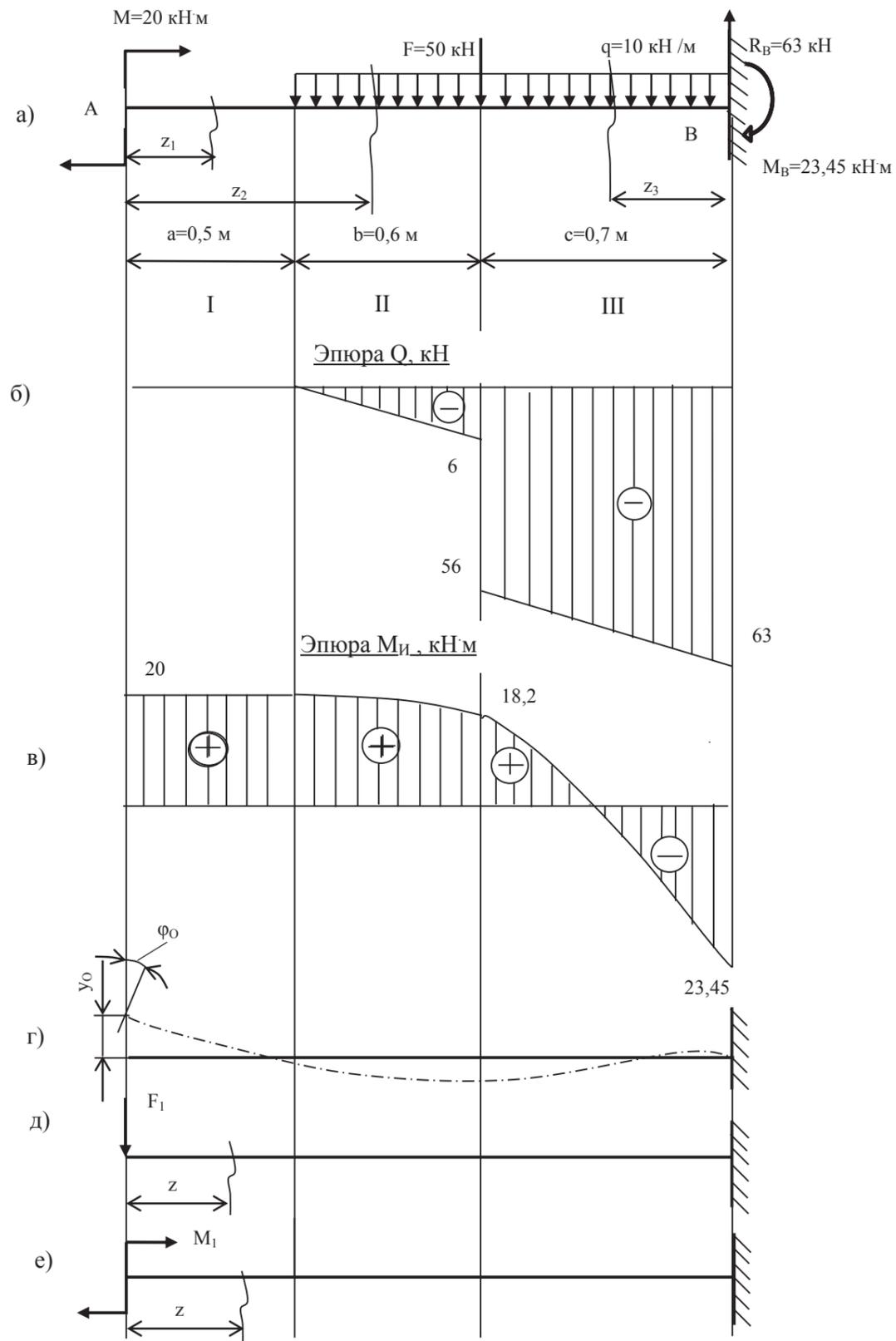


Рис. 104. Расчетные схемы и эпюры поперечных сил и изгибающих моментов по поперечному сечению (рис. 104, в)

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{4b^3}{6} = \frac{2b^3}{3}; \quad b = \sqrt[3]{\frac{3W_x}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 146,6}{2}} = 6,04 \text{ см};$$

$$h = 2b = 2 \cdot 6,04 = 12,08 \text{ см}.$$

Из условия равнопрочности сравним вес балок с различным поперечным сечением. Вес балки можно определить как произведение объема балки на величину плотности материала. Учитывая, что длина и плотность материала балки одинаковы, получим, что для сравнения веса балки достаточно сравнить их площади поперечных сечений.

$$A_{\perp} = 25,4 \text{ см}^2 \text{ - для двутаврового сечения};$$

$$A_0 = \frac{\pi \cdot D^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 11,36^2}{4} = 101,3 \text{ см}^2 \text{ - для круглого поперечного сечения};$$

$A_{\square} = b \cdot h = 6,04 \cdot 12,08 = 72,96 \text{ см}^2$ - для прямоугольного поперечного сечения. Получили, что самым выгодным поперечным сечением при изгибе является двутавр, за ним следует прямоугольное поперечное сечение и затем круглое поперечное сечение:

$$\frac{A_0}{A_{\perp}} = \frac{101,3}{25,4} = 3,99; \quad \frac{A_{\square}}{A_{\perp}} = \frac{72,96}{25,4} = 2,87.$$

Экономия материала при использовании двутаврового сечения по сравнению с круглым поперечным сечением балки составит 3,99 раза, а прямоугольного - 2,87 раза.

8. Для опасного сечения балки двутаврового сечения проверим прочность по эквивалентным напряжениям с использованием теории наибольших касательных напряжений. Для этого вычертим в масштабе 2:1 поперечное сечение двутавровой балки (рис. 104, а).

Распределение нормальных напряжений по поперечному сечению подчиняется закону:

$$\sigma = \frac{M_{из} \cdot y}{I_x}$$

При $y = 0; \sigma = 0$.

$$\text{При } y = \frac{H}{2}; \sigma_{max} = \frac{M_{изmax} \cdot \frac{H}{2}}{I_x} = \frac{M_{изmax}}{W_x} = \frac{23,45 \cdot 10^3}{159 \cdot 10^{-6}} = 147,5 \text{ МПа}.$$

$$\text{При } y = -\frac{H}{2}; \sigma_{min} = \frac{M_{изmax} \cdot (-\frac{H}{2})}{I_x} = -\frac{M_{изmax}}{W_x} = -\frac{23,45 \cdot 10^3}{159 \cdot 10^{-6}} = -147,5 \text{ МПа}.$$

$$\text{При } y = y_{a-a} = (\frac{h}{2} - t) = (\frac{180}{2} - 8,3) \cdot 10^{-3} = 81,7 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\sigma_{a-a} = \frac{M_{изmax} \cdot y_{a-a}}{I_x} = \frac{23,45 \cdot 10^3 \cdot 81,7 \cdot 10^{-3}}{1430 \cdot 10^{-8}} = 134 \text{ МПа}.$$

Строим эпюру распределения нормальных напряжений по поперечному сечению (рис. 105, б). Распределение касательных напряжений по поперечному сечению подчиняется закону:

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{ост}}{b \cdot I_x}$$

$$\text{При } y = 0; \tau_{max} = \frac{Q \cdot S_x^{ост}}{b \cdot I_x} = \frac{63 \cdot 10^3 \cdot 89,8 \cdot 10^{-6}}{5,1 \cdot 10^{-3} \cdot 1430 \cdot 10^{-8}} = 77,57 \text{ МПа}.$$

$$\text{При } y = y_{a-a} = 81,7 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad b = s = 5,1 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$S_x^{ост} = A_{ост} \cdot y_{цт} = B \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right) = 100 \cdot 10^{-3} \cdot 8,3 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{180}{2} - \frac{8,3}{2}\right) \cdot 10^{-3} = 71,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$\tau_{a-a} = \frac{Q \cdot S_x^{ост}}{b \cdot I_x} = \frac{63 \cdot 10^3 \cdot 71,3 \cdot 10^{-6}}{5,1 \cdot 10^{-3} \cdot 1430 \cdot 10^{-8}} = 61,6 \text{ МПа}.$$

$$\text{При } y = y_{a-a} = 81,7 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad b = B = 100 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\tau_{a-a} = \frac{Q \cdot S_x^{ост}}{b \cdot I_x} = \frac{63 \cdot 10^3 \cdot 71,3 \cdot 10^{-6}}{100 \cdot 10^{-3} \cdot 1430 \cdot 10^{-8}} = 3,14 \text{ МПа}.$$

По полученным значениям строим эпюру распределения касательных напряжений по поперечному сечению (рис. 105, в).

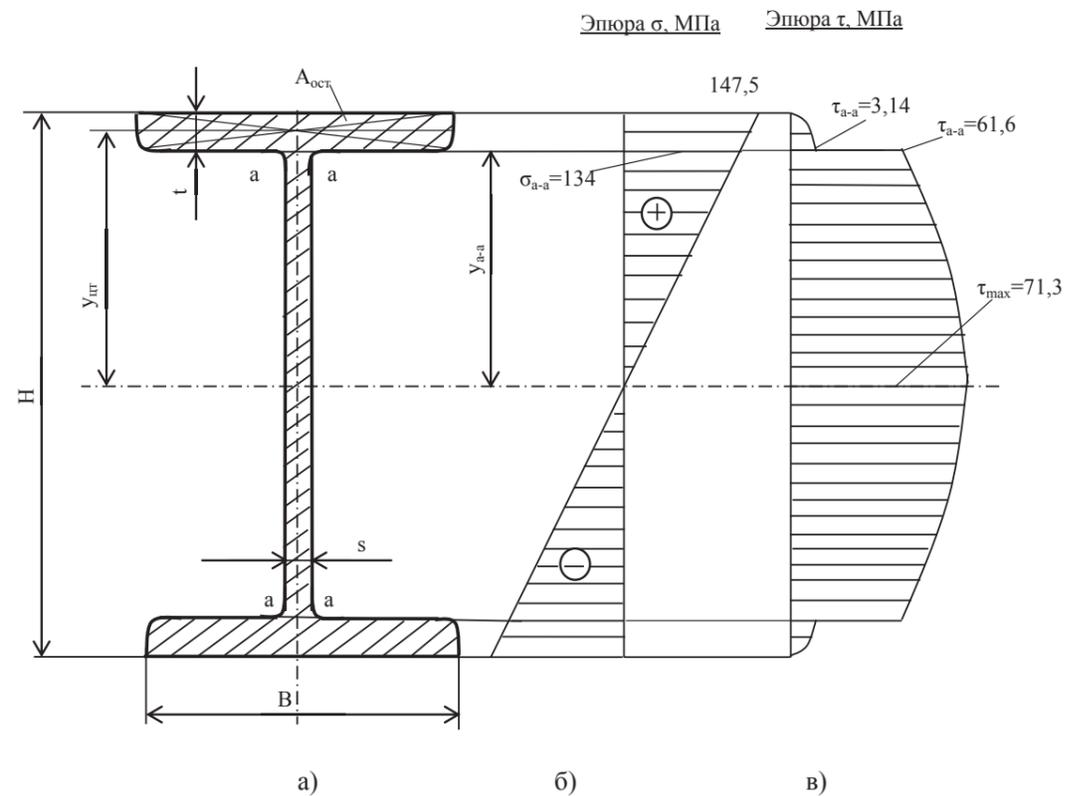


Рис. 105. Поперечное сечение двутавра и эпюры нормальных и касательных напряжений

Проводим проверку прочности двутавра по сечению а-а там, где стойка переходит в полку, по теории наибольших касательных напряжений:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_{a-a}^2 + 4\tau_{a-a}^2} = \sqrt{134^2 + 4 \cdot 61,6^2} = 182,8 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по эквивалентным напряжениям не выполняется, поэтому выбираем двутавр № 20, геометрические характеристики которого приведены в таблице 23.

Проводим повторный расчет эквивалентных напряжений для двутавра № 20. Распределение нормальных напряжений: $\sigma = \frac{M_{и \cdot y}}{I_y}$.

При $y = 0$; $\sigma = 0$.

$$\text{При } y = \frac{H}{2}; \sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{иmax}} \cdot \frac{H}{2}}{I_x} = \frac{M_{\text{иmax}}}{W_x} = \frac{23,45 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^{-6}} = 127,4 \text{ МПа}.$$

$$\text{При } y = -\frac{H}{2}; \sigma_{\text{min}} = \frac{M_{\text{иmax}} \cdot (-\frac{H}{2})}{I_x} = -\frac{M_{\text{иmax}}}{W_x} = -\frac{23,45 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^{-6}} = -127,4 \text{ МПа}.$$

$$\text{При } y = y_{a-a} = \left(\frac{h}{2} - t\right) = \left(\frac{200}{2} - 8,4\right) \cdot 10^{-3} = 91,6 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\sigma_{a-a} = \frac{M_{\text{иmax}} \cdot y_{a-a}}{I_x} = \frac{23,45 \cdot 10^3 \cdot 91,6 \cdot 10^{-3}}{1840 \cdot 10^{-8}} = 116,7 \text{ МПа}.$$

Распределение касательных напряжений по поперечному сечению: $\tau = \frac{Q \cdot S_x^{\text{ост}}}{b \cdot I_x}$.

$$\text{При } y = 0; \tau_{\text{max}} = \frac{Q \cdot S_x^{\text{ост}}}{b \cdot I_x} = \frac{63 \cdot 10^3 \cdot 104 \cdot 10^{-6}}{5,1 \cdot 10^{-3} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 77,57 \text{ МПа}.$$

$$\text{При } y = y_{a-a} = 91,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad b = s = 5,2 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$S_x^{\text{ост}} = A_{\text{ост}} \cdot y_{\text{цт}} = B \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right) = 100 \cdot 10^{-3} \cdot 8,4 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{200}{2} - \frac{8,4}{2}\right) \cdot 10^{-3} = 80,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$\tau_{a-a} = \frac{Q \cdot S_x^{\text{ост}}}{b \cdot I_x} = \frac{63 \cdot 10^3 \cdot 80,5 \cdot 10^{-6}}{5,2 \cdot 10^{-3} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 53 \text{ МПа}.$$

При $y = y_{a-a} = 91,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad b = B = 100 \cdot 10^{-3} \text{ м};$

$$\tau_{a-a} = \frac{Q \cdot S_x^{\text{ост}}}{b \cdot I_x} = \frac{63 \cdot 10^3 \cdot 80,5 \cdot 10^{-6}}{100 \cdot 10^{-3} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 2,76 \text{ МПа}.$$

Эквивалентные напряжения в сечении а-а по теории наибольших касательных напряжений:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_{a-a}^2 + 4\tau_{a-a}^2} = \sqrt{116,7^2 + 4 \cdot 53^2} = 157,7 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Окончательно принимаем двутавр № 20 ГОСТ 8239-89.

9. Для консольно закрепленной балки двутаврового сечения определяем прогиб и угол поворота свободного конца балки. Прогиб и угол поворота поперечных сечений можно определить различными способами. Здесь рассмотрим метод начальных параметров и способ перемножения эпюр (способ Верещагина).

9.1. Метод начальных параметров.

Поместим начало координат в левый конец балки (рис. 106).

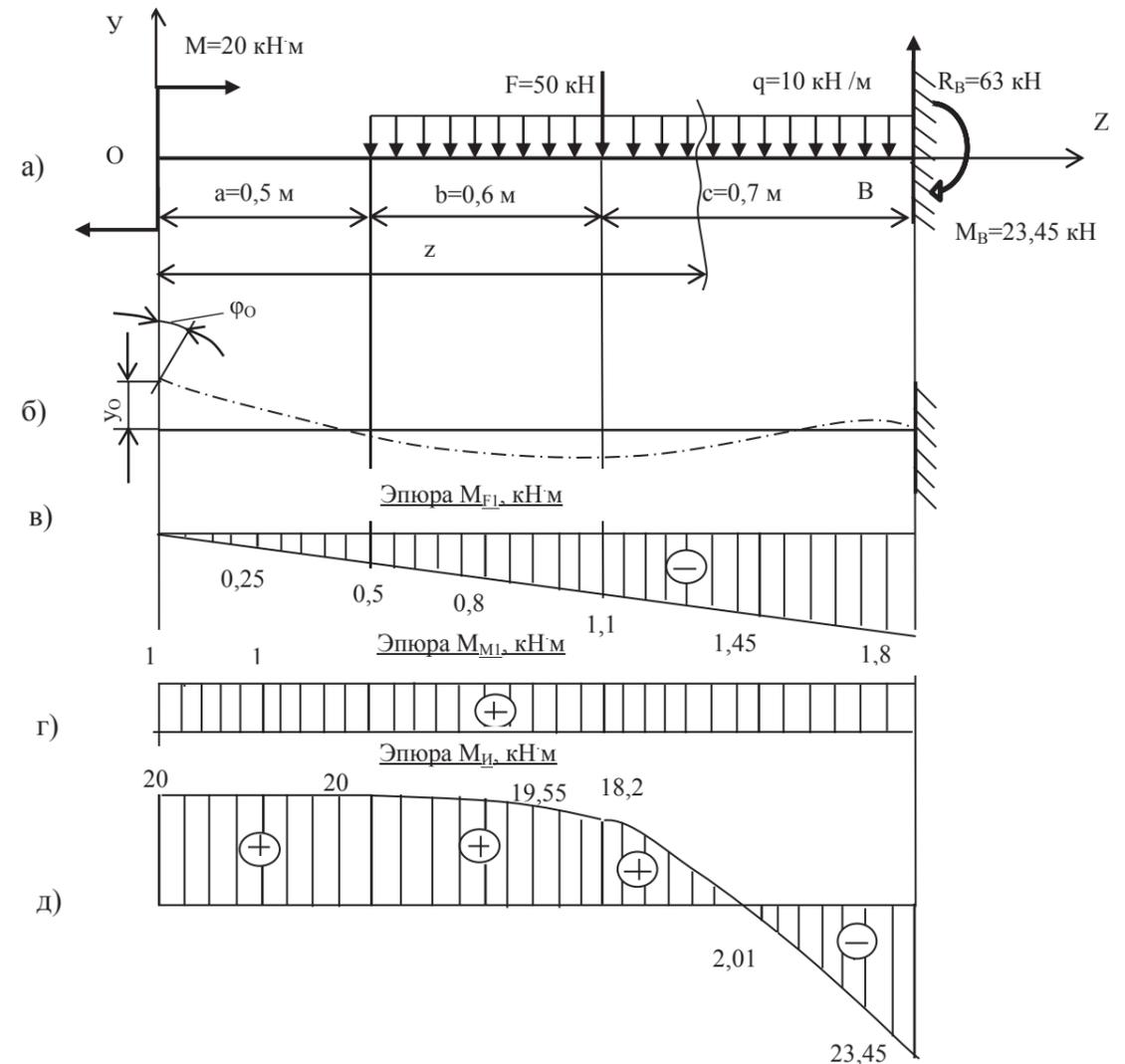


Рис. 106. Расчетные схемы и эпюры изгибающих моментов

Запишем универсальные уравнения метода начальных параметров:

$$\begin{cases} E \cdot I_x \cdot y'(z) = EI_x \varphi_0 + \sum \frac{m(z-a)}{1} + \sum \frac{F(z-b)^2}{2} + \sum \frac{q(z-c)^3}{6} - \sum \frac{q(z-d)^3}{6}, \\ E \cdot I_x \cdot y(z) = EI_x y_0 + EI_x \varphi_0 \cdot z + \sum \frac{m(z-a)^2}{2} + \sum \frac{F(z-b)^3}{6} + \sum \frac{q(z-c)^4}{24} - \sum \frac{q(z-d)^4}{24}. \end{cases}$$

Применительно для нашей балки они будут иметь вид:

$$\begin{cases} E \cdot I_x \cdot y'(z) = EI_x \varphi_0 + \frac{M \cdot z}{1} + \frac{M_B \cdot (z-a-b-c)}{1} - \frac{F(z-a-b)^2}{2} + \frac{R_B(z-a-b-c)^2}{2} - \frac{q(z-a)^3}{6}, \\ E \cdot I_x \cdot y(z) = EI_x y_0 + EI_x \varphi_0 \cdot z + \frac{M \cdot z^2}{2} + \frac{M_B \cdot (z-a-b-c)^2}{2} - \frac{F(z-a-b)^3}{6} + \frac{R_B(z-a-b-c)^3}{6} - \frac{q(z-a)^4}{24}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} E \cdot I_x \cdot y'(z) = EI_x \varphi_0 + \frac{M \cdot z}{1} + \frac{M_B \cdot (z-1,8)}{1} - \frac{F(z-1,1)^2}{2} + \frac{R_B(z-1,8)^2}{2} - \frac{q(z-0,5)^3}{6}, \\ E \cdot I_x \cdot y(z) = EI_x y_0 + EI_x \varphi_0 \cdot z + \frac{M \cdot z^2}{2} + \frac{M_B \cdot (z-1,8)^2}{2} - \frac{F(z-1,1)^3}{6} + \frac{R_B(z-1,8)^3}{6} - \frac{q(z-0,5)^4}{24}. \end{cases}$$

Определим величину $EI_x \varphi_0$ и $EI_x y_0$ из условия, что при $z = 1,8$ м прогиб и угол поворота в сечении заделки будут равны нулю:

$$\begin{cases} 0 = EI_x \varphi_0 + \frac{20 \cdot 1,8}{1} - \frac{50(1,8-1,1)^2}{2} - \frac{10(1,8-0,5)^3}{6}, \\ 0 = EI_x y_0 + EI_x \varphi_0 \cdot 1,8 + \frac{20 \cdot 1,8^2}{2} - \frac{50(1,8-1,1)^3}{6} - \frac{10(1,8-0,5)^4}{24}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} EI_x \varphi_0 = -20,09 \text{ кНм}^2; \\ EI_x y_0 = 7,81 \text{ кНм}^3. \end{cases}$$

С учетом начальных параметров универсальные уравнения для балки запишутся в виде:

$$\begin{cases} E \cdot I_x \cdot y'(z) = -20,09 + \frac{M \cdot z}{1} + \frac{M_B \cdot (z-1,8)}{1} - \frac{F(z-1,1)^2}{2} + \frac{R_B(z-1,8)^2}{2} - \frac{q(z-0,5)^3}{6}, \\ E \cdot I_x \cdot y(z) = 7,81 - 20,09 \cdot z + \frac{M \cdot z^2}{2} + \frac{M_B \cdot (z-1,8)^2}{2} - \frac{F(z-1,1)^3}{6} + \frac{R_B(z-1,8)^3}{6} - \frac{q(z-0,5)^4}{24}. \end{cases}$$

Тогда угол поворота φ_0 свободного конца балки и прогиб y_0 будут равны:
При $z = 0$;

$$\varphi_0 = \frac{-20,09 \cdot 10^3}{EI_x} = \frac{-20,09 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = -5,46 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$y_0 = \frac{7,81 \cdot 10^3}{EI_x} = \frac{7,81 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 2,12 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

«Минус» φ_0 показывает, что поперечное сечение поворачивается относительно своего первоначального положения по часовой стрелке. «Плюс» y_0 показывает, что прогиб направлен в сторону оси Y.

