Сахалинский государственный университет

Г. А. Сороко

Практикум по курсу физики

Молекулярная физика. Основы термодинамики

Южно-Сахалинск
2011

УДК 539.1(076)
ББК 22.3
П 69

*Печатается по решению учебно-методического совета
Сахалинского государственного университета, 2010 г.*

П 69 Практикум по курсу физики: Молекулярная физика. Основы термодинамики / Сост. Г. А. Сороко. – Южно-Сахалинск: СахГУ, 2011.– 152 с.

ISBN 978-5-88811-342-4

Пособие предназначено для совершенствования различных форм самостоятельной работы студентов в процессе решения задач по физике.

Каждая тема раздела имеет одинаковую структуру: перечень основных физических законов и необходимых для решения задач формул; методические указания к решению задач; примеры задач с анализом их решений; задачи для самостоятельного решения.

Рецензенты:
Б. С. Позднеев, профессор кафедры математики
и инновационных технологий филиала ЕГЭУ в г. Южно-Сахалинске;
И. Г. Минервин, кандидат физико-математических наук.

9 785888 113424

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Знание законов физики предполагает умение не только формулировать эти законы, но и применять их в конкретных случаях при решении задач. Таким образом, решение конкретных физических задач является необходимой практической основой при изучении курса физики. Оно способствует приобщению студентов к самостоятельной творческой работе, учит анализировать изучаемые явления, выделять главные факторы, обусловливающие то или иное явление, отвлекаясь от случайных несущественных деталей. Однако именно решение задач вызывает наибольшие затруднения у изучающих физику.

Для решения задач недостаточно формального знания физических законов. Необходимо знание специальных методов, приемов, общих для решения определенных групп задач. Не всегда такие методы существуют. Тогда главным становится умение рассуждать.

Этих двух аспектов обучения решению задач на практических занятиях зачастую бывает недостаточно для студентов, особенно для тех, кто пропускает занятия.

Настоящее пособие имеет целью восполнить указанный пробел, оказав помощь прежде всего тем, кто самостоятельно изучает физику.

Предполагается, что, работая с данным пособием, студент будет пользоваться учебником по курсу физики. Поэтому в начале каждого параграфа помещен краткий перечень формул и законов, связанных с решением задач, приведенных в данном параграфе. Затем следуют методические указания к решению задач по теме данного параграфа. В методических указаниях обсуждаются особенности задач данной темы, даются общие методы, приемы их решения.

Важным элементом пособия является решение задач и задачи для самостоятельного прорешивания.

Настоящее пособие предназначено для студентов всех специальностей, изучающих физику. Оно имеет цель помочь студентам в самостоятельной работе по решению задач.

Условия некоторых задач взяты из различных учебных пособий. Многие задачи переработаны.

Подбор задач осуществлен таким образом, чтобы обеспечить читателю возможность полностью подготовиться к курсовому экзамену по физике на высоком уровне.

Предлагаемое пособие несколько лет апробировалось на занятиях со студентами всех специальностей факультета математики, физики и информатики.

1. Законы идеальных газов. Основные формулы

1. Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона-Менделеева).

$$PV = \frac{m}{\mu} RT, \qquad (1.1)$$

где P – давление газа, V – его объем, T – абсолютная температура, m – масса, μ – молярная, R = 8,31 Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная.

$$P = nkT, \qquad (1.2)$$

где n – концентрация молекул, то есть число молекул в единице объема, $K = R/N_A = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана; $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – постоянная Авогадро.

2. Из уравнения состояния как частные случаи получаются законы для изопроцессов.

а) Изотермический процесс:

$$PV = \text{const, если } m = \text{const и } T = \text{const}. \qquad (1.3)$$

б) Изобарический процесс:

$$\frac{V}{T} = \text{const, если } m = \text{const и } P = \text{const}. \qquad (1.4)$$

в) Изохорический процесс:

$$\frac{P}{T} = \text{const, если m} = \text{const и } V = \text{const}. \qquad (1.5)$$

3. Объединенный газовый закон (уравнение Клапейрона).

$$\frac{PV}{T} = \text{const, если m} = \text{const}. \qquad (1.6)$$

4. Закон Дальтона: давление смеси газов равно сумме их парциальных давлений P_i, то есть:

$$P = \Sigma P_i. \qquad (1.7)$$

Методические указания

1. Задачи на расчет параметров состояния газов можно разделить на две основные группы. К первой следует отнести такие задачи, где даны два или несколько состояний газа, в которых его масса остается неизменной и к которым применимо уравнение объединенного газового закона (1.6).