9.2. Способ перемножения эпюр (способ Верещагина).

Для определения угла поворота свободного конца балки необходимо перемножить эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки с эпюрами изгибающих моментов от единичного момента, приложенного на свободном конце балки. Для этого приложим к балке единичный момент (рис. 104, е). Методом сечений определяем изгибающие моменты:

$$M_{M1} = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Строим эпюру изгибающих моментов (рис. 106, г). Величина угла поворота свободного конца балки определится по формуле:

$$\varphi_0 = \sum M_{иx} M_{M1} = \frac{1}{E \cdot I_x} \sum \omega_i \cdot \eta_j = \sum \frac{l_i}{6E \cdot I_x} (ab + 4nm + cd).$$

Для упрощения расчетов при перемножении эпюр воспользуемся формулой Симпсона. Тогда:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{0,5 \cdot 10^3}{6 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} (20 \cdot 1 + 4 \cdot 20 \cdot 1 + 20 \cdot 1) + \\ &+ \frac{0,6 \cdot 10^3}{6 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} (20 \cdot 1 + 4 \cdot 19,55 \cdot 1 + 18,2 \cdot 1) + \\ &+ \frac{0,7 \cdot 10^3}{6 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} (18,2 \cdot 1 - 4 \cdot 2,01 \cdot 1 - 23,45 \cdot 1) = \\ &= 0,00272 + 0,00316 - 0,00042 = 0,00546 \text{ рад} = 5,46 \cdot 10^{-3} \text{ рад}. \end{aligned}$$

«Плюс» φ_0 показывает, что угол поворота совпадает с направлением единичного момента.

Для определения прогиба свободного конца балки необходимо перемножить эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки с эпюрами изгибающих моментов от единичной силы, приложенной на свободном конце балки. Для этого приложим к балке единичную силу (рис. 104, д). Методом сечений определяем изгибающие моменты:

$$M_{F1} = -1 \cdot z.$$

Определяем изгибающие моменты в начале, середине и конце каждого участка. По полученным значениям строим эпюру изгибающих моментов (рис. 105, в). Величина прогиба свободного конца балки определится по формуле:

$$y_0 = \sum M_{иx} M_{F1} = \frac{1}{E \cdot I_x} \sum \omega_i \cdot \eta_j = \sum \frac{l_i}{6E \cdot I_x} (ab + 4nm + cd).$$

Согласно формуле Симпсона, прогиб равен:

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{0,5 \cdot 10^3}{6 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} (20 \cdot 0 - 4 \cdot 20 \cdot 0,25 - 20 \cdot 0,5) + \\ &+ \frac{0,6 \cdot 10^3}{6 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} (-20 \cdot 0,5 - 4 \cdot 19,55 \cdot 0,8 - 18,2 \cdot 1,1) + \\ &+ \frac{0,7 \cdot 10^3}{6 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} (-18,2 \cdot 1,1 + 4 \cdot 2,01 \cdot 1,45 + 23,45 \cdot 1,8) = \\ &= -0,000679 - 0,002516 + 0,001073 = -0,00212 \text{ м} = -2,12 \cdot 10^{-3} \text{ м}. \end{aligned}$$

«Минус» y_0 показывает, что прогиб направлен в противоположную сторону единичной силы.

Результаты вычислений угла поворота и прогиба балки, выполненные разными способами, дают одинаковые результаты.

Расчетно-графическое задание № 7

К решению задачи следует приступить после изучения темы «Статически неопределимые системы». Для решения статически неопределимых систем, кроме уравнений равновесия, необходимо составить дополнительные уравнения совместности деформаций и решить статическую, геометрическую и физическую сторону задачи.

Задача 7. Расчет статически неопределимых систем

Для заданного абсолютно жесткого бруса, имеющего шарнирно-неподвижную опору и две тяги из упругопластического материала, нагруженного переменной по значению силой F (рис. 87, табл. 7), требуется:

1. Вычертить расчетную схему в определенном масштабе.
2. Найти зависимости от силы F значения усилий в тягах.
3. Определить в процессе увеличения силы F ее значение, при котором напряжение в одной из тяг достигнет предела текучести.
4. Определить в процессе увеличения силы F ее значение, при котором несущая способность обеих тяг будет исчерпана.
5. Найти значение грузоподъемности из расчета по методу допускаемых напряжений и методу разрушающих нагрузок, если коэффициент запаса прочности $k = 1,5$, допускаемые напряжения $[\sigma] = \sigma_T/k$, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа и предел текучести материала тяг $\sigma_T = 240$ МПа. Сопоставить результаты и сделать выводы.

Решение:

1. Выбираем по таблице исходные данные согласно варианту:

№ схемы	Площади стержней, см ²		Длина участка бруса, м			Длина тяги, м	
	A ₁	A ₂	a	b	c	l ₁	l ₂
1	8	12	1,6	1,5	1,4	0,9	2,0

2. На отдельной странице чертим расчетную схему с указанием исходных данных (рис. 107, а). В заделке и тягах балки будут возникать реакции связи.

Решаем статическую сторону задачи. Определяем степень статической неопределимости системы: $n = R - y = 4 - 3 = 1$; где $R = 4$ – количество неизвестных реакций связи (H_A, R_A, R_B, R_C); $y = 3$ – количество независимых уравнений равновесия для плоской системы.

Система один раз статически неопределима.

3. Решаем геометрическую сторону задачи. Для этого выбираем основную систему. Так как расчет реакций опоры А здесь не предполагается, то реакции H_A, R_A не вычисляем. Отбрасываем опоры В и С и заменяем их реакциями стержней N_1 и N_2 (рис. 107, б). Направление реакций стержней делаем положительным, то есть предполагаем, что стержни испытывают деформацию растяжения (если в результате решения уравнений получим знак минус, значит, стержень испытывает деформацию сжатия). Записываем для основной системы уравнение равновесия:

$$\sum m_A(F) = 0; \quad N_1 \cdot a - N_2 \cdot (a + b) - F \cdot (a + b + c) = 0.$$

4. Физическая сторона задачи. Составляем уравнение совместности деформации системы. Для этого системе придаем возможное перемещение (рис. 107, в). Используя подобие треугольников ABB_1 и ACC_1 , получим уравнение совместности деформации:

$$\frac{\Delta l_1}{a} = \frac{\Delta l_2}{a+b},$$

где $\Delta l_1, \Delta l_2$ – абсолютные удлинения стержней 1 и 2, которые, согласно закону Гука, будут равны:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1}; \quad \Delta l_2 = -\frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2}.$$

Подставляя полученные выражения в уравнение совместности деформации, получим:

$$\frac{N_1 \cdot l_1}{a \cdot E \cdot A_1} = -\frac{N_2 \cdot l_2}{(a+b)E \cdot A_2}.$$

$$\text{Откуда } N_2 = -\frac{N_1 \cdot l_1 \cdot (a+b)E \cdot A_2}{a \cdot E \cdot A_1 \cdot l_2} = -\frac{0,9(1,6+1,5)12 \cdot N_1}{1,6 \cdot 0,9 \cdot 2,0} = -11,625 \cdot N_1.$$

Подставим полученное выражение в уравнение равновесия системы:

$$N_1 \cdot a + 11,625N_1 \cdot (a + b) - F \cdot (a + b + c) = 0;$$

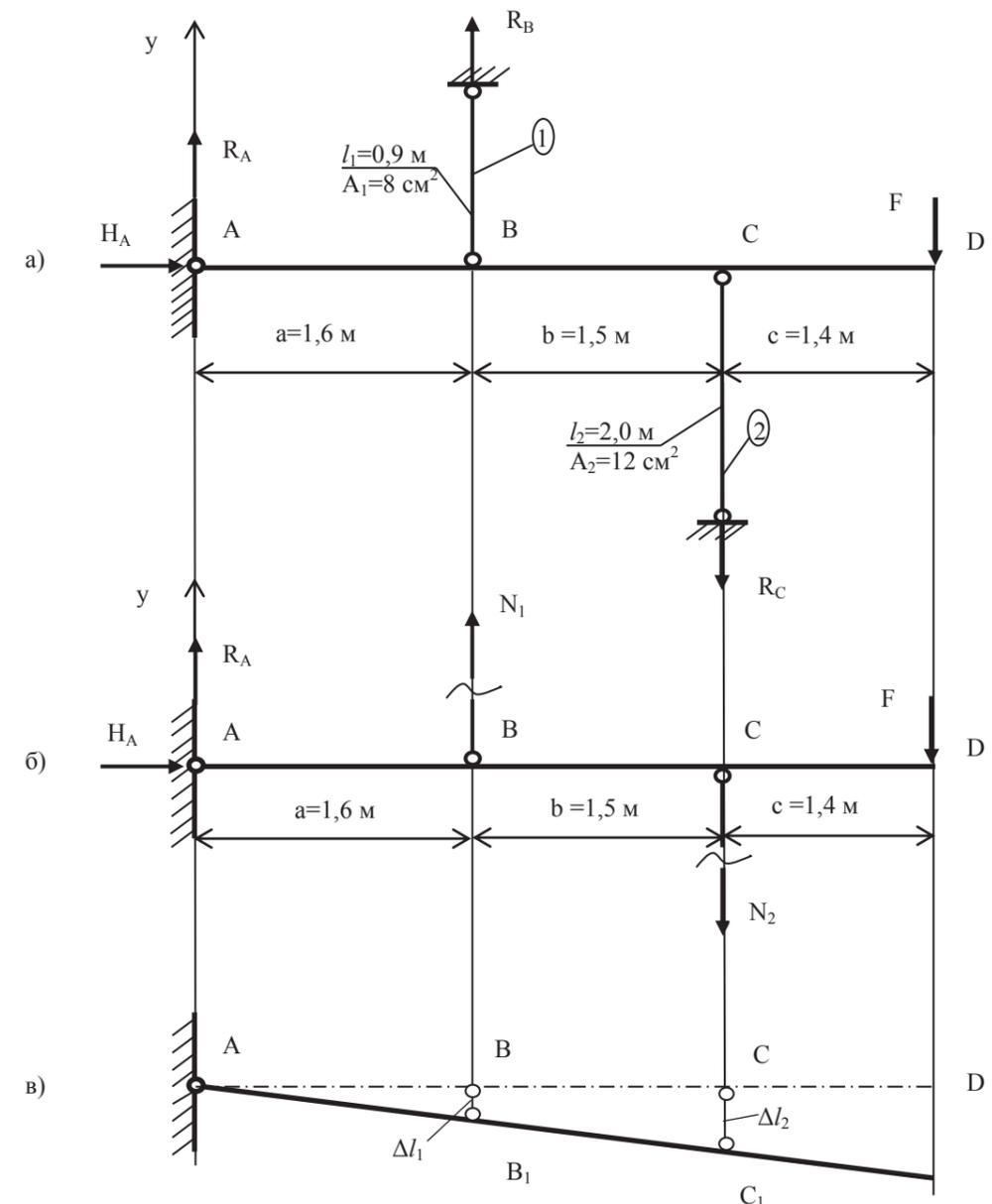


Рис. 107. Расчетные схемы статически неопределимой системы

$$N_1 = \frac{N_1 \cdot a + 11,625N_1 \cdot (a + b) = F \cdot (a + b + c);}{F(a + b + c)} = \frac{F(1,6 + 1,5 + 1,4)}{1,6 + 11,625(1,6 + 1,5)} = \frac{4,5F}{37,638} = 0,12F;$$

$$N_2 = -11,625 \cdot N_1 = -11,625 \cdot 0,12F = -1,395F.$$

Получили значения усилий N_1 и N_2 в виде функции от F. Стержень 1 испытывает деформацию растяжения, а стержень 2 – деформацию сжатия.

5. Установим опасное состояние системы. Для этого определим нормальные напряжения в каждом стержне: $\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{0,12F}{8} = 0,015F$; $\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-1,395F}{12} = -0,116F$.

Учитывая, что пластичные материалы одинаково работают на растяжение и сжатие, сравнение напряжений производим по модулю. Получим $\sigma_2 = 0,116F > \sigma_1 = 0,015F$, а значит, при возрастании силы F стержень 2 первым достигнет стадии текучести материала, и с точки зрения метода допу-

скаемых напряжений это состояние конструкции будет опасным и для него должно выполняться условие прочности:

$$\sigma_{max} = \sigma_2 \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{k}.$$

Тогда $0,116[F]_{\sigma} = \frac{240 \cdot 10^6}{1,5}$, $[F]_{\sigma} = \frac{240}{1,5 \cdot 0,116} = 137,93$ кН.

При этой нагрузке в стержне 1 рабочие напряжения составят величину $\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{0,015F}{A_1} = \frac{0,015 \cdot 137,93}{8} = 25,86$ МПа, что меньше допускаемых напряжений $[\sigma]$ на

$$\left(1 - \frac{25,86}{160}\right) \cdot 100\% = 84\%.$$

Как видно, стержень 1 существенно недогружен и вся конструкция далека от разрушения, система не потеряла своей несущей способности.

6. Определим допускаемую нагрузку по методу разрушающих (предельных) нагрузок.

Увеличивая внешнюю силу F и полагая, что стержень 2 достиг предела текучести и в дальнейшем при повышении силы F усилие в стержне 2, равное $N_2 = \sigma_T \cdot A_2$, будет неизменным (согласно диаграмме Прандтля, рис. 108), а усилие в стержне 1 будет возрастать до значения $N_1 = \sigma_T \cdot A_1$ и стержень 1 вынужденно будет воспринимать увеличивающую нагрузку. В момент достижения материалом стержня 1 нормальных напряжений, равных пределу текучести σ_T , вся конструкция достигнет предельного состояния.

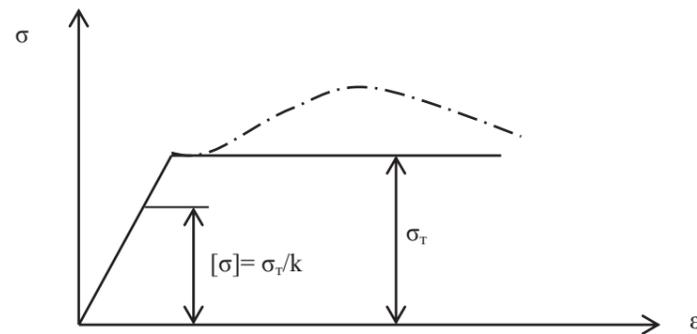


Рис. 108. Диаграмма Прандтля

Условие предельного состояния системы запишем исходя из уравнения равновесия:

$$\sum m_A(F) = 0; \quad \sigma_T \cdot A_1 \cdot a + \sigma_T \cdot A_2(a + b) - F_{max}(a + b + c) = 0.$$

Откуда $F_{max} = \frac{\sigma_T \cdot A_1 \cdot a + \sigma_T \cdot A_2(a + b)}{(a + b + c)} = \frac{240 \cdot 8 \cdot 1,6 + 240 \cdot 12 \cdot (1,6 + 1,5)}{1,6 + 1,5 + 1,4} = 266,67$ кН.

Допустимое значение силы по методу разрушающих нагрузок определится:

$$[F]_F = \frac{F_{max}}{k} = \frac{266,67}{1,5} = 177,78 \text{ кН.}$$

Сравним результаты расчетов метода допускаемых напряжений и метода разрушающих нагрузок. Получим, что по методу разрушающих нагрузок мы используем дополнительные прочностные резервы конструкции, что позволило увеличить допускаемую силу по сравнению с методом допускаемых напряжений на:

$$\left(\frac{[F]_F}{[F]_{\sigma}} - 1\right) \cdot 100\% = \left(\frac{177,78}{137,93} - 1\right) 100\% = 28,9\%.$$

Расчетно-графическое задание № 8

К решению задачи следует приступить после изучения темы «Расчет статически неопределимых балок». Для решения статически неопределимых балок, кроме уравнений равновесия, необходимо составить дополнительные уравнения совместности деформаций и решить статическую, геометрическую и физическую сторону задачи.

Дополнительные уравнения совместности деформаций для статически неопределимых балок выполняются по методу сил, где в качестве неизвестных принимаются усилия, заменяющие действие отброшенных (лишних) связей.

Задача 8. Расчет статически неопределимых балок

Для статически неопределимой балки постоянного поперечного сечения требуется:

1. Построить эпюры изгибающих моментов M_i и поперечных сил Q .
2. Подобрать номер прокатного двутавра из условия прочности по нормальным напряжениям при $[\sigma] = 160$ МПа.
3. Изобразить вид упругой оси балки исходя из эпюры изгибающих моментов и условий закрепления балки.

Данные для расчета приведены в таблице 8 и рисунке 87.

Решение:

1. Выбираем по таблице исходные данные согласно варианту:

№ схемы	Внешняя нагрузка			Длина участка балки, м		
	q, кН/м	F, кН	M, кНм	a	b	c
1	20	40	20	2	2,5	2,5

2. На отдельной странице чертим расчетную схему с указанием исходных данных (рис. 109, а).
3. Решаем статическую сторону задачи. Определяем степень статической неопределимости системы: $n = R - y = 4 - 3 = 1$; где R – количество неизвестных реакций связи (H_A, R_A, R_B, R_C); $y = 3$ – количество независимых уравнений равновесия для плоской системы.

Система один раз статически неопределима.

4. Решаем геометрическую сторону задачи. Для этого выбираем основную систему. Основную систему выбираем в виде двух шарнирно опертых балок (рис. 109, б) путем разреза балки и постановки шарнира под опорой В. Такая основная система для многопролетной балки называется рациональной.

5. Физическая сторона задачи. Составляем уравнение совместности деформации балки исходя из того, что за лишнее неизвестное принимаем изгибающий момент во введенном шарнире. Тогда, исходя из непрерывности упругой линии балки $\varphi_{Bx_1} = \varphi_{BF}$, уравнение совместности деформации в форме канонического уравнения метода сил будет иметь вид:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0,$$

где X_1 – искомый изгибающий момент в опорном сечении В; δ_{11} – угловое перемещение (угол поворота поперечного сечения) в опорном сечении В от $X_1 = 1$; Δ_{1F} – угловое перемещение (угол поворота поперечного сечения) в опорном сечении В от внешней нагрузки.

6. Для определения коэффициентов необходимо построить эпюры изгибающих моментов от единичного момента $X_1 = 1$ и от внешней нагрузки в основной системе.