2. В задачах второй группы масса газа либо задана в условии, либо изменяется при переходе из одного состояния в другое. Эти задачи решаются на основании уравнения Менделеева-Клапейрона (1.1), которое связывает между собой пять физических величин, характеризующих состояние – P, V, T, m, μ, и позволяет по заданным четырем найти пятую величину. Напомним, что отношение $\rho = \dfrac{m}{V}$ есть плотность газа, $\upsilon = \dfrac{V}{m}$ – удельный объем газа, $\nu = \dfrac{m}{\mu}$ – число молей газа.

3. В условии некоторых задач даются показания механических манометров. Они устроены так, что измеряют не полное давление газа в баллоне, а лишь давление, избыточное над атмосферным $P_{атм.}$ Поэтому полное давление газа в баллоне равно показанию манометра, увеличенному на $P_{атм.}$

4. Особое внимание следует обратить на определение давления. Чтобы его найти, часто используется условие равновесия.

Решение задач

1-1. На рис. 1 изображен график некоторого процесса в координатах P, T. Как меняется объем при переходе из состояния 1 в состояние 2?

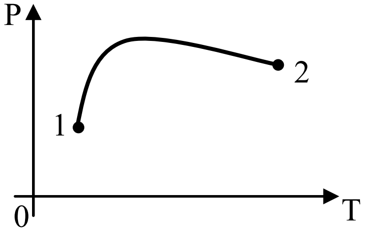

Рис. 1

Решение:

Проведем две изохоры, соответствующие состояниям 1 и 2. На графике (рис. 2) они изображены пунктирными прямыми $0V_1$ и $0V_2$.

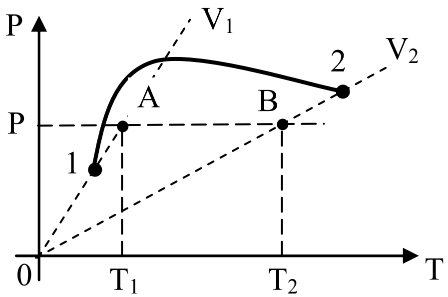

Рис. 2

Сравним объемы V_1 и V_2. Для этого можно зафиксировать любое произвольное давление P или температуру T. Например, зафиксируем некоторое давление P. Этому давлению на изохорах соответствуют состояния A и B, которые имеют соответственно температуры T_1 и T_2, причем $T_2 > T_1$. Итак, состояния A и B имеют следующие параметры: (P, V_1, T_1) и (P, V_2, T_2). При $P = \text{const}$ $\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$, а так как $T_2 > T_1$, то $V_2 > V_1$. Но часть кривой, изображающей график процесса, лежит выше пунктирной линии $0V_1$. Это значит, что сначала газ сжимался, затем с ростом температуры началось расширение газа.

1-2. Объем газа при нагревании изменяется по закону $V = \alpha\sqrt{T}$, где α – постоянная величина. Начертите график этого процесса в координатах P, V.

Решение:

Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона.

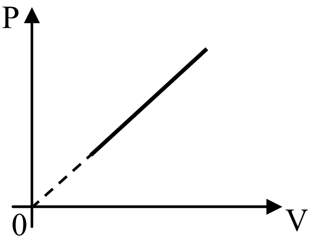

Рис. 3

$PV = \frac{m}{\mu}RT$ или $PV = \beta T$, где $\beta = \frac{m}{\mu}R = \text{const}$;

$\sqrt{PV} = \sqrt{\beta} \cdot \sqrt{T} = \frac{V \cdot \sqrt{\beta}}{\alpha} = \gamma V$, $\gamma = \frac{\sqrt{\beta}}{\alpha} = \text{const}$;

$PV = \gamma^2 V^2$; $\frac{P}{V} = \text{const}$ (рис. 3).

1-3. На диаграмме P, T (рис. 4) показан процесс, проводимый с идеальным газом. Объем газа постоянен. Найдите точки, где масса газа максимальна и минимальна.