Прикладываем к основной системе единичный момент $X_1 = 1$ (рис. 109, в). Балку представляем состоящей из двух балок. Рассмотрим левую часть балки основной системы. Определяем из уравнений равновесия реакции опор для левой части балки:

$$\sum m_A(F) = 0; \quad X_1 + R_B \cdot a = 0.$$

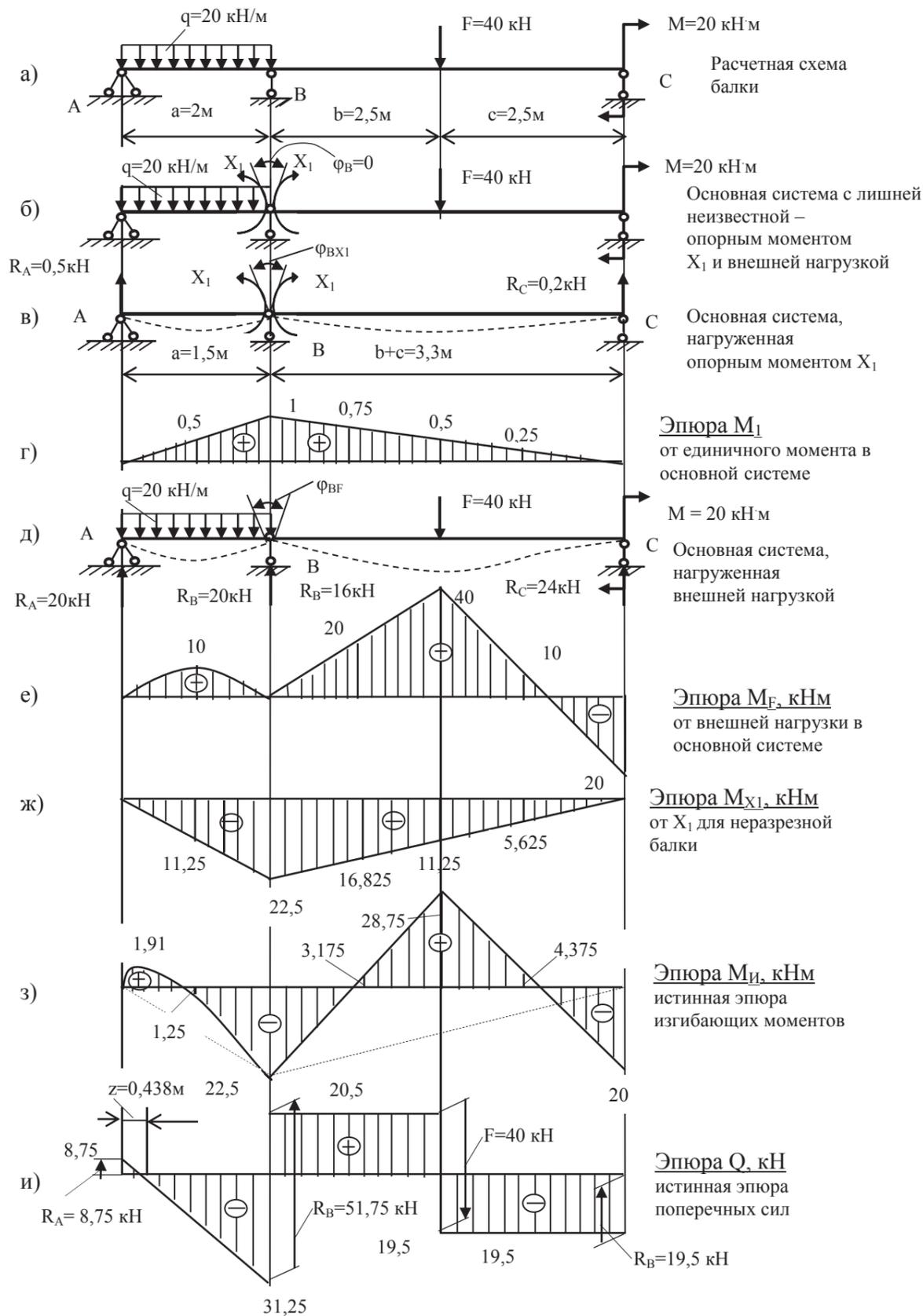


Рис. 109. Расчетные схемы и эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для статически неопределимой балки

$$R_B = \frac{-X_1}{a} = \frac{-1}{2} = -0,5 \text{ кН};$$

$$\sum m_B(F) = 0; \quad X_1 - R_A \cdot a = 0;$$

$$R_A = \frac{X_1}{a} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ кН}.$$

Минус R_B показывает, что реакция опоры направлена вниз. Делаем проверку:

$$\sum F_y = 0; \quad R_A - R_B = 0; \\ 0,5 - 0,5 = 0.$$

Реакции опор R_A и R_B определены верно. Учитывая, что левая часть балки имеет только один участок, изгибающий момент на нем будет равен:

$$M_1 = R_A \cdot z; \quad 0 \leq z \leq 2 \text{ м}.$$

При $z = 0$; $M_1 = 0$; При $z = 2$ м; $M_1 = R_A \cdot 2 = 0,5 \cdot 2 = 1$.

Рассмотрим правую часть балки основной системы. Определяем из уравнений равновесия реакции опор для левой части балки:

$$\sum m_C(F) = 0; \quad -X_1 - R_B \cdot (b + c) = 0 \\ R_B = \frac{-X_1}{b + c} = \frac{-1}{2,5 + 2,5} = -0,2 \text{ кН};$$

$$\sum m_B(F) = 0; \quad -X_1 + R_C \cdot (b + c) = 0 \\ R_C = \frac{X_1}{b + c} = \frac{1}{2,5 + 2,5} = 0,2 \text{ кН}.$$

Минус R_B показывает, что реакция опоры направлена вниз. Делаем проверку:

$$\sum F_y = 0; \quad R_B - R_C = 0; \\ -0,2 + 0,2 = 0.$$

Реакции опор R_B и R_C определены верно. Учитывая, что правая часть балки имеет только один участок, изгибающий момент на нем будет равен:

$$M_1 = R_C \cdot z; \quad 0 \leq z \leq 5 \text{ м}.$$

При $z = 0$; $M_1 = 0$; При $z = 5$ м; $M_1 = R_C \cdot 5 = 0,2 \cdot 5 = 1$.

По полученным значениям строим эпюру изгибающих моментов от единичного момента $X_1 = 1$ (рис. 109, г).

Прикладываем к основной системе внешнюю нагрузку (рис. 109, д). Балку представляем состоящей из двух балок. Рассмотрим левую часть балки основной системы, на которую действует только распределенная нагрузка. Определяем из уравнений равновесия реакции опор для левой части балки:

$$\sum m_A(F) = 0; \quad -\frac{q \cdot z^2}{2} + R_B \cdot a = 0 \\ R_B = \frac{q \cdot z^2}{2 \cdot a} = \frac{20 \cdot 2^2}{2 \cdot 2} = 20 \text{ кН}.$$

Учитывая симметричность действия распределенной нагрузки, имеем:

$$R_A = R_B = 20 \text{ кН}.$$

Делаем проверку:

$$\sum F_y = 0; R_A - q \cdot 2 + R_B = 0; \\ 20 - 20 \cdot 2 + 20 = 0.$$

Реакции опор R_A и R_B определены верно. Методом сечений определяем изгибающий момент для левой части балки, который будет равен:

$$M_F = R_A \cdot z - \frac{q \cdot z^2}{2}; \quad 0 \leq z \leq 2 \text{ м.}$$

$$\text{При } z = 0; M_F = 0; \text{ при } z = 1 \text{ м; } M_F = R_A \cdot 1 - \frac{q \cdot 1^2}{2} = 20 \cdot 1 - \frac{20 \cdot 1^2}{2} = 10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{при } z = 2 \text{ м; } M_F = R_A \cdot 2 - \frac{q \cdot 2^2}{2} = 20 \cdot 2 - \frac{20 \cdot 2^2}{2} = 0.$$

Рассмотрим правую часть балки основной системы. Определяем из уравнений равновесия реакции опор для левой части:

$$\sum m_C(F) = 0; \quad -R_B \cdot (b + c) + F \cdot c - M = 0 \\ R_B = \frac{F \cdot c - M}{b + c} = \frac{40 \cdot 2,5 - 20}{2,5 + 2,5} = 16 \text{ кН}; \\ \sum m_B(F) = 0; \quad R_C \cdot (b + c) - M - F \cdot b = 0 \\ R_C = \frac{F \cdot b + M}{b + c} = \frac{40 \cdot 2,5 + 20}{2,5 + 2,5} = 24 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum F_y = 0; R_B - F + R_C = 0; \\ 16 - 40 + 24 = 0.$$

Реакции опор R_B и R_C определены верно.

Учитывая, что правая часть балки имеет два участка, изгибающий момент на первом участке равен:

$$M_{F1} = R_B \cdot z_1; \quad 0 \leq z \leq 2,5 \text{ м.}$$

$$\text{При } z = 0; M_{F1} = 0; \text{ при } z = 2,5 \text{ м; } M_{F1} = R_B \cdot 2,5 = 16 \cdot 2,5 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Изгибающий момент на втором участке равен:

$$M_{F2} = R_C \cdot z_2 - M; \quad 0 \leq z \leq 2,5 \text{ м.}$$

$$\text{При } z = 0; M_{F2} = -M = -20 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{при } z = 2,5 \text{ м; } M_{F2} = R_C \cdot 2,5 - M = 24 \cdot 2,5 - 20 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По полученным значениям строим эпюру изгибающих моментов от внешней нагрузки (рис. 109, е).

Определение коэффициентов δ_{11} и Δ_{1F} выполняем по формуле Мора. Для упрощения расчетов при перемножении эпюр можно использовать формулу Симпсона.

Определяем коэффициент:

$$\delta_{11} = M_1 \times M_1 = \sum \frac{l_i}{6EI_x} (ab + 4mn + cd) = \frac{2}{6EI_x} (0 + 4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 1 \cdot 1) + \\ + \frac{5}{6EI_x} (1 \cdot 1 + 4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 0) = \frac{4}{6EI_x} + \frac{10}{6EI_x} = \frac{14}{6EI_x}.$$

Определяем коэффициент:

$$\Delta_{1F} = M_{1F} \times M_1 = \sum \frac{l_i}{6EI_x} (ab + 4mn + cd) = \frac{2}{6EI_x} (0 + 4 \cdot 0,5 \cdot 10 + 0) + \\ + \frac{2,5}{6EI_x} (0 + 4 \cdot 0,75 \cdot 20 + 0,5 \cdot 40) + \frac{2,5}{6EI_x} (0,5 \cdot 40 + 4 \cdot 0,25 \cdot 10 + 0) = \frac{315}{6EI_x}.$$

Значение X_1 определяем из канонического уравнения метода сил:

$$\frac{14}{6EI_x} \cdot X_1 + \frac{315}{6EI_x} = 0; \quad 14 \cdot X_1 + 315 = 0; \quad X_1 = -\frac{315}{14} = -22,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

7. Строим истинную эпюру изгибающих моментов. Для этого умножаем значение ординаты единичной эпюры M_1 на значение $X_1 = -22,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (рис. 109, ж) и складывая ее алгебраически с эпюрой изгибающих моментов от действующей нагрузки в основной системе, получим окончательную (расчетную) эпюру изгибающих моментов (рис. 109, з)).

8. Ординаты истинной эпюры поперечных сил Q могут быть определены для каждого участка по формуле:

$$Q_{\text{прав}}^{\text{лев}} = \pm \frac{q \cdot l_{\text{уч}}}{2} + \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лев}}}{l_{\text{уч}}};$$

где q – интенсивность распределенной нагрузки на рассматриваемом участке (если нагрузка отсутствует, то $q = 0$);

$l_{\text{уч}}$ – длина рассматриваемого участка;

$M_{\text{прав}}, M_{\text{лев}}$ – ординаты моментов на правом и левом конце участка, которые берутся со своими знаками. Для нашей балки имеем:

$$\text{участок I: } Q_{\text{прав}}^{\text{лев}} = \pm \frac{q \cdot l_{\text{уч}}}{2} + \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лев}}}{l_{\text{уч}}} = \pm \frac{20 \cdot 2}{2} - \frac{22,5}{2};$$

$$Q_{\text{лев}} = \frac{20 \cdot 2}{2} - \frac{22,5}{2} = 8,75 \text{ кН}; \quad Q_{\text{прав}} = -\frac{20 \cdot 2}{2} - \frac{22,5}{2} = -31,25 \text{ кН};$$

$$\text{участок II: } Q_{\text{прав}}^{\text{лев}} = \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лев}}}{l_{\text{уч}}} = \frac{28,75 + 22,5}{2,5} = 20,5 \text{ кН};$$

$$\text{участок III: } Q_{\text{прав}}^{\text{лев}} = \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лев}}}{l_{\text{уч}}} = \frac{-20 - 28,75}{2,5} = -19,5 \text{ кН}.$$

По полученным значениям строим эпюру поперечных сил (рис. 109, и).

9. Проводим проверку правильности построения эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

По эпюре Q определяем опорные реакции балки. Так как эпюра Q представляет собой силовой многоугольник, то, начиная построение эпюры поперечных сил с левого конца балки, скачки на эпюре поперечных сил и направление этих скачков будут соответствовать направлению и величине внешних сил и реакций опор на расчетной схеме балки. На рисунке 109, и показаны направление и величина реакций опор балки. Выполняем статическую проверку балки:

$$\sum F_y = 0; R_A - q \cdot 2 + R_B - F + R_C = 0; \\ 8,75 - 20 \cdot 2 + 51,75 - 40 + 19,5 = 0.$$

Уравнение равновесия балки выполняется – значит, расчет верен.

На первом участке балки эпюра поперечных сил равна нулю, а значит, эпюра изгибающих моментов в этом сечении имеет экстремум. Определим абсциссу сечения из условия $Q = R_A - q \cdot z = 0$;

$$z = \frac{R_A}{q} = \frac{8,75}{20} = 0,4375 \text{ м}.$$

$$\text{Величина изгибающего момента в этом сечении будет равна: } M_{\text{max}} = R_A \cdot z - \frac{q \cdot z^2}{2};$$

$$\text{при } z = 0,4375 \text{ м; } M_{\text{max}} = R_A \cdot 0,4375 - \frac{q \cdot 0,4375^2}{2} = 8,75 \cdot 0,4375 - \frac{20 \cdot 0,4375^2}{2} = 1,91 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Проводим деформационную проверку балки. Для этого отбрасываем одну из опор, например, опору С (рис. 110, б) и, зная, что на опоре С прогиб равен нулю, вычислим его по методу Мора. Если прогиб на опоре ($y_C = 0$) равен нулю, то эпюра изгибающих моментов построена верно, если $y_C \neq 0$, расчет балки содержит ошибки и должен быть переработан.

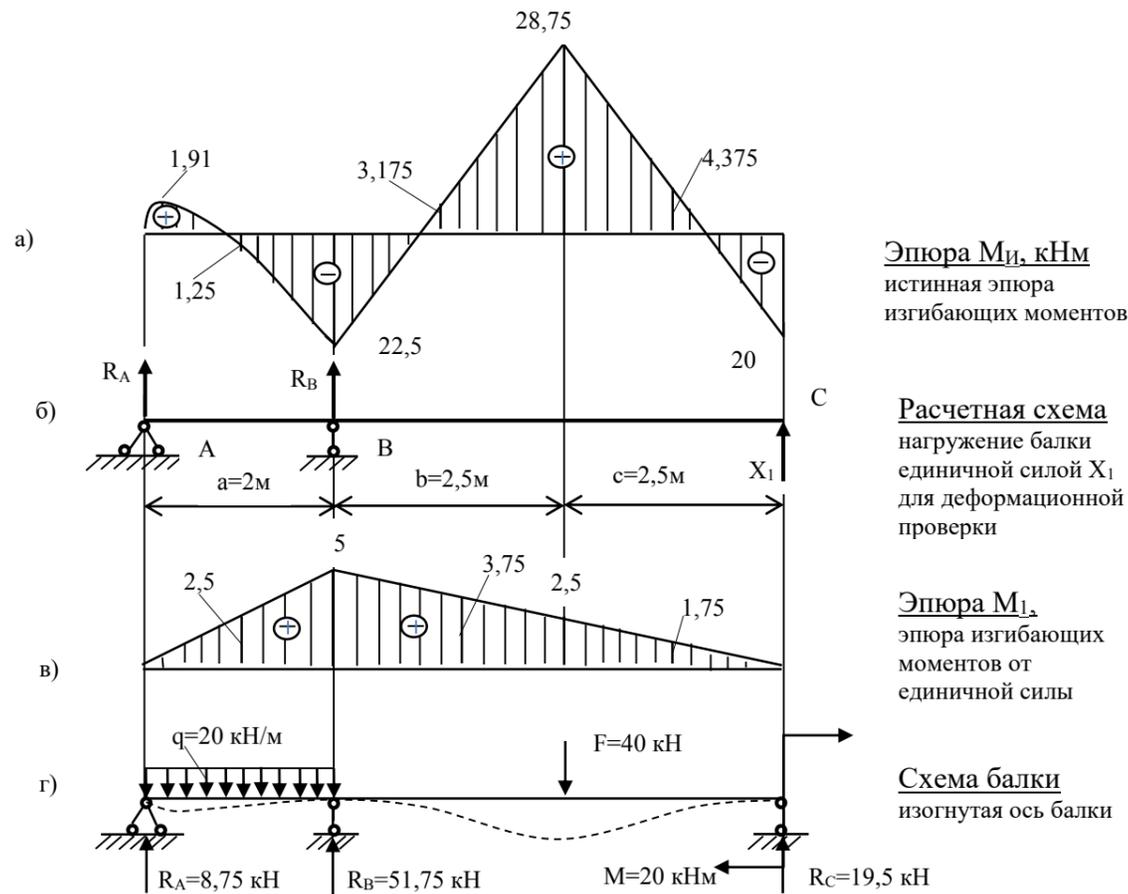


Рис. 110. Деформационная проверка балки

Из уравнений равновесия балки (рис. 110, б) определим реакции опор R_A и R_B :

$$\sum m_A(F) = 0; \quad X_1(a + b + c) + R_B \cdot a = 0$$

$$R_B = \frac{-X_1 \cdot (a + b + c)}{a} = \frac{-1 \cdot (2 + 2,5 + 2,5)}{2} = -3,5 \text{ kH};$$

$$\sum m_B(F) = 0; \quad X_1(b + c) - R_A \cdot a = 0$$

$$R_A = \frac{X_1(b + c)}{a} = \frac{1(2,5 + 2,5)}{2} = 2,5 \text{ kH}.$$

Минус R_B показывает, что реакция опоры направлена вниз. Делаем проверку:

$$\sum F_y = 0; \quad R_A - R_B + X_1 = 0;$$

$$2,5 - 3,5 + 1 = 0.$$

Реакции опор R_A и R_B определены верно.

Учитывая, что балка имеет два участка, изгибающий момент на первом участке равен:

$$M_1 = R_A \cdot z; \quad 0 \leq z \leq 2 \text{ м.}$$

При $z = 0$; $M_1 = 0$; при $z = 2$ м; $M_1 = R_A \cdot 2 = 2,5 \cdot 2 = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Изгибающий момент на втором участке равен:

$$M_2 = X_1 \cdot z; \quad 0 \leq z \leq 5 \text{ м.}$$

При $z = 0$; $M_2 = 0$; при $z = 5$ м; $M_2 = X_1 \cdot 5 = 1 \cdot 5 = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

По полученным значениям строим эпюру изгибающих моментов M_1 от единичной силы X_1 (рис. 110, в).

Определяем прогиб на опоре С перемножая эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки (рис. 110, а) на эпюру изгибающих моментов от единичной силы (рис. 110, в):

$$y_C = M_F \times M_1 = \sum \frac{l_i}{6EI_x} (ab + 4mn + cd) = \frac{2}{6EI_x} (0 - 4 \cdot 1,25 \cdot 2,5 - 22,5 \cdot 5) +$$

$$+ \frac{2,5}{6EI_x} (-22,5 \cdot 2,5 + 4 \cdot 3,175 \cdot 3,75 + 28,75 \cdot 5) + \frac{2,5}{6EI_x} (28,75 \cdot 5 + 4 \cdot 4,75 \cdot 1,75 + 0) = 0.$$

Эпюра изгибающих моментов построена верно.

10. По эпюре изгибающих моментов определяем опасное сечение. В нашем случае это сечение, где действует сила F . Здесь действует максимальный по абсолютной величине изгибающий момент $M_{max} = 28,75 \text{ кНм}$. Для этого сечения по условию прочности по нормальным напряжениям подбираем балку двутаврового сечения:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \leq [\sigma];$$

$$W_x \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{28,75 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 179,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 179,7 \text{ см}^3.$$

По сортаменту для двутавров стальных горячекатанных ГОСТ 8239-89 выбираем двутавр № 20 $W_x = 184 \text{ см}^3$.

11. Схема упругой линии балки показана на рисунке 110, г. При ее изображении следует иметь в виду, что при положительном изгибающем моменте (эпюра M_{i1} , рис. 110, а) упругая линия балки имеет выпуклость вниз, при отрицательном моменте – вверх. При изображении упругой линии балки следует учитывать расположение опор балки, на которых прогибы балки равны нулю, следовательно, упругая линия будет проходить по опорным точкам.

Расчетно-графическое задание № 9

К решению задачи следует приступить после изучения темы «Косой изгиб». При косом изгибе плоскость действия изгибающего момента «силовая плоскость» не совпадает ни с одной из главных плоскостей балки. Косой изгиб делится на плоский косой изгиб, когда упругая линия балки – плоская кривая, и пространственный косой изгиб, когда упругая линия балки – пространственная кривая. Внешнюю нагрузку при косом изгибе можно разложить на горизонтальную и вертикальную составляющие.

Используя метод сечений, строятся эпюры изгибающих моментов в горизонтальной и вертикальной плоскостях, по которым определяются опасные или предположительно опасные сечения. Из условия равенства нулю нормальных напряжений определяется положение нейтральной оси (нулевой линии), которая разделяет поперечное сечение на растянутые и сжатые части. Тангенс наклона нулевой линии с осью Ox определяется как:

$$\text{tg } \alpha_0 = \left| \frac{M_y I_x}{M_x I_y} \right|.$$

Нормальные напряжения при косом изгибе пропорциональны расстоянию точки, где определяются нормальные напряжения до нулевой линии. Поэтому максимальные нормальные напряжения будут действовать в наиболее удаленных от нулевой линии точках поперечного сечения и

для косоугольного пространственного изгиба они определяются:

$$\sigma_{max} = \frac{M_x \cdot y_{max}}{I_x} + \frac{M_y \cdot x_{max}}{I_y},$$

для плоского косоугольного изгиба, для балок, сечение которых имеет две оси симметрии (прямоугольник, двутавр), величина напряжений определяется:

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}.$$

Для опасных точек поперечного сечения записывается условие прочности балки.

Линейные и угловые перемещения балки (прогиб и угол поворота поперечных сечений балки) определяются в горизонтальных и вертикальных плоскостях, а общие величины определяются геометрическим суммированием.

Задача 9. Сложное сопротивление

Для деревянной балки прямоугольного поперечного сечения ($b \times h$) требуется:

1. Найти размеры поперечного сечения балки из условия прочности при $[\sigma] = 12$ МПа.
 2. Построить эпюру распределения нормальных напряжений в опасном сечении.
 3. Определить прогиб в середине длины балки.
- Данные для расчета приведены в таблице 8 и рисунке 87.

Решение:

1. Выбираем по таблице и рисунку 87 исходные данные согласно варианту:

№ схемы	Внешняя нагрузка			Длина участка балки, м			Отношение размеров поперечного сечения h/b
	F, кН	q, кН/м	M, кНм	a	b	c	
1	20	20	40	1,6	2	1,4	1,5

2. На отдельной странице чертим расчетную схему с указанием исходных данных (рис. 111, а).
3. Строим эпюры изгибающих моментов в вертикальной плоскости. Для этого изображаем расчетную схему балки с внешней нагрузкой в вертикальной плоскости (рис. 111, б). Из уравнений равновесия определяем реакции опор R_{Ay} и R_{Dy} :

$$\sum m_A(F) = 0; \quad M - F(a + b) + R_{Dy}(a + b + c) = 0$$

$$R_{Dy} = \frac{F(a + b) - M}{a + b + c} = \frac{20 \cdot 3,6 - 40}{5} = 6,4 \text{ кН};$$

$$\sum m_D(F) = 0; \quad -R_{Ay}(a + b + c) + M + F \cdot c = 0$$

$$R_{Ay} = \frac{F \cdot c + M}{a + b + c} = \frac{20 \cdot 1,4 + 40}{5} = 13,6 \text{ кН}.$$

Проверка: $\sum F_y = 0; R_{Ay} - F + R_{Dy} = 0; 13,6 - 20 + 6,4 = 0$.

Делим балку на участки и определяем изгибающий момент на каждом участке. Результаты расчетов сводим в таблицу 26.

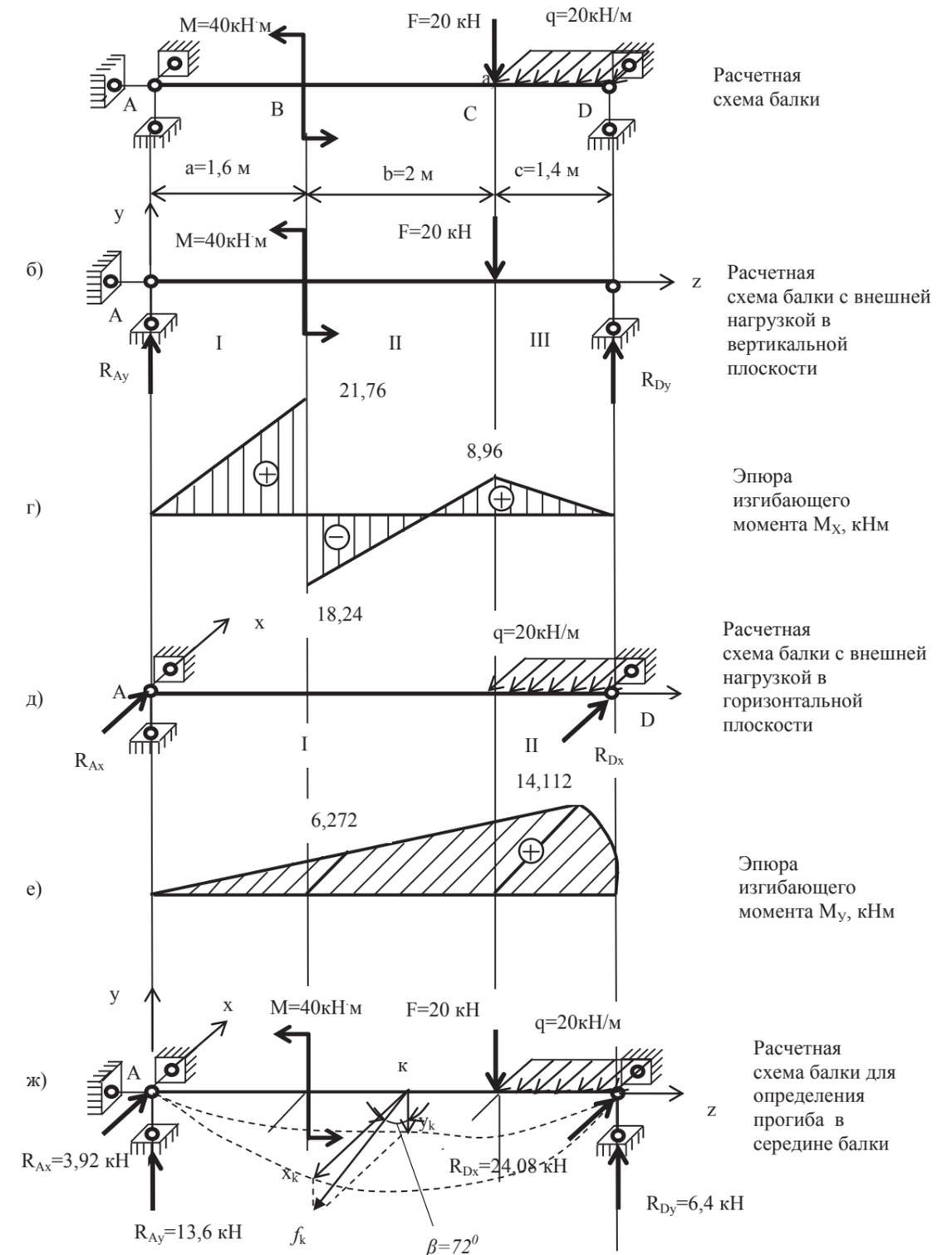
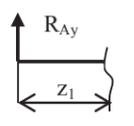
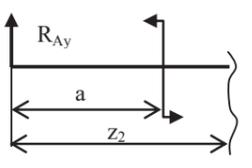
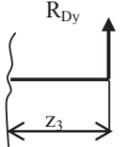


Рис. 111. Расчетные схемы и эпюры изгибающих моментов в горизонтальной и вертикальной плоскости

Расчет изгибающих моментов в вертикальной плоскости

№ участка	$\leq z \leq$	Уравнение изгибающих моментов в вертикальной плоскости
I	$0 \leq z_1 \leq 1,6$ м 	$M_{x1} = R_{Ay} \cdot z_1$; при $z_1 = 0$; $M_{x1} = 0$; при $z_1 = 1,6$ м; $M_{x1} = R_{Ay} \cdot 1,6 = 13,6 \cdot 1,6 = 21,76$ кН·м
II	$1,6 \leq z_2 \leq 3,6$ м 	$M_{x2} = -M + R_{Ay} \cdot z_2$; при $z_2 = 1,6$ м; $M_{x2} = -M + R_{Ay} \cdot 1,6 = -40 + 13,6 \cdot 1,6 = -18,24$ кН·м; при $z_2 = 2,6$ м; $M_{x2} = -M + R_{Ay} \cdot 3,6 = -40 + 13,6 \cdot 3,6 = 8,96$ кН·м
III	$0 \leq z_3 \leq 1,4$ м 	$M_{x3} = R_{Dy} \cdot z_3$; при $z_3 = 0$; $M_{x3} = 0$; при $z_3 = 1,4$ м; $M_{x3} = R_{Dy} \cdot 1,4 = 6,4 \cdot 1,4 = 8,96$ кН·м

По результатам расчетов строим эпюру изгибающих моментов M_x (рис. 111, в).

Строим эпюры изгибающих моментов в горизонтальной плоскости. Для этого изображаем расчетную схему балки с внешней нагрузкой в горизонтальной плоскости (рис. 111, г). Из уравнений равновесия определяем реакции опор R_{Ax} и R_{Dx} :

$$\sum m_A(F) = 0; \quad -q \cdot c \left(a + b + \frac{c}{2} \right) + R_{Dx}(a + b + c) = 0$$

$$R_{Dx} = \frac{q \cdot c \left(a + b + \frac{c}{2} \right)}{a + b + c} = \frac{20 \cdot 1,4 \cdot 4,3}{5} = 24,08 \text{ кН};$$

$$\sum m_D(F) = 0; \quad -R_{Ax}(a + b + c) + q \frac{c^2}{2} = 0$$

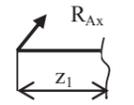
$$R_{Ax} = \frac{q \frac{c^2}{2}}{a + b + c} = \frac{20 \cdot \frac{1,4^2}{2}}{5} = 3,92 \text{ кН}.$$

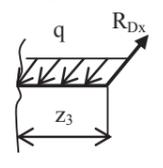
Проверка: $\Sigma F_x = 0$; $R_{Ax} - q \cdot c + R_{Dx} = 0$; $3,92 - 20 \cdot 1,4 + 24,08 = 0$.

Делим балку на участки и определяем изгибающий момент на каждом участке. Результаты расчетов сводим в таблицу 27.

Таблица 27

Расчет изгибающих моментов в горизонтальной плоскости

№ участка	$\leq z \leq$	Уравнение изгибающих моментов в горизонтальной плоскости
I	$0 \leq z_1 \leq 3,6$ м 	$M_{y1} = R_{Ax} \cdot z_1$; при $z_1 = 0$; $M_{y1} = 0$; при $z_1 = 3,6$ м; $M_{y1} = R_{Ax} \cdot 3,6 = 3,92 \cdot 3,6 = 14,112$ кН·м

№ участка	$\leq z \leq$	Уравнение изгибающих моментов в горизонтальной плоскости
II	$0 \leq z_2 \leq 1,4$ м 	$M_{y2} = R_{Dx} \cdot z_2 - \frac{q \cdot z_2^2}{2}$; при $z_2 = 0$; $M_{y2} = 0$; при $z_2 = 1,4$ м; $M_{y2} = R_{Dx} \cdot 1,4 - \frac{q \cdot 1,4^2}{2} =$ $= 24,08 \cdot 1,4 - \frac{20 \cdot 1,4^2}{2} = 14,112$ кН·м

По результатам расчетов строим эпюру изгибающих моментов M_y (рис. 111, е).

4. Находим размеры поперечного сечения балки из условия прочности при $[\sigma] = 12$ МПа. Для этого по эпюрам изгибающих моментов определяем предположительно опасные сечения. Ими являются сечения В и С.

Изгибающие моменты в сечении В: $M_{Bx} = 21,76$ кНм; $M_{By} = 6,272$ кНм.

Изгибающие моменты в сечении С: $M_{Cx} = 8,96$ кНм; $M_{Cy} = 14,112$ кНм.

Условие прочности для предположительно опасных сечений запишется в виде:

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma].$$

Учитывая, что $W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}$, а $W_y = \frac{h \cdot b^2}{6}$ и отношение $\frac{h}{b} = 1,5$, получим:

$$W_x = 0,375b^3; \quad W_y = 0,25b^3.$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{0,375b^3} + \frac{M_y}{0,25b^3} \leq [\sigma] \text{ откуда } b \geq \sqrt[3]{\frac{0,25M_x + 0,375M_y}{0,09375[\sigma]}}$$

Определяем размеры поперечного сечения балки в сечении В:

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{0,25M_x + 0,375M_y}{0,09375[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{0,25 \cdot 21,76 \cdot 10^3 + 0,375 \cdot 6,272 \cdot 10^3}{0,09375 \cdot 12 \cdot 10^6}} = 0,191 \text{ м} = 19,1 \text{ см}$$

$$h = 1,5b = 1,5 \cdot 19,1 = 28,65 \text{ см}.$$

Определяем размеры поперечного сечения балки в сечении С:

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{0,25M_x + 0,375M_y}{0,09375[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{0,25 \cdot 8,96 \cdot 10^3 + 0,375 \cdot 14,112 \cdot 10^3}{0,09375 \cdot 12 \cdot 10^6}} = 0,188 \text{ м} = 18,8 \text{ см}$$

$$h = 1,5b = 1,5 \cdot 18,8 = 28,2 \text{ см}.$$

Принимаем больший из размеров и по технологическим соображениям округляем до целых сантиметров в большую сторону. Окончательно имеем: $b \times h = 20 \times 30$ см.

5. Строим эпюру распределения нормальных напряжений в опасном сечении В.

Предварительно определяем отношение осевых моментов инерции сечения:

$$\frac{I_x}{I_y} = \frac{bh^3 \cdot 12}{12 \cdot hb^3} = \frac{h^2}{b^2} = \frac{30^2}{20^2} = 2,25.$$

Положение нулевой линии в сечении определится как:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{|M_y|}{|M_x|} \cdot \frac{I_x}{I_y} = \frac{8,96}{14,112} \cdot 2,25 = 1,439$$

Угол наклона нулевой линии к оси X составляет $\alpha_0 \cong 55^\circ$. Напряжения в опасных точках А и В поперечного сечения (рис. 111) равны:

$$\sigma_{\max/\min} = \pm \left(\frac{M_x}{0,375b^3} + \frac{M_y}{0,25b^3} \right) = \pm \left(\frac{21,76 \cdot 10^3}{0,375 \cdot 0,20^3} + \frac{6,272 \cdot 10^3}{0,25 \cdot 0,20^3} \right) = \pm 10,4 \text{ МПа}$$

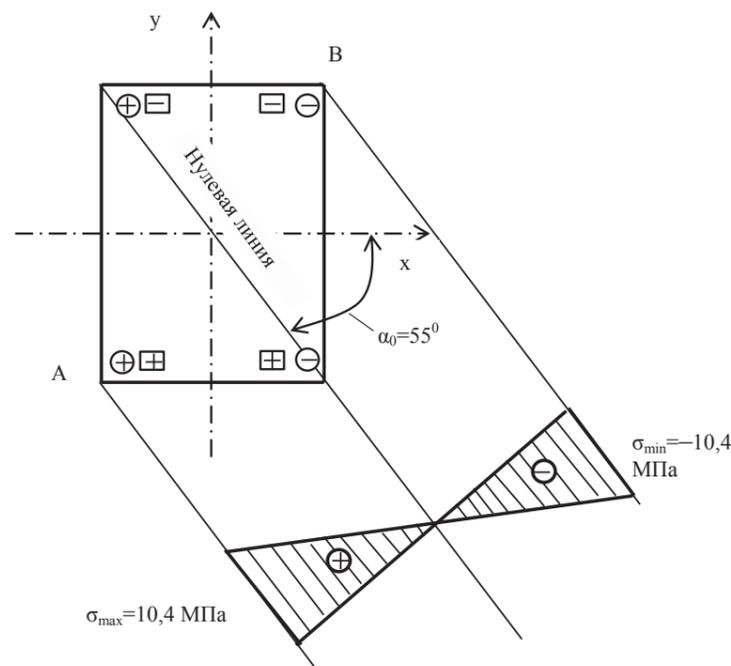


Рис. 112. Положение нулевой линии и распределение нормальных напряжений в поперечном сечении балки при косом изгибе

6. Определение полного прогиба балки в середине балки (рис. 111, ж; точка к) может быть выполнено по методу начальных параметров (или иным способом).

Определим прогиб в плоскости uoz методом начальных параметров. Уравнение прогибов запишется в виде: $EI_x u_k = EI_x u_0 + EI_x \varphi_0 \cdot z - \frac{M(z-1,6)^2}{2} + \frac{R_{Ay} \cdot z^3}{6} - \frac{F(z-3,6)^3}{6} + \frac{R_{Dy}(z-5)^3}{6}$;

где $EI_x u_0 = 0$, а $EI_x \varphi_0$ определится из условия: при $z = 5$ м; $EI_x u_D = 0$.

$$\begin{aligned} EI_x \varphi_0 &= \left(\frac{M(z-1,6)^2}{2} - \frac{R_{Ay} \cdot z^3}{6} + \frac{F(z-3,6)^3}{6} - \frac{R_{Dy}(z-5)^3}{6} \right) / z = \\ &= \left(\frac{40(5-1,6)^2}{2} - \frac{13,6 \cdot 5^3}{6} + \frac{20(5-3,6)^3}{6} - \frac{6,4(5-5)^3}{6} \right) / 5 = \\ &= \left(\frac{40 \cdot 3,4^2}{2} - \frac{13,6 \cdot 5^3}{6} + \frac{20 \cdot 1,4^3}{6} \right) / 5 = -8,598 \text{ кН} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

Тогда прогиб в точке к (u_k) определится при $z = 2,5$ м:

$$EI_x u_k = -8,598 \cdot z - \frac{M(z-1,6)^2}{2} + \frac{R_{Ay} \cdot z^3}{6} = -8,598 \cdot 2,5 - \frac{40(2,5-1,6)^2}{2} + \frac{13,6 \cdot 2,5^3}{6} = 2,28 \text{ кНм}^3.$$

$$\text{Откуда } u_k = -\frac{2,28 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^9 \cdot 0,00052} = -0,022 \text{ м.}$$

Определим прогиб в плоскости hoz методом начальных параметров. Уравнение прогибов запишется: $EI_y x_k = EI_y x_0 + EI_y \varphi_0 \cdot z + \frac{R_{Ax} \cdot z^3}{6} - \frac{q(z-3,6)^4}{24} + \frac{R_{Dx}(z-5)^3}{6}$;

где $EI_y x_0 = 0$, а $EI_y \varphi_0$ определится из условия: при $z = 5$ м; $EI_y x_D = 0$.

Откуда:

$$EI_y \varphi_0 = \frac{-\frac{R_{Ax} \cdot z^3}{6} + \frac{q(z-3,6)^4}{24}}{5} = \frac{-\frac{3,92 \cdot 5^3}{6} + \frac{20(5-3,6)^4}{24}}{5} = -15,69 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Тогда при $z = 2,5$ м величина прогиба точки к (x_k) балки в горизонтальной плоскости:

$$\begin{aligned} EI_y x_k &= -15,69 \cdot z + \frac{R_{Ax} \cdot z^3}{6} = -15,69 \cdot 2,5 + \frac{3,92 \cdot 2,5^3}{6} = -29,02 \text{ кН} \cdot \text{м}^3 \\ x_k &= -\frac{29,02 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^9 \cdot 0,000239} = -0,067 \text{ м} \end{aligned}$$

Полный прогиб в точке к (f_k) будет равен: $f_k = \sqrt{u_k^2 + x_k^2} = \sqrt{0,022^2 + 0,067^2} = 0,071 \text{ м.}$

Направление прогиба определится углом β : $\operatorname{tg} \beta = \frac{x_k}{u_k} = \left| \frac{0,067}{0,022} \right| = 3,045$; $\beta = 72^\circ$ (рис. 111, ж).

Расчетно-графическое задание № 10

К решению задачи следует приступить после изучения темы «Изгиб с кручением». Одновременное действие в поперечном сечении бруса изгибающего и крутящего момента приводит к возникновению в опасной точке нормальных и касательных напряжений, что характеризует плоское напряженное состояние. В этом случае оценку прочности бруса ведут по эквивалентным напряжениям с использованием теорий прочности. Наиболее часто используются следующие теории прочности:

1. Теория наибольших касательных напряжений (третья теория прочности). Применяется для материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_{\text{н}}^2 + 4\tau_{\text{к}}^2} \leq [\sigma].$$

2. Энергетическая теория прочности (четвертая теория прочности). Применяется для пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_{\text{н}}^2 + 3\tau_{\text{к}}^2} \leq [\sigma].$$

3. Теория прочности Мора. Применяется для материалов, неодинаково работающих на растяжение и сжатие, – легированная сталь, чугун и другие материалы:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{V}} = \frac{1-k}{2} \sigma_{\text{н}} + \frac{1+k}{2} \sqrt{\sigma_{\text{н}}^2 + 4\tau_{\text{к}}^2} \leq [\sigma],$$

где k – отношение предела прочности на растяжение к пределу прочности на сжатие.

Задача 10. Сложное сопротивление

Изогнутый стальной брус круглого поперечного сечения загружен системой сил в соответствии с рисунком 90. Проверить прочность бруса, используя третью теорию прочности, при $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Решение:

1. Выбираем по таблице и рисунку 90 исходные данные согласно варианту:

№ схемы	Длина участка бруса и его диаметр, м				Нагрузка, кН	
	a	b	c	d	F ₁	F ₂
1	0,5	0,4	0,5	0,15	20	5

2. На отдельной странице чертим заданную систему (рис. 113, а) и расчетную схему с указанием исходных данных (рис. 113, б).

3. Для определения внутренних силовых факторов и построения их эпюр делим брус на участки. Границами участков являются точки приложения сил и сосредоточенных моментов, начало и конец действия распределенной нагрузки, сечения, где изменяется направление бруса. Исходя из этих условий, брус имеет два участка.

Внутренние силовые факторы определяем методом сечений. Для составления уравнений равновесия воспользуемся методом местных координат, при этом ось z направлена от сечения и перпендикулярно сечению, оси x и y расположены в плоскости сечения, причем ось x направлена таким образом, что ее поворот на угол 90° против часовой стрелки совпадет с осью y. За положительные направления продольных и поперечных сил принимаем их совпадение с направлением осей, а за положительные направления изгибающих моментов и крутящих моментов – их действие против часовой стрелки.

Результаты расчетов сводим в таблицу 25. По результатам расчетов строим эпюры внутренних силовых факторов (рис. 113 в–е). Эпюры изгибающих моментов строим на растянутых волокнах балки.