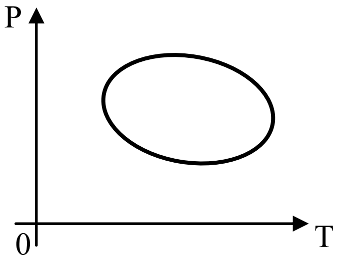

Рис. 4

Решение:

Из уравнения состояния идеального газа

$$PV = \frac{m}{\mu} RT$$

выразим массу газа m:

$m = \frac{P}{T} \cdot C$, где $C = \frac{V \cdot \mu}{R} = \text{const}$.

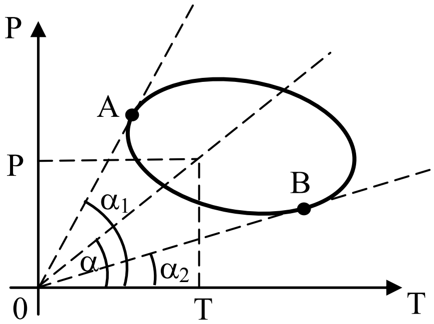

Рис. 5

Из рис. 5 следует, что $\frac{P}{T} = \text{tg}\ \alpha$; $\text{tg}\alpha_2 > \text{tg}\alpha_1$. Следовательно, точка A соответствует m_{max}, точка B – m_{min}.

1-4. Сколько ртути войдет в стеклянный сосуд (рис. 6) объемом $5 \cdot 10^{-6}$ м^3, нагретый до 400 °C, при его остывании до 16 °C, если плотность ртути равна $13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3?

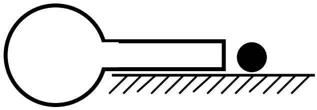

Рис. 6

Решение:

Ртуть втягивается в шар вследствие уменьшения давления воздуха внутри стеклянного шара при его остывании. Таким образом, втягивающая ртуть поддерживает давление внутри стеклянного шара постоянным, равным внешнему. Так как процесс остывания воздуха внутри шара изобарический, то количество ртути, вошедшей в шар, равно:

$$m = \rho \Delta V, \qquad (1)$$

где изменение объема ΔV может быть найдено из закона Гей-Люссака:

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$, где T_1 и T_2 соответственно начальная и конечная температуры процесса.

Отсюда $\Delta V = V_1 - V_2 = V_1 \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right)$.

Подставив полученное значение ΔV в формулу (1), найдем:

$$m = \rho \Delta V = \rho V_1 \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right);$$

$$m = 13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \left(1 - \frac{289}{673}\right) = 0{,}039 \text{ (кг)}.$$

1-5. Найти число n ходов поршня, которое надо сделать, чтобы поршневым воздушным насосом откачать воздух из сосуда емкостью V от давления P_0 до давления P, если емкость поршня ΔV.

Решение:

Если откачивать достаточно медленно, то в результате теплообмена с внешней средой процесс можно считать изотермическим и газ, наполняющий сосуд и камеру насоса, подчиняется закону Бойля-Мариотта.

При первом ходе поршня воздух, находящийся в сосуде объемом V под давлением P_0, заполнит объем $V+\Delta V$, и в сосуде установится некоторое давление P_1, следовательно, $P_0V = P_1(V+\Delta V)$, откуда $P_1 = \dfrac{P_0V}{V+\Delta V}$.

При втором ходе поршня начальный объем по-прежнему V, конечный объем $V+\Delta V$, но начальное давление уже равно P_1, а конечное – P_2, равное

$$P_2 = P_1\frac{V}{V+\Delta V} = P_0\left(\frac{V}{V+\Delta V}\right)^2.$$

После n-го хода поршня в сосуде установится давление

$$P_n = P_0\left(\frac{V}{V+\Delta V}\right)^n.$$

По условию задачи $P_n = P$. Отсюда

$$n = \frac{\lg\dfrac{P}{P_0}}{\lg\dfrac{V}{V+\Delta V}} \quad \text{или } n = \frac{\lg\dfrac{P_0}{P}}{\lg\dfrac{V+\Delta V}{V}}.$$

1-6. Вертикальный цилиндр, закрытый с обеих сторон, разделен тяжелым теплонепроницаемым поршнем на две части, в которых находится одинаковое количество воздуха. При температуре 300 К давление в нижней части сосуда в два раза больше, чем в верхней. До какой температуры надо нагреть воздух в нижней части цилиндра, чтобы поршень оказался на середине поршня?

Решение:

Массы воздуха в верхней и нижней частях цилиндра одинаковы, кроме того, температура воздуха в верхней части постоянна и равна T_1, а в нижней изменяется от T_1 до T_2, поэтому $P_1V_1 = P_1' V_1'$; $\frac{P_2V_2}{T_1} = \frac{P_2'V_2'}{T_2}$, где P_1, V_1 и P_2, V_2 – начальные, а P_1', V_1' и P_2', V_2' – конечные давления и объемы воздуха в верхней и нижней части сосуда соответственно.

По условию задачи $P_2 = 2P_1$, $V_1' = V_2' = V$. Так как поршень в начальном и конечном состояниях находится в состоянии равновесия, то $P_2 = P_1 + \frac{mg}{S}$; $P_2' = P_1' + \frac{mg}{S}$, где m – масса поршня, S – площадь основания цилиндра. Следовательно, $P_2' = P_1' + P_2 - P_1 = P_1' + 2P_1 - P_1 = P_1 + P_1'$.

Кроме того, $P_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$, $P_2V_2 = \frac{m}{\mu}RT_2$. Следовательно, $P_1V_1 = P_2V_2$. Принимая во внимание, что $P_2 = 2P_1$, получим $V_1 = 2V_2$. Так как $V_1+V_2 = 2V$, то конечные объемы воздуха в верхней и нижней частях $V = \frac{V_1 + V_2}{2} = \frac{3}{4}V_1$.

Подставив значения давлений и объемов в исходные уравнения, получим:

$$P_1V_1 = P_1' \frac{3}{4}V_1;$$

$$\frac{2P_1 \cdot \frac{1}{2}V_1}{T_1} = \frac{(P_1 + P_1') \cdot \frac{3}{4}V_1}{2}.$$

Решим систему уравнений относительно T_2.

$T_2 = \frac{7}{4}T_1$. $\qquad T_2 = 525$ К.

1-7. По газопроводу течет углекислый газ при давлении $p = 5 \cdot 10^5$ Па и температуре $t = 17$ °С. Какова скорость движения газа по трубе, если за $\tau = 5$ мин. через площадь поперечного сечения трубы $S = 6\cdot10^{-4}$ м^2 протекает m = 2,5 кг углекислого газа.

Решение:

Если газ течет со скоростью υ, то за 1 с через площадь S проходит газ в объеме V, отсюда (рис. 7) $\upsilon = \dfrac{V}{S}$.

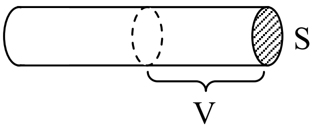

Рис. 7

Чтобы найти объем V, воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона:

$$V = \frac{mRT}{\mu P\tau}.$$

Тогда $V = \dfrac{mRT}{\mu PS\tau}$;

$$\upsilon = \frac{2{,}5\cdot8{,}31\cdot290}{44\cdot10^{-3}\cdot5\cdot10^{5}\cdot6\cdot10^{-4}\cdot300} = 1{,}52 \text{ (м/с)}.$$

1-8. Цилиндр с площадью основания 20 см^2, закрытый поршнем массой 10 кг, находится в стартующей вертикально вверх ракете. Определить ускорение ракеты, если объем газа под поршнем в движущейся ракете в три раза меньше, чем в покоящейся. Давление воздуха в ракете P_0 = 0,1 МПа.

Решение:

Масса газа в цилиндре постоянна, поэтому если пренебречь изменением температуры газа при сжатии, то для решения задачи можно воспользоваться законом Бойля-Мариотта:

$P_1V_1 = P_2V_2$.

По условию задачи $V_1 = nV_2$, где $n = 3$. Так как в покоящейся ракете поршень, закрывающий цилиндр, находится в равновесии, то $P_1 = P_0 + \frac{mg}{S}$. В стартующей ракете поршень движется с ускорением ***a*****,** равным ускорению ракеты. Для нахождения P_2 воспользуемся вторым законом Ньютона: $ma = P_2S - P_1S - mg$, где P_2S – сила давления, действующая на поршень со стороны газа, P_1S – сила давления воздуха, mg – сила тяжести поршня. Следовательно, $P_2 = P_0 + \frac{m}{S}(g + a)$.

Подставив значения P_1, V_1 и P_2 в исходное уравнение, получим:

$(P_0 + \frac{mg}{S})\, nV_2 = (P_0 + \frac{m(g+a)}{S})\, V_2$, откуда искомое значение ускорения

$$a = (n - 1)\left(g + \frac{P_0S}{m}\right).\ a = 60\ м/с^2.$$

1-9. Откачанная лампа накаливания объемом $V = 10\ см^3$ имеет трещину, в которую проникает 10^6 частиц газа в 1 с. Сколько времени понадобится, чтобы в лампе установилось нормальное давление? Температура 0 °С.