Таблица 28

Определение внутренних силовых факторов

№ участка	$z \leq$	Уравнение равновесия
I	$0 \leq z_1 \leq 0,5 \text{ м}$	$\sum F_{z1} = 0; N_1 + F_1 = 0; N_1 = -F_1 = -20 \text{ кН.}$ $\sum F_{y1} = 0; Q_{y1} - F_2 = 0; Q_{y1} = F_2 = 5 \text{ кН.}$ $\sum m_x(F) = 0; M_{x1} - F_2 \cdot z_1 = 0; M_{x1} = F_2 \cdot z_1.$ При $z_1 = 0 \text{ м}; M_{x1} = 0;$ При $z_1 = 0,5 \text{ м}; M_{x1} = F_2 \cdot 0,5 = 5 \cdot 0,5 = 2,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$
II	$0 \leq z_2 \leq 0,9 \text{ м}$	$\sum F_{z2} = 0; N_2 + 30F_1 = 0; N_2 = -30F_1 = -600 \text{ кН.}$ $\sum F_{y2} = 0; Q_{y2} - F_2 = 0; Q_{y2} = F_2 = 5 \text{ кН.}$ $\sum F_{x2} = 0; Q_{x2} + F_1 = 0; Q_{x2} = -F_1 = -20 \text{ кН.}$ $\sum m_{z2}(F) = 0; M_k + F_2 \cdot c = 0; M_k = -F_2 \cdot c = -5 \cdot 0,5 = -2,5 \text{ кН} \cdot \text{м.}$ $\sum m_{y2}(F) = 0; M_{y2} - F_1 \cdot z_2 = 0; M_{y2} = F_1 \cdot z_2;$ При $z_2 = 0; M_{y2} = 0;$ При $z_2 = 0,9 \text{ м}; M_{y2} = F_1 \cdot 0,9 = 20 \cdot 0,9 = 18 \text{ кН} \cdot \text{м.}$ $\sum m_{x2}(F) = 0; M_{x2} - F_2 \cdot z_2 = 0; M_{x2} = F_2 \cdot z_2;$ При $z_2 = 0; M_{x2} = 0;$ При $z_2 = 0,9 \text{ м}; M_{x2} = F_2 \cdot 0,9 = 5 \cdot 0,9 = 4,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$

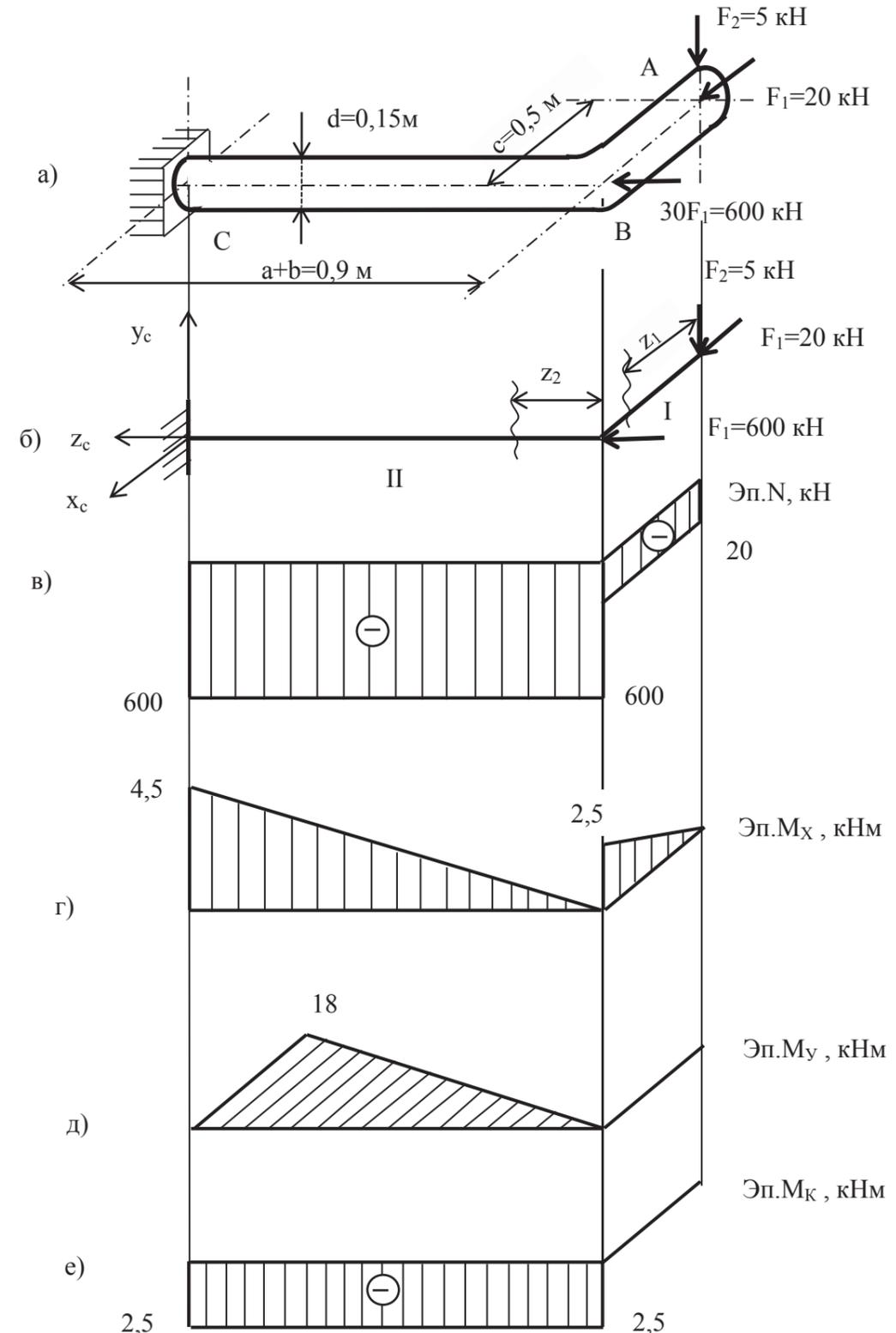


Рис. 113. Расчетные схемы и эпюры внутренних силовых факторов при сложном сопротивлении

По результатам расчетов строим эпюры внутренних силовых факторов (рис. 113 в – е). Эпюры изгибающих моментов M_x и M_y строим на растянутых волокнах балки, поэтому знак эпюры не указываем. В рассматриваемом задании влияние поперечных сил Q_x и Q_y не

учитываем ввиду их малой величины, поэтому эпюры Q_x и Q_y не приводятся.

Определяем опасное сечение. Им является сечение С, заделка балки, так как в этом сечении внутренние силовые факторы имеют наибольшие значения. Продольная сила $N = 600$ кН, крутящий момент $M_k = 2,5$ кНм, изгибающие моменты $M_x = 4,5$ кНм, $M_y = 18$ кНм. Результирующий изгибающий момент для круглого сечения определим из выражения:

$$M_{изг} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{4,5^2 + 18^2} = 18,55 \text{ кНм.}$$

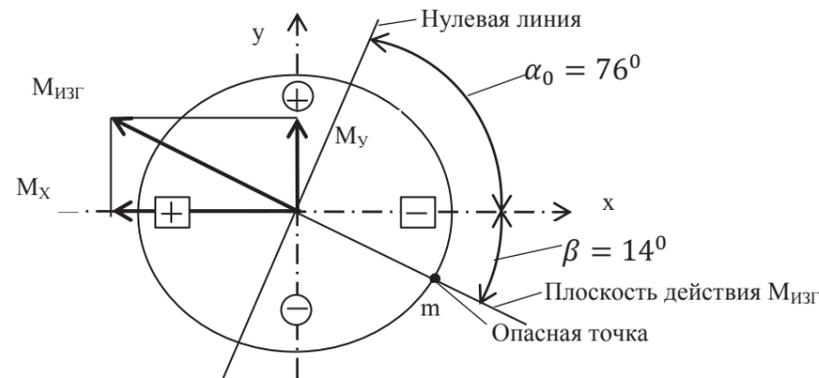


Рис. 114. Опасное сечение и опасная точка поперечного сечения

Положение нулевой линии в сечении определится как:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{|M_y|}{|M_x|} \cdot \frac{I_x}{I_y} = \frac{18}{4,5} \cdot 1 = 4; \quad \alpha_0 = \operatorname{arctg} 4 \cong 76^\circ.$$

Плоскость действия изгибающего момента $M_{изг}$ проходит через центр тяжести сечения, и его положение определяется углом $\beta = 90^\circ - \alpha_0 = 90^\circ - 76^\circ = 14^\circ$ (рис. 114).

В опасной точке m действуют нормальные напряжения от изгибающего момента $M_{изг}$:

$$\sigma_M = -\frac{M_{изг}}{W_x} = -\frac{M_{изг}}{0,1d^3} = -\frac{18,55 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 0,15^3} = -55 \text{ МПа.}$$

Нормальные напряжения от продольной силы N :

$$\sigma_N = -\frac{N}{A} = -\frac{4 \cdot N}{\pi \cdot d^2} = -\frac{4 \cdot 600 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 0,15^2} = -34 \text{ МПа.}$$

Касательные напряжения от крутящего момента M_k :

$$\tau_K = \frac{\hat{M}_K}{W_\rho} = \frac{M_K}{0,2 \cdot d^3} = \frac{2,5 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 0,15^3} = 3,7 \text{ МПа.}$$

Полное нормальное напряжение в точке m составит:

$$\sigma = \sigma_M + \sigma_N = -55 - 34 = -89 \text{ МПа.}$$

4. Проверяем прочность бруса по теории наибольших касательных напряжений:

$$\sigma_{экв}^{III} = \sqrt{\sigma_n^2 + 4\tau_K^2} = \sqrt{89^2 + 4 \cdot 3,7^2} = 89,31 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

Прочность бруса обеспечена.

Расчетно-графическое задание № 11

К решению задачи следует приступить после изучения темы «Продольный изгиб, расчеты сжатых стержней на устойчивость».

Наибольшая величина сжимающей силы, при превышении которой стержень теряет устойчивость, называется критической $F_{кр}$. Для оценки сжатых стержней введена безразмерная характеристика – гибкость $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i}$. Чем больше гибкость, тем при меньшем значении сжимающей силы стержень теряет устойчивость. Отношение критической силы к площади поперечного сечения стержня называется критическим напряжением $\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A}$.

При критических напряжениях, не превышающих предела пропорциональности материала $\sigma_{пц}$, критическую силу определяют по формуле Эйлера, в этом случае гибкость стержня $\lambda_{ст}$ выше предельной $\lambda \geq \lambda_{кр}$; $F_{кр} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{(\mu l)^2}$.

При критических напряжениях, превышающих предел пропорциональности материала стержня, критическую силу вычисляют по формуле Ясинского, гибкость лежит в пределах $\lambda_{кр} < \lambda_{ст} \leq \lambda_{пц}$; $F_{кр} = A(\alpha - b\lambda)$.

Для коротких массивных стержней с гибкостью $\lambda < (30 \dots 40)$ потеря устойчивости не происходит, и условно принимают, что напряжения в стержне равны пределу текучести материала, а критическую силу в этом случае определяют $F_{кр} = A \cdot \sigma_T$.

Для сжатых стержней должно выполняться условие устойчивости $\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi[\sigma]$,

где φ – коэффициент продольного изгиба, зависит от гибкости материала стержня. Его величина меньше единицы и находится из справочных таблиц (приложение 2).

Задача 11. Расчеты на устойчивость

Для центрально сжатой стальной стойки, закрепленной в соответствии с рисунком 90, таблицей 11, принимая $[\sigma] = 160$ МПа, требуется:

1. Определить грузоподъемность $[F]$ стойки из условия устойчивости, имеющей двутавровое поперечное сечение.

2. Найти критическую силу $F_{кр}$ и коэффициент запаса устойчивости.

3. Загружая стойку нагрузкой $[F]$, определенной в пункте 1, подобрать поперечное сечение в виде кольца с соотношением внутреннего и наружного диаметра α .

Решение:

1. Выбираем по таблице и рисунку 91 исходные данные согласно варианту:

№ схемы	Номер двутавра	Отношение диаметров, α	Длина стойки, м
1	24	0,70	2,4

2. Изображаем схемы и способы крепления концов стержня, имеющего двутавровое поперечное сечение (рис. 115).

Учитывая характер закрепления концов стержня, устанавливаем коэффициенты приведения длины при возможной потере устойчивости стержня (рис. 115): в плоскости yOz берем $\mu_x = 0,5$, в плоскости xOz берем $\mu_y = 0,7$.

Грузоподъемность $[F]$ стойки из условия устойчивости определяем по формуле, применяемой

для практических расчетов на устойчивость: $\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi[\sigma]$. Тогда грузоподъемность $[F] \leq \varphi \cdot A[\sigma]$

стойки, где A – площадь поперечного сечения стержня; φ – коэффициент продольного изгиба, зависящий от гибкости стержня.

Определим гибкость в главных плоскостях стержня. Геометрические характеристики двутавра № 24 ГОСТ 8239-89: площадь $A = 34,8$ см²; радиусы инерции $i_x = 9,97$ см, $i_y = 2,37$ см (приложение 1).

$$\text{Тогда гибкость } \lambda_x = \frac{\mu_x \cdot l}{i_x} = \frac{0,5 \cdot 2,4}{9,97 \cdot 10^{-2}} = 12,04; \quad \lambda_y = \frac{\mu_y \cdot l}{i_y} = \frac{0,7 \cdot 2,4}{2,37 \cdot 10^{-2}} = 70,89.$$

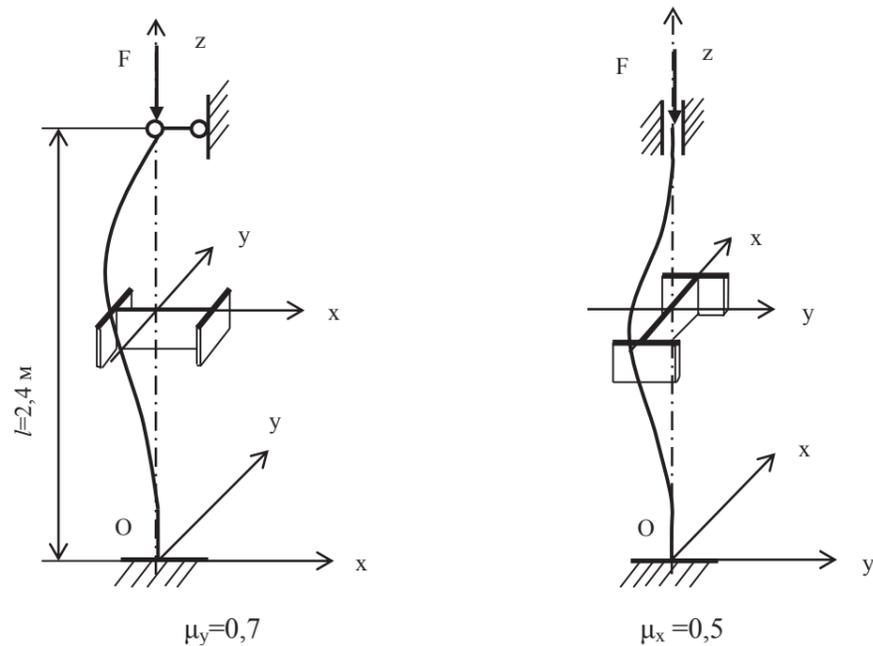


Рис. 115. Расчетные схемы и способы крепления концов стержня

Определяем допустимое значение нагрузки [F] по наибольшей гибкости. По таблице коэффициентов φ (приложение 2) путем линейной интерполяции определяем $\varphi_{ст}$ при $\lambda_y = 70,89$ (рис. 116).

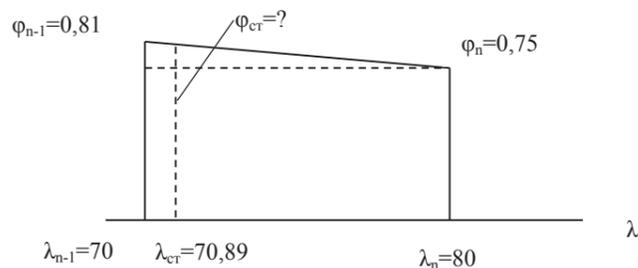


Рис. 116. Линейная интерполяция определения коэффициента φ

$$\varphi_{ст} = \varphi_n + \frac{\varphi_{n-1} - \varphi_n}{\lambda_n - \lambda_{ст}} (\lambda_n - \lambda_{ст}) = 0,75 + \frac{0,81 - 0,75}{10} (80 - 70,89) = 0,805.$$

Откуда $[F] \leq \varphi \cdot A[\sigma] = 0,805 \cdot 34,8 \cdot 10^{-4} \cdot 160 \cdot 10^6 = 448,22$ кН.

3. Находим критическую силу $F_{кр}$ и коэффициент запаса устойчивости из условия, что наибольшая гибкость стойки меньше критического значения $\lambda_{ст} < \lambda_{кр}$, а значит, критическую силу определяем по формуле Ясинского:

$$F_{кр} = (a - b\lambda)A = (310 - 1,14 \cdot 70,89) \cdot 10^6 \cdot 34,8 \cdot 10^{-4} = 797,57 \text{ кН.}$$

$$\text{Коэффициент запаса устойчивости: } k_{уст} = \frac{F_{кр}}{[F]} = \frac{797,57}{448,22} = 1,8.$$

4. Загружая стойку нагрузкой [F] = 448,22 кН, подберем поперечное сечение в виде кольца с соотношением внутреннего и наружного диаметра $\alpha = 0,7$ (стальная труба). Определим геометрические характеристики кольцевого сечения при $\alpha = \frac{d}{D} = 0,7$ (рис. 117).

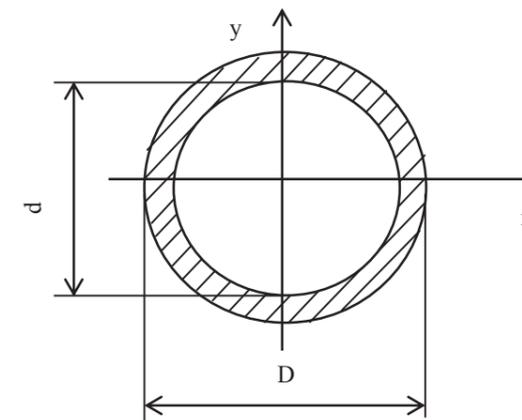


Рис. 117. Кольцевое поперечное сечение трубчатой стойки

$$\text{Площадь поперечного сечения } A = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi D^2}{4} (1 - \alpha^2) = \frac{3,14 \cdot D^2}{4} (1 - 0,7^2) = 0,4D^2, \\ \text{откуда } D = \sqrt{\frac{A}{0,4}} = 1,58\sqrt{A}.$$

$$\text{Осевой момент инерции: } I_x = I_y = I = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4) = \frac{3,14 \cdot D^4}{64} (1 - 0,7^4) = 0,0373D^4.$$

$$\text{Радиус инерции: } i_x = i_y = i = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{0,0373D^4}{0,4D^2}} = 0,305D.$$

Из условия устойчивости $\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi[\sigma]$ получим, что $A \geq \frac{F}{\varphi[\sigma]}$. В этой формуле две неизвестных: коэффициент продольного изгиба φ и площадь поперечного сечения A , поэтому задачу решаем методом последовательного приближения.

Для первого приближения примем $F = [F] = 448,22$ кН, $\varphi_0 = 1$, $[\sigma] = 160$ МПа.

$$\text{Тогда } A_0 \geq \frac{F}{\varphi[\sigma]} = \frac{448,22 \cdot 10^3}{1 \cdot 160 \cdot 10^6} = 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2. \text{ Радиус инерции: } i = 0,305D = 0,305 \cdot 1,58 \sqrt{A} = \\ = 0,4819\sqrt{2,8 \cdot 10^{-3}} = 0,0255 \text{ м; гибкость стержня: } \lambda_0 = \frac{\mu \cdot l}{i_x} = \frac{0,7 \cdot 2,4}{0,0255} = 65,88; \text{ коэффициент}$$

$$\text{продольного изгиба: } \varphi_1 = \varphi_n + \frac{\varphi_{n-1} - \varphi_n}{10} (\lambda_n - \lambda_{ст}) = 0,81 + \frac{0,86 - 0,81}{10} (70 - 65,88) = 0,8306.$$

$$\text{Условие устойчивости: } \sigma = \frac{F}{\varphi_1 A} = \frac{448,22 \cdot 10^3}{0,8306 \cdot 2,8 \cdot 10^{-3}} = 192,73 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа} \text{ не выпол-}$$

няется.

Выполняем второе приближение. Принимаем коэффициент продольного изгиба:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} = \frac{1 + 0,8306}{2} = 0,9153.$$

$$\text{Площадь поперечного сечения: } A_1 \geq \frac{F}{\varphi_2[\sigma]} = \frac{448,22 \cdot 10^3}{0,9153 \cdot 160 \cdot 10^6} = 3,06 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

$$\text{Радиус инерции: } i = 0,4819\sqrt{A} = 0,4819\sqrt{3,06 \cdot 10^{-3}} = 0,0267 \text{ м.}$$

$$\text{Гибкость стержня: } \lambda_1 = \frac{\mu \cdot l}{i_x} = \frac{0,7 \cdot 2,4}{0,0267} = 62,92; \text{ коэффициент продольного изгиба: } \varphi_3 = \varphi_1 +$$

$$\frac{\varphi_{n-1} - \varphi_n}{10} (\lambda_n - \lambda_{ст}) = 0,81 + \frac{0,86 - 0,81}{10} (70 - 62,92) = 0,8454.$$

$$\text{Условие устойчивости: } \sigma = \frac{F}{\varphi_3 A} = \frac{448,22 \cdot 10^3}{0,8454 \cdot 3,06 \cdot 10^{-3}} = 173,26 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа} \text{ не вы-}$$

полняется.