Решение:

Определим, сколько молекул газа N_0 должно быть в лампе при нормальном давлении: $N_0 = n_0V$, где n_0 – концентрация молекул, определяемая из уравнения: $P = n_0KT$, $n_0 = \frac{P}{KT}$.

Число молекул будет равно:

$$N_0 = n_0V = \frac{PV}{KT}.$$

Следовательно, считая скорость проникновения молекул в сосуд постоянной, определим время τ:

$$\tau = \frac{N_0}{N} = \frac{PV}{KTN};$$

$\tau = \dfrac{1 \cdot 10^5 \cdot 10^{-5}}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 273 \cdot 10^6} = 2{,}7 \cdot 10^{14}$ (с) или $\tau = 8{,}53 \cdot 10^6$ лет.

1-10. Для получения высокого вакуума в стеклянном сосуде необходимо прогревать его при откачке с целью удалить адсорбированные газы. Определить, на сколько повысится давление в сферическом сосуде радиусом R = 10 см, если все адсорбированные молекулы перейдут со стенок в сосуд. Слой молекул на стенках считать мономолекулярным, сечение σ одной молекулы равно 10^{-15} см^2. Температура Т, при которой производится откачка, равна 600 К.

Решение:

При неизменном объеме сосуда изменение давления происходит только за счет увеличения количества молекул, то есть $\Delta P = \Delta n \cdot KT$, где $\Delta n = \dfrac{\Delta N}{V}$, ΔN – число адсорбированных молекул, которое можно найти, если площадь сферического сосуда разделить на площадь сечения одной молекулы, то есть $\Delta N = \dfrac{S}{\sigma} = \dfrac{4\pi R^2}{\sigma}$; V – объем сосуда, который равен $\dfrac{4}{3}\pi R^3$. Следовательно,

$$\Delta P = \Delta n \cdot KT = \frac{\Delta N}{V} \cdot KT = \frac{4\pi R^2 \cdot KT}{\sigma \cdot \frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3KT}{\sigma R}.$$

ΔP = 2,48 Па.

1-11. По данному графику (рис. 8) определить, как изменяется давление идеального газа при переходе из состояния 1 в состояние 2.

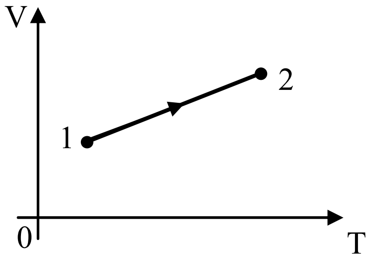

Рис. 8

1-12. Начертите график зависимости плотности газа от температуры при изобарном процессе и зависимости плотности газа от давления при изотермическом процессе.

1-13. На плоскости V, T (рис. 9) показан процесс, который произошел с газом при постоянном давлении и постоянном объеме. Как при этом изменилась масса газа?

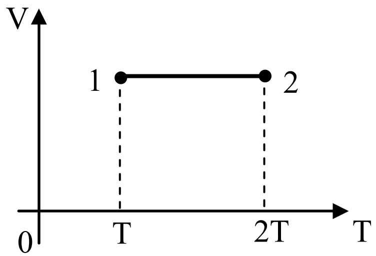

Рис. 9

1-14. На рис. 10 показан процесс, совершаемый над идеальным газом. Температуры газа в точках 1 и 3 равны соответственно 300 К и 400 К. Найдите температуру газа в точке 2.

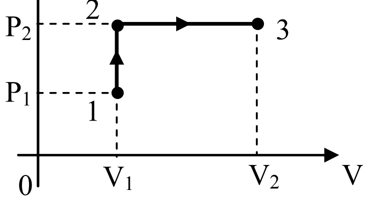

Рис. 10

1-15. Идеальный газ совершает круговой процесс 1–2–3–4–1 (рис. 11). Отдельные участки процесса представляют собой отрезки прямых. Известно, что $V_1 = 1$ м^3, $V_2 = 4$ м^3, $T_1 = 100$ К, $T_2 = 300$ К. Какой объем занимал газ в состоянии 3, находящемся на участке 2→ 4, которое характеризовалось тем же давлением, что и начальное состояние 1?