Выполняем третье приближение. Принимаем коэффициент продольного изгиба:

$$\varphi_4 = \frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2} = \frac{0,9153 + 0,8454}{2} = 0,8804.$$

$$\text{Площадь поперечного сечения: } A_2 \geq \frac{F}{\varphi_4 [\sigma]} = \frac{448,22 \cdot 10^3}{0,8804 \cdot 160 \cdot 10^6} = 3,18 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

$$\text{Радиус инерции: } i = 0,4819 \sqrt{A} = 0,4819 \sqrt{3,18 \cdot 10^{-3}} = 0,0272 \text{ м.}$$

$$\text{Гибкость стержня: } \lambda_2 = \frac{\mu \cdot l}{i_x} = \frac{0,7 \cdot 2,4}{0,0272} = 61,76; \text{ коэффициент продольного изгиба:}$$

$$\varphi_5 = \varphi_n + \frac{\varphi_{n-1} - \varphi_n}{10} (\lambda_n - \lambda_{\text{кр}}) = 0,81 + \frac{0,86 - 0,81}{10} (70 - 61,76) = 0,8512.$$

$$\text{Условие устойчивости: } \sigma = \frac{F}{\varphi_5 A} = \frac{448,22 \cdot 10^3}{0,8512 \cdot 3,18 \cdot 10^{-3}} = 165,6 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

$$\text{Перегруз составляет } \Delta = \frac{\sigma - [\sigma]}{[\sigma]} 100\% = \frac{165,6 - 160}{160} 100\% = 3,5\% < 5\%, \text{ что допустимо.}$$

Принимаем окончательные размеры поперечного сечения трубчатой стойки.

Диаметр поперечного сечения стойки равен $D = 1,58 \sqrt{A} = 1,58 \sqrt{3,18 \cdot 10^{-3}} = 0,089 \text{ м}$.
Округляем диаметр до $D = 0,09 \text{ м} = 90 \text{ мм}$. Тогда $d = 0,7D = 0,7 \cdot 0,09 = 0,063 \text{ м}$.

$$\text{Площадь поперечного сечения: } A = 0,4 D^2 = 0,4 \cdot 0,09^2 = 0,0324 \text{ м}^2.$$

$$\text{Радиус инерции: } i = 0,4819 \sqrt{A} = 0,4819 \sqrt{0,0324} = 0,0274 \text{ м.}$$

$$\text{Гибкость стержня: } \lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_x} = \frac{0,7 \cdot 2,4}{0,0274} = 61,31; \text{ коэффициент продольного изгиба:}$$

$$\varphi_5 = \varphi_n + \frac{\varphi_{n-1} - \varphi_n}{10} (\lambda_n - \lambda_{\text{кр}}) = 0,81 + \frac{0,86 - 0,81}{10} (70 - 61,31) = 0,8535.$$

$$\text{Напряжения в стержне равны } \sigma = \frac{F}{\varphi A} = \frac{448,22 \cdot 10^3}{0,8535 \cdot 0,0324} = 162 \text{ МПа.}$$

$$\text{Перегруз составляет } \Delta = \frac{\sigma - [\sigma]}{[\sigma]} 100\% = \frac{162 - 160}{160} 100\% = 1,25\% < 5\%, \text{ что допустимо.}$$

Окончательно принимаем стойку с поперечным сечением $D = 0,09 \text{ м}$, $d = 0,063 \text{ м}$.

Определим коэффициент запаса устойчивости для этой стойки. Так как $\lambda_{\text{кр}} = 61,31$, то критическую силу определим по формуле Ясинского:

$$F_{\text{кр}} = (a - b\lambda)A = (310 - 1,14 \cdot 61,31) \cdot 10^6 \cdot 0,0324 = 777,95 \text{ кН.}$$

$$\text{Таким образом, коэффициент запаса устойчивости: } k_{\text{уст}} = \frac{F_{\text{кр}}}{[F]} = \frac{777,95}{448,22} = 1,73.$$

Отсюда видно, что применение трубчатой стойки в сравнении с одиночным двутавром в условиях одинаковой нагрузки и способа крепления привело к снижению коэффициента запаса устойчивости.

Расчетно-графическое задание № 12

К решению задачи следует приступить после изучения темы «Ударное действие нагрузки».

При расчетах на ударное действие нагрузки следует учитывать, что материал бруса при ударе испытывает напряжения, не превышающие предела пропорциональности $\sigma_{\text{пц}}$, вся работа груза, совершенная на пути $h + \delta_d$, переходит во внутреннюю потенциальную энергию деформации бруса. В этом случае динамическое перемещение будет равно $\delta_d = k_d \cdot \delta_{\text{ст}}$, а динамическое напряжение $\sigma_d = k_d \cdot \sigma_{\text{ст}}$, где h – высота падения груза; $\delta_{\text{ст}}$ – перемещение точки, на которую падает груз от статического приложения веса падающего груза; $\sigma_{\text{ст}}$ – нормальные напряжения в сечении от статического приложения веса падающего груза; k_d – динамический коэффициент: $k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{\text{ст}}}}$.

Задача 12. Расчеты на ударную нагрузку.

Груз массой m падает с высоты h на двутавровую стальную балку (рис. 92, табл. 12). Проверить прочность балки при $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Решение:

1. Выбираем по таблице и рисунку 92 исходные данные согласно варианту:

№ схемы	Длина участка балки, м			Номер двутавра	m, кг	h, см
	a	b	c			
1	0,5	0,4	0,5	24	100	4

2. Выписываем, согласно сортаменту «Двутавры стальные горячекатаные» ГОСТ 8239-89, геометрические характеристики двутавра № 24: $A = 34,8 \text{ см}^2$; $I_x = 3460 \text{ см}^4$; $W_x = 289 \text{ см}^3$.

Изображаем расчетную схему согласно варианту (рис. 118 а).

Прикладываем к балке груз массой $m = 100 \text{ кг}$ в виде статической нагрузки. Тогда вес груза равен $G = mg = 100 \cdot 9,87 = 987 \text{ Н}$ (рис. 118, б).

Из уравнений равновесия балки определяем реакции опор балки:

$$\begin{aligned} \sum m_A(F) = 0; \quad G \cdot a + R_B(b + c) &= 0 \\ R_B = -\frac{G \cdot a}{b + c} = -\frac{987 \cdot 0,5}{0,4 + 0,5} &= -548,3 \text{ Н}; \\ \sum m_B(F) = 0; \quad G(a + b + c) - R_A(b + c) &= 0 \\ R_A = \frac{G(a + b + c)}{b + c} = \frac{987 \cdot 1,4}{0,9} &= 1535,3 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0; \quad R_A - G + R_B &= 0; \\ 1535,3 - 987 - 548,3 &= 0 \end{aligned}$$

Реакции опор R_A и R_B определены верно.

Учитывая, что балка имеет два участка, изгибающий момент на первом участке равен:

$$M_{F1} = -G \cdot z_1; \quad 0 \leq z \leq 0,5 \text{ м.}$$

При $z = 0$; $M_{F1} = 0$; при $z = 0,5 \text{ м}$; $M_{F1} = -G \cdot 0,5 = -987 \cdot 0,5 = -493,5 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Изгибающий момент на втором участке равен:

$$M_{F2} = -R_B \cdot z_2; \quad 0 \leq z \leq 0,9 \text{ м.}$$

При $z = 0$; $M_{F2} = 0$; при $z = 0,9 \text{ м}$; $M_{F2} = -R_B \cdot 0,9 = -548 \cdot 0,9 = -493,5 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

По полученным значениям строим эпюру изгибающих моментов M_F от внешней нагрузки (рис. 118, в). Эпюру строим на растянутых волокнах балки.

Прикладываем к балке в сечении, где прикладывали к балке груз, единичную силу $F = 1$ (рис. 118, г). Определяем из уравнений равновесия реакции опор балки:

$$\begin{aligned} \sum m_A(F) = 0; \quad 1 \cdot a - R_B(b + c) &= 0 \\ R_B = \frac{1 \cdot a}{b + c} = \frac{0,5}{0,9} &= 0,56; \\ \sum m_B(F) = 0; \quad 1(a + b + c) - R_A(b + c) &= 0 \\ R_A = \frac{1(a + b + c)}{b + c} = \frac{1,4}{0,9} &= 1,56. \end{aligned}$$

Делаем проверку.

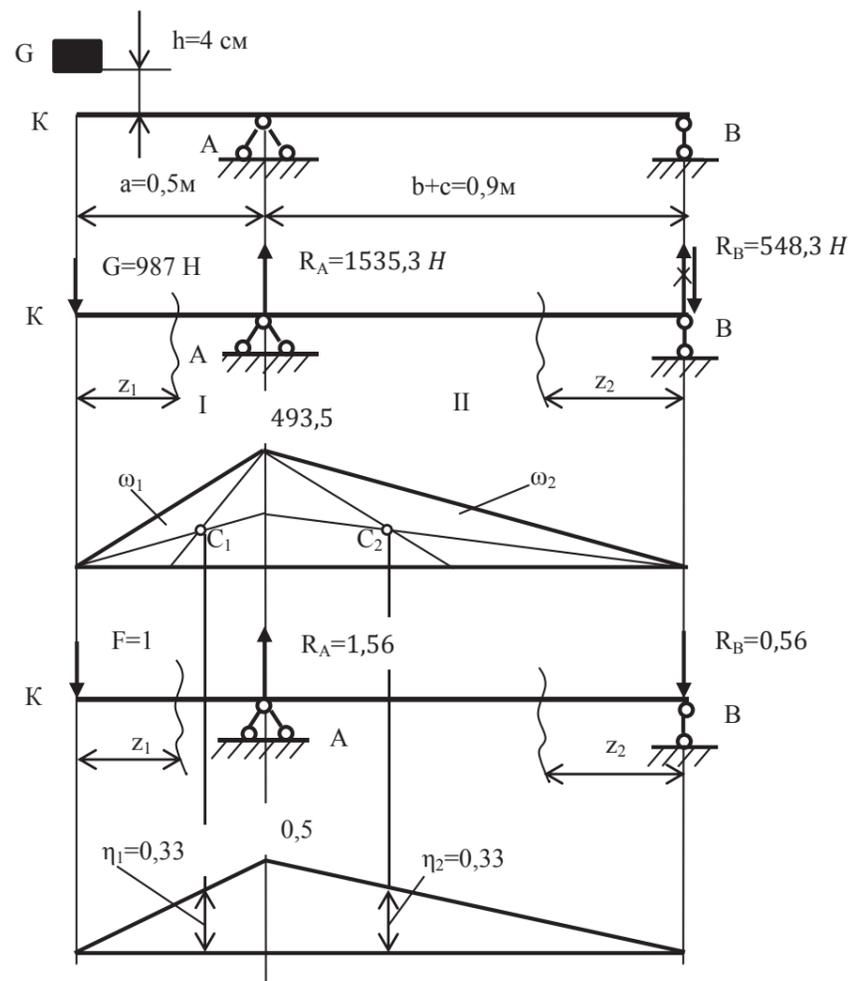


Рис. 118. Расчетная схема и эпюры изгибающих моментов

$$\sum F_y = 0; R_A - 1 + R_B = 0;$$

$$1,56 - 1 - 0,56 = 0.$$

Реакции опор R_A и R_B определены верно. Изгибающий момент на первом участке будет равен:

$$M_1 = -1 \cdot z_1; 0 \leq z_1 \leq 0,5 \text{ м.}$$

При $z = 0$; $M_1 = 0$; при $z = 0,5$ м; $M_1 = -1 \cdot 0,5 = -0,5$.

Изгибающий момент на втором участке будет равен:

$$M_2 = -R_B \cdot z_2; 0 \leq z_2 \leq 0,9 \text{ м.}$$

При $z = 0$; $M_2 = 0$; при $z = 0,9$ м; $M_2 = -0,56 \cdot 0,9 = -0,5$.

По полученным значениям строим эпюру изгибающих моментов единичной силы (рис. 118, д).

Эпюру строим на растянутых волокнах балки.

Определяем величину статического прогиба балки в сечении падения груза путем перемножения эпюр с использованием правила Верещагина:

$$\delta_{ст} = M_F x M_1 = \frac{1}{EI_x} \sum \omega_i \cdot \eta_j = \frac{1}{EI_x} (\omega_1 \cdot \eta_1 + \omega_2 \cdot \eta_2) =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} (0,5 \cdot 493,5 \cdot 0,5 \cdot 0,33 + 0,5 \cdot 493,5 \cdot 0,9 \cdot 0,33) = 3,3 \cdot 10^{-5} \text{ м,}$$

где ω_1 и ω_2 – площади эпюры моментов от заданной нагрузки, определяются как площади треу-

гольников; η_1 и η_2 – ординаты эпюры от единичной силы, взятые под центрами тяжести ω_1 и ω_2 .
Определяем динамический коэффициент:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,04}{3,3 \cdot 10^{-5}}} = 50,24.$$

3. Определяем величину динамического прогиба:

$$\delta_d = k_d \cdot \delta_{ст} = 50,24 \cdot 3,3 \cdot 10^{-5} = 1,66 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

4. Проверяем прочность балки. При статическом нагружении балки напряжения в опасном сечении под опорой А будут равны $\sigma_{ст} = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{493,5}{289 \cdot 10^{-6}} = 1,7 \text{ МПа.}$

Напряжение при динамическом нагружении балки будет равно:

$$\sigma_d = k_d \cdot \sigma_{ст} = 50,24 \cdot 1,7 = 85,79 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

Значит, условие прочности балки выполняется.

Расчетно-графическое задание № 13

К решению задачи следует приступить после изучения темы «Прочность при переменных и динамических нагрузках».

При решении задач, представляющих систему с одной степенью свободы, совершающей свободные и вынужденные колебания под действием вибрационной нагрузки, необходимо проверить систему на резонанс. Резонанс возникает при совпадении частот свободных и вынужденных колебаний, тогда динамический коэффициент k_d стремится к бесконечно большому значению.

Зоне резонанса соответствует отношение $\frac{\theta}{\omega} = 0,8 \dots 1,2$ и не допускается в конструкциях и машинах. Динамический коэффициент определяется по формуле:

$$k_d = 1 + \beta \frac{H}{G},$$

где β – коэффициент нарастания колебаний $|\beta| = \frac{1}{1 - (\frac{\theta}{\omega})^2}$,

где θ – частота вынужденных колебаний, определяется $\theta = \frac{\pi \cdot n}{30}$;

ω – частота свободных колебаний $\omega = \sqrt{\frac{1}{M \cdot \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{ст}}}$,

где n – частота вращения неуравновешенной массы; M – масса; δ_{11} – перемещение точки, где находится масса, от единичной силы (податливость системы); g – ускорение свободного падения; $\delta_{ст}$ – перемещение точки, где находится масса, от веса этой массы; H – вес вращающихся неуравновешенных частей.

Динамические перемещения определяются: $\delta_d = \delta_{ст} \cdot k_d$, а динамические напряжения: $\sigma_d = \sigma_{ст} \cdot k_d$.

Задача 13. Расчеты на вибрационную нагрузку

Электромотор массой M установлен на стальной двутавровой балке. Частота вращения ротора мотора – n , масса вращающихся неуравновешенных частей – m , эксцентриситет – e (рис. 93, табл. 13).

Пренебрегая массой балки, требуется:

1. Проверить балку на резонанс.
2. Проверить прочность балки при $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Решение:

1. Выбираем по таблице и рисунку 93 исходные данные согласно варианту:

№ схемы	Номер двутавра	Длина участка балки, м			M, кг	m, кг	n, об/мин	e, м
		a	b	c				
1	24	0,5	1,1	0,9	400	50	500	0,1

2. Выписываем, согласно сортаменту «Двутавры стальные горячекатаные» ГОСТ 8239-89, геометрические характеристики двутавра № 24: $A = 34,8 \text{ см}^2$; $I_x = 3460 \text{ см}^4$; $W_x = 289 \text{ см}^3$.

Изображаем расчетную схему согласно варианту (рис. 119 а).

Прикладываем к балке груз массой $M = 400 \text{ кг}$ в виде статической нагрузки. Тогда вес груза равен $G = mg = 400 \cdot 9,87 = 3948 \text{ Н}$ (рис. 119, б).

Из уравнений равновесия балки определяем реакции опор балки:

$$\sum m_A(F) = 0; \quad G \cdot a - R_B(b + c) = 0$$

$$R_B = \frac{G \cdot a}{b + c} = \frac{3948 \cdot 0,5}{2} = 987 \text{ Н};$$

$$\sum m_B(F) = 0; \quad G(a + b + c) - R_A(b + c) = 0$$

$$R_A = \frac{G(a + b + c)}{b + c} = \frac{3948 \cdot 2,5}{2} = 4935 \text{ Н}.$$

Проверка:

$$\sum F_y = 0; \quad R_A - G - R_B = 0;$$

$$4935 - 3948 - 987 = 0.$$

Реакции опор R_A и R_B определены верно.

Учитывая, что балка имеет два участка, изгибающий момент на первом участке равен:

$$M_{F1} = -G \cdot z_1; \quad 0 \leq z_1 \leq 0,5 \text{ м.}$$

При $z = 0$; $M_{F1} = 0$; при $z = 0,5 \text{ м}$; $M_{F1} = -G \cdot 0,5 = -3948 \cdot 0,5 = -1974 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Изгибающий момент на втором участке равен:

$$M_{F1} = -R_B \cdot z_2; \quad 0 \leq z_2 \leq 2 \text{ м.}$$

При $z = 0$; $M_{F2} = 0$; при $z = 2 \text{ м}$; $M_{F2} = -R_B \cdot 0,9 = -987 \cdot 2 = -1974 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

По полученным значениям строим эпюру изгибающих моментов M_F от внешней нагрузки (рис. 119, в). Эпюру строим на растянутых волокнах балки.

Прикладываем к балке в сечении, где расположен электродвигатель массой M , единичную силу $F = 1$ (рис. 119, г). Определяем из уравнений равновесия реакции опор балки:

$$\sum m_A(F) = 0; \quad 1 \cdot a - R_B(b + c) = 0$$

$$R_B = \frac{1 \cdot a}{b + c} = \frac{0,5}{2} = 0,25;$$

$$\sum m_B(F) = 0; \quad 1(a + b + c) - R_A(b + c) = 0$$

$$R_A = \frac{1(a + b + c)}{b + c} = \frac{2,5}{2} = 1,25.$$

Делаем проверку:

$$\sum F_y = 0; \quad R_A - 1 + R_B = 0;$$

$$1,25 - 1 - 0,25 = 0.$$

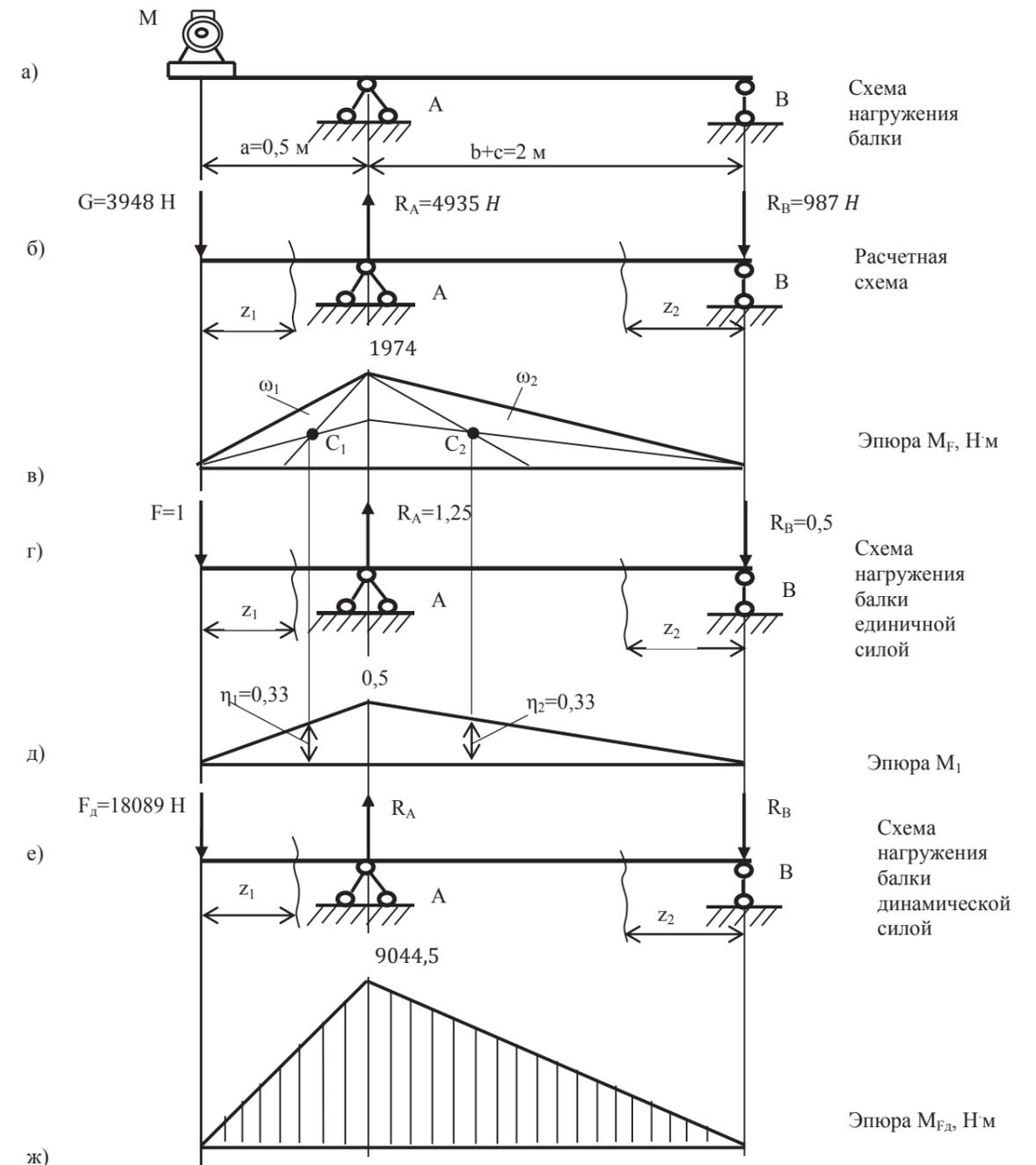


Рис. 119. Расчетная схема и эпюры изгибающих моментов

Реакции опор R_A и R_B определены верно. Изгибающий момент на первом участке будет равен:

$$M_1 = -1 \cdot z_1; \quad 0 \leq z_1 \leq 0,5 \text{ м.}$$

При $z = 0$; $M_{F1} = 0$; при $z = 0,5 \text{ м}$; $M_1 = -1 \cdot 0,5 = -0,5 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Изгибающий момент на втором участке будет равен:

$$M_2 = -R_B \cdot z_2; \quad 0 \leq z_2 \leq 2 \text{ м.}$$

При $z = 0$; $M_2 = 0$; при $z = 2 \text{ м}$; $M_2 = -0,25 \cdot 2 = -0,5$.