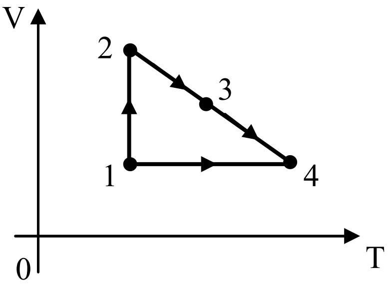

Рис. 11

1-16. Газ перешел из состояния 1 в состояние 2 (рис. 12). Масса газа остается постоянной. Как изменится объем газа?

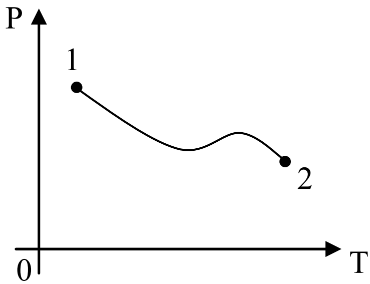

Рис. 12

1-17. Газ последовательно переводится из состояния 1 с температурой T_1 в состояние 2 с температурой T_2, а затем в состояние 3 с температурой T_3 и возвращается в состояние 1. Определить температуру T_3, если процессы изменения состояния происходили так, как это показано на графике (рис. 13), а температуры T_1 и T_2 известны.

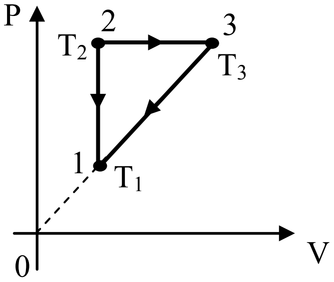

Рис. 13

1-18. В координатах P, V (рис. 14) изображен график зависимости давления P от объема V при переходе идеального газа из состояния 1 в состояние 2. Как изменялась температура в этом процессе?

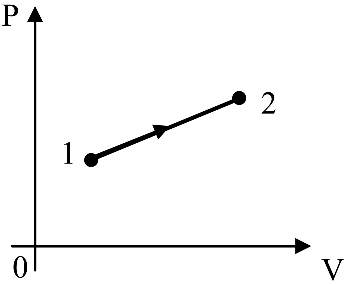

Рис. 14

1-19. График зависимости давления P идеального газа от температуры T в некотором процессе изображен на рис. 15. Определить, сжимался или расширялся газ при переходе из состояния 1 в состояние 2.

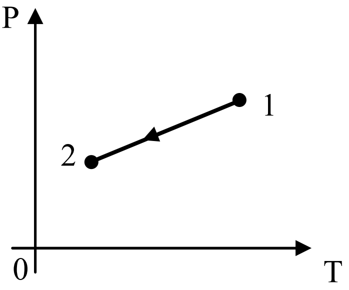

Рис. 15

1-20. На рис. 16 изображены две изотермы для двух различных газов, имеющих одинаковые массу и температуру. Требуется сравнить молярную массу этих газов.

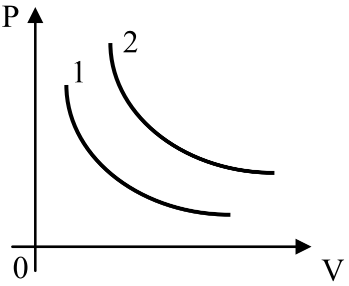

Рис. 16

1-21. Найти отношение максимальной плотности идеального газа к его минимальной плотности, которые достигаются при циклическом процессе, показанном на рис. 17.

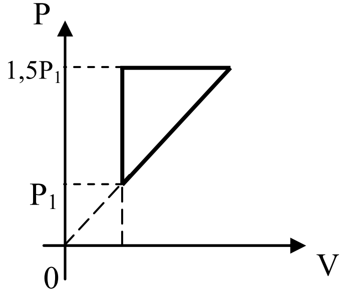

Рис. 17

1-22. Тепловой процесс, который совершается с газом в замкнутом сосуде, на V-T диаграмме имеет вид окружности (рис. 18). В каких точках максимальны и минимальны температуры газа, его объем и давление?