По полученным значениям строим эпюру изгибающих моментов единичной силы (рис. 119, д). Эпюру строим на растянутых волокнах балки.

Определяем величину статического прогиба балки в сечении расположения электродвигателя путем перемножения эпюр с использованием правила Верещагина:

$$y_{ст} = M_F x M_1 = \frac{1}{EI_X} \sum \omega_i \cdot \eta_j = \frac{1}{EI_X} (\omega_1 \cdot \eta_1 + \omega_2 \cdot \eta_2) =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} (0,5 \cdot 1974 \cdot 0,5 \cdot 0,33 + 0,5 \cdot 1974 \cdot 2 \cdot 0,33) = 1,18 \cdot 10^{-4} \text{ м,}$$

где ω_1 и ω_2 – площади эпюры моментов от заданной нагрузки, определяются как площади треугольников; η_1 и η_2 – ординаты эпюры от единичной силы, взятые под центрами тяжести ω_1 и ω_2 .

Определяем частоту свободных колебаний: $\omega = \sqrt{\frac{1}{M \cdot \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{y_{ст}}} = \sqrt{\frac{9,87}{1,18 \cdot 10^{-4}}} = 289,2 \text{ с}^{-1}$.

Определяем частоту вынужденных колебаний: $\theta = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{3,14 \cdot 500}{30} = 52,3 \text{ с}^{-1}$.

Определяем коэффициент нарастания колебаний: $|\beta| = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} = \frac{1}{1 - \frac{52,3^2}{289,2^2}} = 1,034$.

Проводим проверку балки на наличие резонанса $\frac{\theta}{\omega} = \frac{52,3}{289,2} = 0,18$. Данное отношение го-

ворит о том, что система работает в отсутствии резонанса. Если отношение лежит в пределах

$\frac{\theta}{\omega} = 0,8 \dots 1,2$, то необходимо взять следующий по сортаменту номер двутавра или определить

другое место установки электромотора и сделать все предыдущие расчеты.

3. Проверку прочности балки можно выполнить двумя способами.

3.1. Определим динамический коэффициент:

$$k_d = 1 + \beta \frac{H}{G} = 1 + \beta \frac{H}{M \cdot g} = 1 + 1,034 \cdot \frac{13676}{3948} = 4,58,$$

где H – сила, вызванная вращением неуравновешенных частей ротора электромотора, $H = m \cdot \theta^2 \cdot e = 50 \cdot 52,3^2 \cdot 0,1 = 13676 \text{ Н}$.

Опасным сечением балки является сечение под опорой А, где действует максимальный изгибающий момент, вызванный весом электромотора $M_{Fmax} = 1974 \text{ Нм}$.

Нормальные напряжения, вызванные действием веса электромотора:

$$\sigma_{ст} = \frac{M_{Fmax}}{W_x} = \frac{1974}{289 \cdot 10^{-6}} = 6,83 \text{ МПа}.$$

Условие прочности балки проверим по динамическим напряжениям:

$$\sigma_d = k_d \cdot \sigma_{ст} = 4,58 \cdot 6,83 = 31,3 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется.

Прогиб от динамической нагрузки $\delta_d = k_d \cdot \delta_{ст} = 4,58 \cdot 1,18 \cdot 10^{-4} = 5,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}$.

3.2. Расчетная нагрузка на балку будет складываться из веса электромотора и вертикальной вибрационной силы, вызванной вращением неуравновешенных частей ротора электромотора $F_d = G + \beta \cdot H = 3948 + 1,034 \cdot 13676 = 18089 \text{ Н}$.

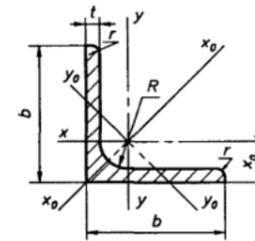
Прикладывая полученную силу к балке (рис. 118, е), определим изгибающий момент, действующий в сечении под опорой А. Эпюра изгибающих моментов от расчетной нагрузки представлена на рисунке 119, ж:

$$M_{Fd} = -F_d \cdot a = 18089 \cdot 0,5 = 9044,5 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Условие прочности для данного сечения: $\sigma_{ст} = \frac{M_{Fd}}{W_x} = \frac{9044,5}{289 \cdot 10^{-6}} = 31,3 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}$

выполняется.

УГОЛКИ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ РАВНОПОЛОЧНЫЕ (ПО ГОСТ 8509-93)



Обозначения:

- b – ширина полки;
- t – толщина полки;
- R – радиус внутреннего закругления;
- r – радиус закругления полки;
- A – площадь поперечного сечения;
- I – момент инерции;
- x_0 – расстояние от центра тяжести до наружной грани полки;
- I_{xy} – центробежный момент инерции;
- i – радиус инерции.

Таблица 1

Номер уголка	b	t	R	r	Площадь поперечного сечения, см ²	Справочные значения величин для осей										Масса 1 м, кг
						x-x			x ₀ -x ₀		y ₀ -y ₀			I _{xy} , см ⁴	x ₀ , см	
						I _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см	I _{x0} max, см ⁴	i _{x0} max, см	I _{y0} min, см ⁴	W _{y0} , см ³	i _{y0} min, см			
2	20	3	3,5	1,2	1,13	0,40	0,28	0,59	0,63	0,75	0,17	0,20	0,39	0,23	0,60	0,89
		4	3,5	1,2	1,46	0,50	0,37	0,58	0,78	0,73	0,22	0,24	0,38	0,28	0,64	1,15
2,5	25	3	3,5	1,2	1,43	0,81	0,46	0,75	1,29	0,95	0,34	0,33	0,49	0,47	0,73	1,12
		4	3,5	1,2	1,86	1,03	0,59	0,74	1,62	0,93	0,44	0,41	0,48	0,59	0,76	1,46
2,8	28	3	4,0	1,3	1,62	1,16	0,58	0,85	1,84	1,07	0,48	0,42	0,55	0,68	0,80	1,27
3	30	3	4,0	1,3	1,74	1,45	0,67	0,91	2,30	1,15	0,60	0,53	0,59	0,85	0,85	1,36
3,2	32	3			1,86	1,77	0,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,59	0,63	1,03	0,89	1,46
		4			2,43	2,26	1,0	0,96	3,58	1,21	0,91	0,71	0,62	1,32	0,94	1,91
3,5	35	3	4,5	1,5	2,04	2,35	0,93	1,07	3,72	1,35	0,97	0,71	0,69	1,37	0,97	1,60
		4			2,17	3,01	1,21	1,06	4,76	1,33	1,25	0,88	0,68	1,75	1,01	2,10
		5			3,28	3,61	1,47	1,05	5,71	1,32	1,52	1,02	0,68	2,10	1,05	2,58
4	40	3			2,35	3,55	1,22	1,23	5,63	1,55	1,47	0,95	0,79	2,08	1,09	1,85
		4			3,08	4,58	1,60	1,22	7,28	1,53	1,90	1,19	0,78	2,68	1,13	2,42
		5			3,79	5,53	1,95	1,21	8,75	1,51	2,30	1,39	0,78	3,22	1,17	2,98
		6	5,0	1,7	4,48	6,41	2,30	1,20	10,13	1,50	2,70	1,58	0,78	3,72	1,21	3,52
4,5	45	3			2,65	5,13	1,56	1,39	8,13	1,75	2,12	1,24	0,89	3,00	1,21	2,08
		4			3,48	6,63	2,04	1,38	10,52	1,74	2,74	1,54	0,89	3,89	1,26	2,73
		5			4,29	8,03	2,51	1,36	12,74	1,72	3,33	1,81	0,88	4,71	1,30	3,37
		6			5,08	9,35	2,95	1,35	14,80	1,71	3,90	2,06	0,88	5,45	1,34	3,99
5	50	3			2,96	7,11	1,94	1,55	11,27	1,95	2,95	1,57	1,00	4,16	1,33	2,32
		4			3,89	9,21	2,54	1,54	14,63	1,94	3,80	1,95	0,99	5,42	1,38	3,05
		5			4,80	11,20	3,13	1,53	17,77	1,92	4,63	2,30	0,98	6,57	1,42	3,77
		6	5,5	1,8	5,69	13,07	3,69	1,52	20,72	1,91	5,43	2,63	0,98	7,65	1,46	4,47
		7			6,56	14,84	4,23	1,50	23,47	1,89	6,21	2,93	0,97	8,63	1,50	5,15
		8			7,41	16,61	4,76	1,49	26,03	1,87	6,98	3,22	0,97	9,52	1,53	5,82
5,6	56	4	6,0	2,0	4,48	13,10	3,21	1,73	20,79	2,18	5,41	2,52	1,11	7,69	1,52	3,44
		5			5,41	15,97	3,96	1,72	25,36	2,16	6,59	2,97	1,10	9,41	1,57	4,25
6	60	4			4,72	16,21	3,70	1,85	25,69	2,33	6,72	2,93	1,19	9,48	1,62	3,71
		5	7,0	2,3	5,83	19,79	4,56	1,84	31,40	2,32	8,18	3,49	1,18	11,61	1,66	4,58
		6			6,92	23,21	5,40	1,83	36,81	2,31	9,60	3,99	1,18	13,60	1,70	5,43

Номер уголка	b	t	R	r	Площадь попереч- ного сече- ния, см ²	Справочные значения величин для осей										Масса 1 м, кг
						x - x			x ₀ - x ₀		y ₀ - y ₀			I _{xy} , см ⁴	x ₀ , см	
						I _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см	I _{x0 max} , см ⁴	i _{x0 max} , см	I _{y0 min} , см ⁴	W _{y0} , см ³	i _{y0 min} , см			
6	60	8	7,0	2,3	9,04	29,55	7,00	1,81	46,77	2,27	12,34	4,90	1,17	17,22	1,78	7,10
		10			11,08	35,32	8,52	1,79	55,64	2,24	15,00	5,70	1,16	20,32	1,85	8,70
6,3	63	4	7,0	2,3	4,96	18,86	4,09	1,95	29,90	2,45	7,81	3,26	1,25	11,00	1,69	3,90
		5			6,13	23,10	5,05	1,94	36,80	2,44	9,52	3,87	1,25	13,70	1,74	4,81
		6			7,28	27,06	5,98	1,93	42,91	2,43	11,18	4,44	1,24	15,90	1,78	5,72
7	70	4,5	8,0	2,7	6,20	29,04	5,67	2,16	46,03	2,72	12,04	4,53	1,39	17,00	1,88	4,87
		5			6,86	31,94	6,27	2,16	50,67	2,72	13,22	4,92	1,39	18,70	1,90	5,38
		6			8,15	37,58	7,43	2,15	59,64	2,71	15,52	5,66	1,38	22,10	1,94	6,39
		7			9,42	42,98	8,57	2,14	68,19	2,69	17,77	6,31	1,37	25,20	1,99	7,39
		8			10,67	48,16	9,68	2,12	76,35	2,68	19,97	6,99	1,37	28,20	2,02	8,37
		10			13,11	57,90	11,82	2,10	92,52	2,64	24,27	8,17	1,36	33,60	2,10	10,29
7,5	75	5	9,0	3,0	7,39	39,53	7,21	2,31	62,65	2,91	16,41	5,74	1,49	23,10	2,02	5,80
		6			8,78	46,57	8,57	2,30	73,87	2,90	19,28	6,62	1,48	27,30	2,06	6,89
		7			10,15	53,34	9,89	2,29	84,61	2,89	22,07	7,43	1,47	31,20	2,10	7,96
		8			11,50	59,84	11,18	2,28	94,89	2,87	24,80	8,16	1,47	35,00	2,15	9,02
		9			12,83	66,10	12,43	2,27	104,72	2,86	27,48	8,91	1,46	38,60	2,18	10,07
8	80	5,5	9,0	3,0	8,63	52,68	9,03	2,47	83,56	3,11	21,80	7,10	1,59	30,90	2,17	6,78
		6			9,38	56,97	9,80	2,47	90,40	3,11	23,54	7,60	1,58	33,40	2,19	7,36
		7			10,85	65,31	11,32	2,45	103,60	3,09	26,97	8,55	1,58	38,30	2,33	8,51
		8			12,30	73,36	12,80	2,44	116,39	3,08	30,32	9,44	1,57	43,00	2,27	9,65
		10			15,14	83,58	15,67	2,42	140,31	3,04	36,85	11,09	1,56	56,70	2,35	11,88
		12			17,19	102,74	18,42	2,40	162,37	3,01	43,21	12,62	1,55	59,50	2,42	14,05
9	90	6	10,0	3,3	10,61	82,10	12,49	2,78	130,00	3,50	33,97	9,88	1,79	48,10	2,43	8,33
		7			12,28	94,30	14,45	2,77	149,67	3,49	38,94	11,15	1,78	55,40	2,47	9,64
		8			13,93	106,11	16,36	2,76	168,42	3,48	43,80	12,34	1,77	72,30	2,51	10,93
		9			15,60	118,00	18,29	2,75	186,00	3,46	48,60	13,48	1,77	68,00	2,55	12,20
		10			17,17	128,60	20,07	2,74	203,93	3,45	53,27	14,54	1,76	75,30	2,59	13,48
		12			20,33	149,67	23,85	2,71	235,88	3,41	62,40	16,53	1,75	86,20	2,67	15,96
10	100	6,5	12,0	4,0	12,8	122,10	16,69	3,09	193,46	3,89	50,73	13,38	1,99	71,40	2,68	10,06
		7			13,75	130,59	17,90	3,08	207,01	3,88	54,16	14,13	1,98	76,40	2,71	10,79
		8			15,60	147,19	20,30	3,07	233,46	3,87	60,92	15,66	1,98	86,30	2,75	12,25
		10			19,24	178,95	24,97	3,05	283,83	3,84	74,08	18,51	1,96	110,00	2,83	15,10
		12			22,80	208,90	29,47	3,03	330,95	3,81	86,84	21,10	1,95	122,00	2,91	17,90
		14			26,28	237,15	33,83	3,00	374,98	3,78	99,32	23,49	1,94	138,00	2,99	20,63
		15			27,99	250,68	35,95	2,99	395,87	3,76	105,48	24,62	1,94	145,00	3,03	21,97
		16			29,68	263,82	38,04	2,98	416,04	3,34	111,61	25,79	1,94	152,00	3,06	23,30
11	110	7			15,15	175,61	21,83	3,40	278,54	4,29	72,68	17,36	2,19	106,00	2,96	11,89
		8			17,20	198,17	24,77	3,39	314,51	4,28	81,83	19,29	2,18	116,00	3,00	13,50
12	120	8	12,0	4,0	18,80	259,75	29,68	3,72	412,45	4,68	104,04	23,29	2,39	153,00	3,25	14,76
		10			23,24	317,16	36,59	3,69	503,79	4,66	130,54	27,72	2,37	187,00	3,33	18,24
		12			27,60	371,80	43,30	3,67	590,28	4,62	153,33	31,79	2,36	218,00	3,41	21,67
		15			33,99	448,90	52,96	3,63	711,32	4,57	186,48	37,35	2,34	262,00	3,53	26,68
12,5	125	8	14,0	4,6	19,69	294,36	32,20	3,87	466,76	4,87	121,98	25,67	2,49	172,00	3,36	15,46
		9			22,00	327,48	36,00	3,86	520,00	4,86	135,88	28,26	2,48	192,00	3,40	17,30
		10			24,33	359,82	39,74	3,85	571,04	4,84	148,59	30,45	2,47	211,00	3,45	19,10
		12			28,89	422,23	47,06	3,82	670,02	4,82	174,43	34,94	2,46	248,00	3,53	22,68
		14			33,37	481,76	54,17	3,80	763,90	4,78	199,62	39,10	2,45	282,00	3,61	26,20

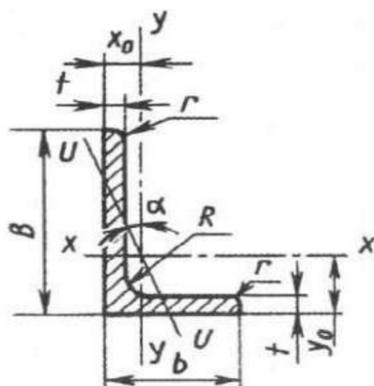
Номер уголка	b	t	R	r	Площадь попереч- ного сече- ния, см ²	Справочные значения величин для осей										Масса 1 м, кг
						x - x			x ₀ - x ₀		y ₀ - y ₀			I _{xy} , см ⁴	x ₀ , см	
						I _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см	I _{x0 max} , см ⁴	i _{x0 max} , см	I _{y0 min} , см ⁴	W _{y0} , см ³	i _{y0 min} , см			
12,5	125	16	14,0	4,6	37,77	538,56	61,09	3,78	852,84	4,75	224,29	43,10	2,44	315,00	3,68	29,65
14	140	9	14,0	4,6	24,72	465,72	45,55	4,34	739,42	5,47	192,03	35,92	2,79	274,00	3,76	19,41
		10			27,33	512,29	50,32	4,33	813,63	5,46	210,96	39,05	2,78	301,00	3,82	21,45
		12			32,49	602,49	59,66	4,31	956,98	5,43	248,01	44,97	2,76	354,00	3,90	25,50
16	160	10	16,0	5,3	31,43	774,24	66,19	4,96	1229,10	6,25	319,33	52,52	3,19	455,00	4,30	24,67
		11			34,42	884,21	72,44	4,95	1340,06	6,24	347,77	56,53	3,18	496,00	4,35	27,02
		12			37,39	912,89	78,62	4,94	1450,00	6,23	375,78	60,53	3,17	537,00	4,39	29,35
		14			43,57	1046,47	90,77	4,92	1662,13	6,20	430,81	68,15	3,16	615,00	4,47	34,20
		16			49,07	1175,19	102,64	4,89	1865,73	6,17	484,64	75,92	3,14	690,00	4,55	38,52
		18			54,79	1290,24	114,24	4,87	2061,03	6,13	537,46	82,08	3,13	771,00	4,63	43,01
		20			60,40	1418,85	125,60	4,85	2248,26	6,10	589,43	90,02	3,12	830,00	4,70	47,41
18	180	11			38,80	1216,44	92,47	5,60	1933,10	7,06	499,78	72,86	3,59	716,00	4,85	30,47
		12			42,19	1316,62	100,41	5,59	2092,78	7,04	540,45	78,15	3,58	776,00	4,89	33,12
20	200	12	18,0	6,0	47,10	1822,78	124,61	6,22	2896,16	7,87	749,40	98,68	3,99	1073,00	5,37	36,97
		13			50,85	1960,77	134,44	6,21	3116,18	7,83	805,35	105,07	3,98	1156,00	5,42	39,92
		14			54,60	2097,00	144,17	6,20	3333,00	7,81	861,00	111,50	3,97	1236,00	5,46	42,80
		16			61,98	2362,57	163,37	6,17	3755,39	7,78	969,74	123,77	3,96	1393,00	5,54	48,65
		20			76,54	2871,47	200,37	6,12	4860,42	7,72	1181,92	146,62	3,93	1689,00	5,70	60,08
		25			94,29	3466,21	245,59	6,06	5494,04	7,63	1438,38	172,68	3,91	2028,00	5,89	74,02
		30			111,54	4019,60	288,57	6,00	6351,05	7,55	1698,16	193,06	3,89	2332,00	6,07	87,56
22	220	14	21,0	7,0	60,38	2814,36	175,18	6,83	4470,15	8,60	1158,56	138,62	4,38	1655,00	5,91	47,40
		16			68,58	3175,44	198,71	6,80	5045,37	8,58	1305,52	153,34	4,36	1869,00	6,02	53,83

ГОСТ 8509-93 предусматривает номера профилей 25, а также профили, изготавливаемые по соглашению изготовителей с потребителем.