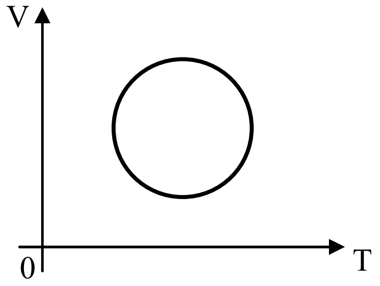

Рис. 18

1-23. На диаграмме P-V изображен процесс расширения газа, при котором газ переходит из состояния 1 с давлением P_0 и объемом V_0 в состояние 2 с давлением $P_0/2$ и объемом $2V_0$ (рис. 19). Изобразите соответствующий процесс на P-T и V-T диаграммах.

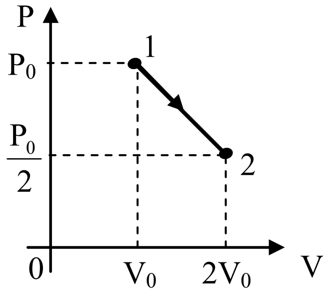

Рис. 19

1-24. Над одним молем идеального газа совершают тепловой процесс, изображенный на рис. 20. Как менялась температура газа на участках 1–2, 2–3, 3–1?

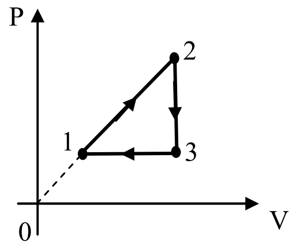

Рис. 20

1-25. На диаграмме V-T (рис. 21) представлены два процесса изобарического нагревания при одном и том же давлении двух различных масс одного и того же идеального газа. Каково соотношение между массами газа?

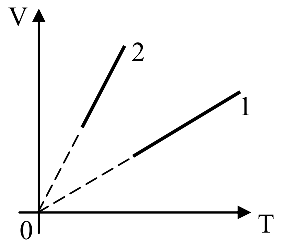

Рис. 21

1-26. На диаграмме P-V (рис. 22) изображены процессы перевода некоторой неизменной массы идеального газа из состояния 1 в состояние 3. Начальная (T_1) и конечная (T_3) температуры газа связаны между собой соотношением. Найти эту связь.

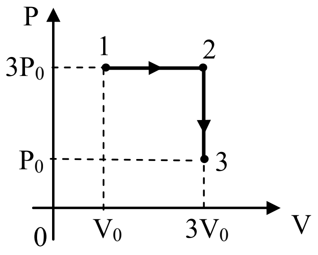

Рис. 22

1-27. На диаграмме P-T (рис. 23) изображен процесс перехода некоторой неизменной массы идеального газа из состояния 1 в состояние 2. Найти соотношение между объемами газа в состоянии 1 (V_1) и состоянии 2 (V_2).

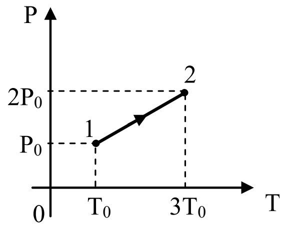

Рис. 23

1-28. На диаграмме P-T (рис. 24) представлена зависимость давления от температуры при изохорном нагревании различных масс одного и того же газа в одинаковых по объему сосудах. Что можно сказать о массах этого газа?

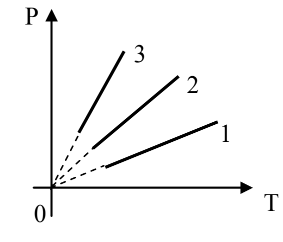

Рис. 24

1-29. На диаграмме V-T (рис. 25) изображены зависимости объема от температуры при изобарном нагревании трех газов – кислорода, гелия и углекислого газа. Массы газов одинаковы, все три газа находятся под одним и тем же давлением. Какой график соответствует какому газу?

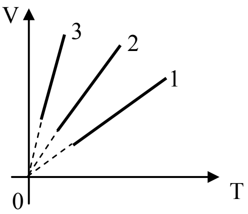

Рис. 25

1-30. На рис. 26 показаны две изобары для газа одной и той же массы. Углы наклона изобар к оси абсцисс равны α_1 и α_2. Как соотносятся давления газа?

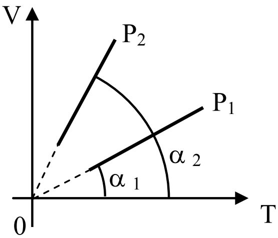

Рис. 26

1-31. На рис. 27 представлен цикл, совершаемый с некоторой массой идеального газа. Как изменится температура газа на участках 1–2 и 2–3?