Площади поперечного сечения и справочные величины вычислены по номинальным разме-рам. Плотность стали 7,85 г/см³.

**УГОЛКИ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ НЕРАВНОПОЛОЧНЫЕ
(ПО ГОСТ 8510-86)**

Продолжение таблицы 2



Обозначения:

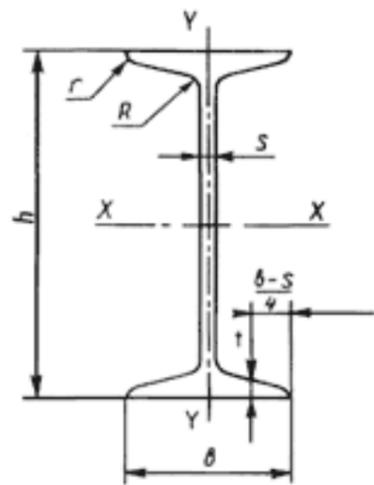
- B – ширина большей полки;
- b – ширина меньшей полки;
- t – толщина полки;
- R – радиус внутреннего закругления;
- r – радиус закругления полок;
- A – площадь поперечного сечения;
- W – момент сопротивления;
- I – момент инерции;
- I_{xy} – центробежный момент инерции;
- x_0, y_0 – расстояние от центра тяжести до наружных граней полки;
- i – радиус инерции.

Таблица 2

Номер уголка	B	b	t	R	r	Площадь поперечного сечения, см ²	Справочные значения величин для осей										Масса 1 м, кг		
							x – x			y – y			и – и			$x_0, \text{ см}$		$y_0, \text{ см}$	$I_{xy}, \text{ см}^4$
							$I_x, \text{ см}^4$	$W_x, \text{ см}^3$	$i_x, \text{ см}$	$I_y, \text{ см}^4$	$W_y, \text{ см}^3$	$i_y, \text{ см}$	$I_u, \text{ см}^4$	$W_u, \text{ см}^3$	$i_u, \text{ см}$				
2,5/1,6	25	16	3			1,16	0,70	0,43	0,78	0,22	0,19	0,44	0,13	0,16	0,34	0,42	0,86	0,22	0,91
3/2	30	20	3	3,5	1,2	1,43	1,27	0,62	0,94	0,45	0,30	0,56	0,26	0,25	0,43	0,51	1,00	0,43	1,12
			4			1,86	1,61	0,82	0,93	0,56	0,39	0,55	0,34	0,32	0,43	0,54	1,04	0,54	1,46
3,2/2	32	20	3	4,0	1,3	1,49	1,52	0,72	1,01	0,46	0,30	0,55	0,28	0,25	0,43	0,49	1,08	0,47	1,17
			4			1,94	1,93	0,93	1,00	0,57	0,39	0,54	0,35	0,33	0,43	0,53	1,12	0,59	1,52
4/2,5	40	25	3	4,0	1,3	1,89	3,06	1,14	1,27	0,93	0,49	0,70	0,56	0,41	0,54	0,59	1,32	0,96	1,48
			4			2,47	3,93	1,49	1,26	1,18	0,68	0,69	0,71	0,52	0,54	0,63	1,37	1,22	1,94
			5			3,03	4,73	1,82	1,25	1,41	0,77	0,68	0,86	0,64	0,53	0,66	1,41	1,44	2,37
4/3	40	30	4	4,0	1,3	2,67	4,18	1,54	1,25	2,01	0,91	0,87	1,09	0,75	0,64	0,78	1,28	1,68	2,26
			5			3,28	5,04	1,88	1,24	2,41	1,11	0,86	1,33	0,91	0,64	0,82	1,32	2,00	2,46
4,5/2,8	45	28	3	5,0	1,7	2,14	4,41	1,45	1,48	1,32	0,61	0,79	0,79	0,52	0,61	0,64	1,47	1,38	1,68
			4			2,80	5,68	1,90	1,42	1,69	0,80	0,78	1,02	0,67	0,60	0,68	1,51	1,77	2,20
5/3,2	50	32	3	5,5	1,8	2,42	6,18	1,82	1,60	1,99	0,81	0,91	1,18	0,68	0,70	0,72	1,60	2,01	1,90
			4			3,17	7,98	2,38	1,59	2,56	1,05	0,90	1,52	0,88	0,69	0,76	1,65	2,59	2,40
5,6/3,6	56	36	4	6,0	2,0	3,58	11,37	3,01	1,78	3,70	1,34	1,02	2,19	1,13	0,78	0,84	1,82	3,74	2,81
			5			4,41	13,82	3,70	1,77	4,48	1,65	1,01	2,65	1,37	0,78	0,88	1,87	4,50	3,46
6,3/4,0	63	40	4	7,0	2,3	4,04	16,33	3,83	2,01	5,16	1,67	1,13	3,07	1,41	0,87	0,91	2,03	5,25	3,17
			5			4,98	19,91	4,72	2,00	6,26	2,05	1,12	3,73	1,72	0,86	0,95	2,08	6,41	3,91
			6			5,90	23,31	5,58	1,99	7,29	2,42	1,11	4,36	2,02	0,86	0,99	2,12	7,44	4,63
6,5/5	65	50	6	6,0	2,0	7,68	29,60	7,22	1,96	9,15	3,12	1,09	5,58	2,60	0,85	1,07	2,20	9,27	6,03
			5			5,56	23,41	5,20	2,05	12,08	3,23	1,47	6,41	2,68	1,07	1,26	2,00	9,77	4,36
			6			6,60	27,46	6,16	2,04	14,12	3,82	1,46	7,52	3,15	1,07	1,30	2,04	11,46	5,18
			7			7,62	31,32	7,08	2,03	16,05	4,38	1,45	8,60	3,59	1,06	1,34	2,08	12,94	5,98
7,5/5	75	50	8	8,0	2,7	8,62	35,00	7,99	2,02	18,88	4,93	1,44	9,65	4,02	1,06	1,37	2,12	13,61	6,77
			5			5,59	27,76	5,88	2,23	9,05	2,62	1,27	5,34	2,20	0,98	1,05	2,28	9,12	4,39
7,5/5	75	50	5	8,0	2,7	6,11	34,81	6,81	2,39	12,47	3,25	1,43	7,24	2,73	1,09	1,17	2,39	12,00	4,79
			6			7,25	40,92	8,08	2,38	14,60	3,85	1,42	8,48	3,21	1,08	1,21	2,44	14,10	5,69
			7			8,37	46,77	9,31	2,36	16,61	4,43	1,41	9,69	3,69	1,08	1,25	2,48	16,18	6,57
			8			9,47	52,38	10,52	2,35	18,52	4,88	1,40	10,87	4,14	1,07	1,29	2,52	17,80	7,43

Номер уголка	B	b	t	R	r	Площадь поперечного сечения, см ²	Справочные значения величин для осей										Масса 1 м, кг		
							x – x			y – y			и – и			$x_0, \text{ см}$		$y_0, \text{ см}$	$I_{xy}, \text{ см}^4$
							$I_x, \text{ см}^4$	$W_x, \text{ см}^3$	$i_x, \text{ см}$	$I_y, \text{ см}^4$	$W_y, \text{ см}^3$	$i_y, \text{ см}$	$I_u, \text{ см}^4$	$W_u, \text{ см}^3$	$i_u, \text{ см}$				
8/5	80	50	5			6,36	41,64	7,71	2,56	12,68	3,28	1,41	7,57	2,75	1,00	1,13	2,60	13,20	4,49
8/5	80	50	6	8,0	2,7	7,55	46,98	9,15	2,55	14,85	3,88	1,40	8,88	3,24	1,08	1,17	2,65	15,50	5,92
			7			8,15	52,06	10,42	2,53	17,18	4,58	1,76	13,61	4,66	1,29	1,49	2,47	20,98	6,39
8/6	80	60	7	8,0	2,7	9,42	59,61	10,87	2,52	28,74	6,43	1,75	15,58	5,34	1,29	1,53	2,52	24,01	7,39
			8			10,67	66,88	12,38	2,50	32,15	7,26	1,74	17,49	5,99	1,28	1,57	2,56	26,83	8,37
9/5,6	90	56	5,5	9,0	3,0	7,86	65,28	10,74	2,88	19,67	4,53	1,58	11,77	3,81	1,22	1,26	2,92	20,54	6,17
			6			8,54	70,58	11,66	2,88	21,22	4,91	1,58	12,70	4,12	1,22	1,28	2,95	22,23	6,70
			8			11,18	90,87	15,24	2,85	27,08	6,39	1,56	16,29	5,32	1,21	1,36	3,04	28,33	8,77
10/6,3	100	63	6	9,0	3,0	9,58	98,29	14,52	3,20	30,58	6,27	1,79	18,20	5,27	1,38	1,42	3,23	31,50	7,53
			7			11,09	112,86	16,78	3,19	34,99	7,23	1,78	20,83	6,06	1,37	1,46	3,28	36,10	8,70
			8			12,57	126,96	19,01	3,18	39,21	8,17	1,77	23,38	6,82	1,36	1,50	3,32	40,50	9,87
10/6,3	100	63	10	9,0	3,0	15,47	153,95	23,32	3,15	47,18	9,99	1,75	28,34	8,31	1,35	1,58	3,40	48,60	12,14
			7			11,23	114,05	16,87	3,19	38,32	7,70	1,85	22,77	6,43	1,41	1,52	3,24	38,00	8,81
10/6,5	100	65	8	10,0	3,3	12,73	128,31	19,11	3,18	42,96	8,70	1,84	25,24	7,26	1,41	1,56	3,28	42,64	9,99
			10			15,67	155,52	23,45	3,15	51,68	10,64	1,82	30,60	8,83	1,40	1,64	3,37	51,18	12,30
			6,5			11,45	142,42	19,11	3,53	45,61	8,42	2,00	26,94	7,05	1,53	1,68	3,55	46,80	8,98
11/7	110	70	8	10,0	3,3	13,93	171,54	23,22	3,51	54,64	10,20	1,98	32,31	8,50	1,52	1,64	3,61	55,90	10,93
			7			14,06	226,53	26,67	4,01	73,73	11,89	2,29	43,40	9,96	1,76	1,80	4,01	74,70	11,04
12,5/8	125	80	8	11,0	3,7	15,98	225,62	30,26	4,00	80,95	13,47	2,28	48,82	11,25	1,75	1,84	4,05	84,10	12,53
			10			19,70	311,61	37,27	3,98	100,47	16,52	2,26	59,33	13,74	1,74	1,92	4,14	102,00	15,47
			12			23,36	364,79	44,07	3,95	116,84	19,46	2,24	69,47	16,11	1,72	2,00	4,22	118,00	18,34
14/9	140	90	8	12,0	4,0	18,00	363,68	38,25	4,49	119,79	17,19	2,58	70,27	14,39	1,58	2,03	4,49	121,00	14,13
			10			22,24	444,45	47,19	4,47	145,54	21,14	2,58	85,51	17,58	1,96	2,12	4,58	147,00	17,46
16/10	160	100	9	13,0	4,3	22,87	605,97	56,04	5,15	186,03	23,96	2,85	110,40	20,01	2,20	2,24	5,19	194,00	17,96
			10			25,28	666,59	61,91	5,13	204,09	26,42	2,84	121,16	22,02	2,19	2,28	5,23	213,00	19,85
			12			30,04	784,22	73,42	5,11	238,75	31,23	2,82	142,14	25,93	2,18	2,36	5,32	249,00	23,58
			14			34,72	897,19	84,65	5,08	271,6	35,89	2,80	162,49	29,75	2,16	2,43	5,40	282,00	27,26
18/11	180	110	10	13,0	4,3	28,33	952,28	78,59	5,80	276,37	32,27	3,12	165,44	26,96	2,42	2,44	5,83	295,00	22,20
			12			33,69	1122,56	93,33	5,77	324,09	38,20	3,10	194,28	31,83	2,40	2,52	5,97	348,00	26,40
20/12,5	200	125	11	14,0	4,7	34,87	1449,02	107,31	6,45	446,36	45,98	3,58	263,84	38,27	2,75	2,79	6,50	465,00	27,37
			12			37,89	1568,19	116,51	6,43	481,93	49,85	3,57	285,04	41,45	2,74	2,83	6,54	503,00	29,74
			14			43,87	1800,83	134,64	6,41	550,77	57,43	3,54	326,54	47,57	2,73	2,91	6,62	575,00	34,43
			16			49,77	2026,08	152,41	6,38	616,66	64,83	3,52	366,99	53,56	2,72	2,99	6,71	643,00	39,07

ДВУТАВРЫ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ (ПО ГОСТ 8239-89)

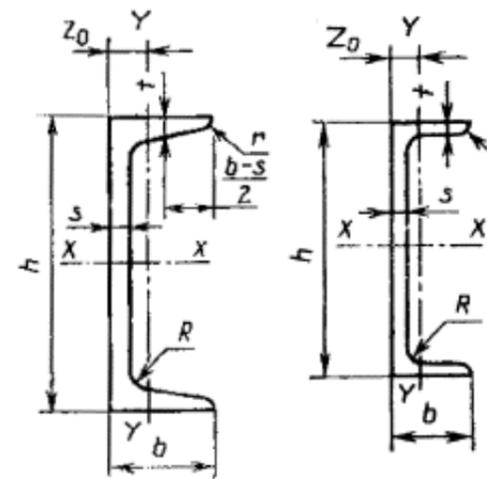


Обозначения:
 b – ширина полки;
 t – средняя толщина полки;
 s – толщина стенки;
 R – радиус внутреннего закругления;
 r – радиус закругления полки;
 A – площадь поперечного сечения;
 W – момент сопротивления;
 I – момент инерции;
 i – радиус инерции.

Таблица 3

Номер двутавра	Размеры						Площадь поперечного сечения, см ²	Масса 1 м, кг	Справочные значения для осей							
	h	b	s	t	R	r			X – X				Y – Y			
									I_x	W_x	i_x	S_x	I_y	W_y	i_y	
	не более мм								I_x	W_x	i_x	S_x	I_y	W_y	i_y	
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55	
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70	
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,40	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88	
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,00	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07	
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,00	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27	
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,30	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37	
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,50	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54	
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,50	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69	
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,20	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79	
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,60	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89	
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	57,00	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03	
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,50	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09	
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,50	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23	
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,60	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39	
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,00	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54	

ШВЕЛЛЕРЫ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ (ПО ГОСТ 8240-89)



Обозначения:
 h – высота;
 b – ширина полки;
 t – средняя толщина полки;
 s – толщина стенки;
 R – радиус внутреннего закругления;
 r – радиус закругления полки;
 A – площадь поперечного сечения;
 W – момент сопротивления;
 I – момент инерции;
 i – радиус инерции;
 z_0 – расстояние от оси y до наружной грани стенки.

Таблица 4

Швеллеры с уклоном внутренних граней полок

Номер швеллера	h	b	s	t	R	r	Площадь поперечного сечения, см ²	Масса 1 м, кг	Справочные значения для осей							z_0 , см
									X – X				Y – Y			
									I_x	W_x	i_x	S_x	I_y	W_y	i_y	
	мм								I_x	W_x	i_x	S_x	I_y	W_y	i_y	
5	50	32	4,4	7,0	6,0	2,5	6,16	4,84	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	6,0	2,5	7,51	5,90	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	23,30	12,80	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	7,0	3,0	10,90	8,59	174,0	34,8	3,99	20,40	20,40	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	7,5	3,0	13,30	10,40	304,0	50,6	4,78	29,60	31,20	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	8,0	3,0	15,60	12,30	491,0	70,2	5,60	40,80	45,40	11,00	1,70	1,67
16	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,10	14,20	747,0	93,4	6,42	54,10	63,30	13,80	1,87	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,50	15,30	823,0	103,0	6,49	59,40	78,80	16,40	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	9,0	3,5	20,70	16,30	1090,0	121,0	7,24	69,80	86,00	17,00	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	9,0	3,5	22,20	17,40	1190,0	132,0	7,32	76,10	105,00	20,00	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	9,5	4,0	23,40	18,40	1520,0	152,0	8,07	87,80	113,00	20,50	2,20	2,07
22	220	82	5,4	9,5	10,0	4,0	26,70	21,00	2110,0	192,0	8,89	110,00	151,00	25,10	2,37	2,21
24	240	90	5,6	10,0	10,5	4,0	30,60	24,00	2900,0	242,0	9,73	139,00	208,00	31,60	2,60	2,42
27	270	95	6,0	10,5	11,0	4,5	35,20	27,70	4160,0	308,0	10,90	178,00	262,00	37,30	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	12,0	5,0	40,50	31,80	5810,0	387,0	12,00	224,00	327,00	43,60	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	13,0	5,0	46,50	36,50	7980,0	484,0	13,10	281,00	410,00	51,80	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	14,0	6,0	53,40	41,90	10820,0	601,0	14,20	350,00	513,00	61,70	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	15,0	6,0	61,50	48,30	15220,0	761,0	15,70	444,00	642,00	73,40	3,23	2,75

Швеллеры с параллельными гранями полок

Номер швеллера	h	b	s	t	R	r	Площадь поперечного сечения, см ²	Масса 1 м, кг	Справочные значения для осей						z ₀ , см	
									X – X				Y – Y			
									I _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см	s _x , см ³	I _y , см ⁴	W _y , см ³		i _y , см
5П	50	32	4,4	7,0	6,0	3,5	6,16	4,84	22,8	9,1	1,92	5,61	5,95	2,99	0,98	1,21
6,5П	65	36	4,4	7,2	6,0	3,5	7,51	5,90	48,8	15,0	2,55	9,02	9,35	4,06	1,12	1,29
8П	80	40	4,5	7,4	6,5	3,5	8,98	7,05	89,8	22,5	3,16	13,30	13,90	3,31	1,24	1,38
10П	100	46	4,5	7,6	7,0	4,0	10,90	8,59	175,0	34,9	3,99	20,50	22,60	7,37	1,44	1,53
12П	120	52	4,8	7,8	7,5	4,5	13,30	10,40	305,0	50,8	4,79	29,70	34,90	9,84	1,62	1,66
14П	140	58	4,9	8,1	8,0	4,5	15,60	12,30	493,0	70,4	5,61	40,90	51,50	12,90	1,81	1,82
16П	160	64	5,0	8,4	8,5	5,0	18,10	14,20	750,0	93,8	6,44	54,30	72,80	16,40	2,00	1,97
16аП	160	68	5,0	9,0	8,5	5,0	19,50	15,30	827,0	103,0	6,51	59,50	90,50	19,60	2,15	2,19
18П	180	70	5,1	8,7	9,0	5,0	20,70	16,30	1090,0	121,0	7,26	70,00	100,00	20,60	2,20	2,14
18аП	180	74	5,1	9,3	9,0	5,0	22,20	17,40	1200,0	133,0	7,34	76,30	123,00	24,30	2,35	2,36
20П	200	76	5,2	9,0	9,5	5,5	23,40	18,40	1530,0	153,0	8,08	88,00	134,00	25,20	2,39	2,30
22П	220	82	5,4	9,5	10,0	6,0	26,70	21,00	2120,0	193,0	8,90	111,00	178,00	31,00	2,58	2,47
24П	240	90	5,6	10,0	10,5	6,0	30,60	24,00	2910,0	243,0	9,75	139,00	248,00	39,50	2,85	2,72
27П	270	95	6,0	10,5	11,0	6,5	35,20	27,70	4180,0	310,0	10,90	178,00	314,00	46,70	2,99	2,78
30П	300	100	6,5	11,0	12,0	7,0	40,50	31,80	5830,0	389,0	12,00	224,00	393,00	54,80	3,12	2,83
33П	330	105	7,0	11,7	13,0	7,5	46,50	36,50	8010,8	486,0	13,10	281,00	491,00	64,60	3,25	2,90
36П	360	110	7,5	12,6	14,0	8,5	53,40	41,90	10850,0	603,0	14,30	350,00	611,00	76,30	3,38	2,99
40П	400	115	8,0	13,5	15,0	9,0	61,50	48,30	15260,0	763,0	15,80	445,00	760,00	89,90	3,51	3,05

Коэффициент продольного изгиба

λ	Сталь	Дерево	λ	Сталь	Дерево	λ	Сталь	Дерево
10	0,99	0,99	50	0,89	0,80	90	0,69	0,38
20	0,97	0,97	60	0,86	0,72	100	0,60	0,31
30	0,95	0,93	70	0,81	0,61	110	0,52	0,26
40	0,92	0,87	80	0,75	0,48	120	0,45	0,22

МОИСЕЕВ Владимир Васильевич

МЕХАНИКА. МОДУЛЬ «СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»

*Учебное пособие с методическими указаниями
и контрольными заданиями для студентов
очной и заочной форм обучения*

Верстка О. А. Надточий

Корректор В. А. Яковлева

Подписано в печать 26.05.2020. Бумага «Mondi».
Гарнитура «Myriad Pro». Формат 60x84¹/₈.
Тираж 500 экз. (1-й завод 1–100 экз.). 21,4 усл. п. л. Заказ № 968-18.

Сахалинский государственный университет
693008, Южно-Сахалинск, ул. Ленина, 290, каб. 32.
Тел. (4242) 45-23-16, факс (4242) 45-23-17.
E-mail: izdatelstvo@sakhgu.ru,
polygraph@sakhgu.ru