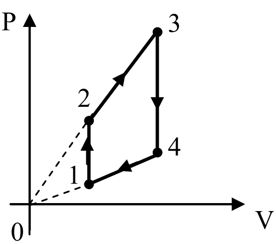

Рис. 27

1-32. Тонкий резиновый шар радиусом r_0 = 2 см наполнен воздухом при температуре t_1 = 20 °C и нормальном давлении $P_1 = 10^5$ Па. Найти зависимость радиуса шара от глубины h его погружения в воду. Каков будет его радиус, если его опустить в воду с температурой t_2 = 4 °C на глубину h = 20 м?

1-33. Во сколько раз изменится подъемная сила воздушного шара, если наполняющий его гелий заменить водородом? Весом оболочки шара пренебречь. Молярная масса воздуха равна 0,029 кг/моль. [27/25].

1-34. В вертикально расположенном цилиндре постоянного сечения под невесомым подвижным поршнем находится воздух. На поршень ставят гирю массой 10 кг. На сколько переместится поршень, если температура воздуха в цилиндре поддерживается постоянной? Атмосферное давление 10^5 Па, площадь сечения поршня 100 $см^2$, расстояние от ненагруженного поршня до дна цилиндра 100 см. [9 см].

1-35. В заполненной с одного конца стеклянной трубке длиной ℓ = 90 см находится столбик воздуха, запертый сверху столбиком ртути высотой h = 30 см; столбик ртути доходит до верхнего края трубки. Трубку осторожно переворачивают открытым концом вниз, причем часть ртути выливается. Какова высота столбика ртути, который останется в трубке, если атмосферное давление H = 750 мм рт. ст.? [3 см].

1-36. Вертикальный цилиндр с тяжелым поршнем наполнен кислородом, масса которого m = 10 г. После увеличения температуры на ΔT = 50 К поршень, имеющий площадь S = 100 $см^2$, поднялся на высоту h = 7 см. Определить вес поршня P, если над поршнем нормальное давление $P_0 = 10^5$Па. Трение поршня о стенки цилиндра не учитывать. [$8{,}5 \cdot 10^2$ Н].

1-37. Давление воздуха внутри бутылки, закрытой пробкой, равно 0,1 МПа при температуре t_1 = 7 °С. На сколько градусов нужно нагреть воздух в бутылке, чтобы пробка вылетела? Без нагревания пробку можно вынуть, прикладывая к ней силу 30 Н. Сечение пробки 2 $см^2$. [140 °С].

1-38. Сосуд емкостью 300 $см^3$ разделен на две части объемами $V_1 = 100$ $см^3$, $V_2 = 200$ $см^3$ подвижным поршнем, не проводящим тепло. Начальная температура газа в сосудах $T_0 = 300$ К, а его давление $P_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па. Затем меньший сосуд охладили до 273 К, а больший нагрели до 373 К. Какое давление установится в сосудах? [$1{,}15 \cdot 10^5$ Па].

1-39. На дне цилиндра, заполненного воздухом, лежит полый стальной шарик радиусом 2 см, массой 0,5 кг. До какого минимального давления надо сжать газ, чтобы шарик поднялся вверх? Температура воздуха 20° С, молярная масса 0,029 кг/моль. [$1{,}25 \cdot 10^6$ Па].

1-40. В баллоне содержится сжатый газ при температуре $t_1 = 27$ °С и давлении $P_1 = 4$ МПа. Каково будет давление, если из баллона выпустить $n = 0{,}4$ массы газа, а температуру понизить до $t_2 = 17°$ С? [$2 \cdot 10^6$ Па].

1-41. Тонкостенный резиновый шар массой 0,06 кг наполнен неоном и погружен в озеро на глубину 120 м. Найти массу неона, если шар находится в равновесии. Атмосферное давление 0,1 МПа, температура воды 4 °С. Упругостью резины пренебречь. [$2{,}7 \cdot 10^{-4}$ кг].

1-42. За время $t = 10$ суток из стакана полностью испарилось $m = 100$ г воды. Сколько в среднем молекул вылетало с поверхности воды за 1 с?

1-43. Сосуд, содержащий $m_1 = 2$ г гелия, разорвался при температуре 400° С. Какое максимальное количество азота может храниться в таком сосуде при 30 °С и при пятикратном запасе прочности? [$6 \cdot 10^{-3}$ кг].

1-44. Оболочка аэростата заполняется газом не полностью. По мере подъема аэростата атмосферное давление убывает и оболочка расширяется. На какой высоте H газ займет весь объем оболочки $V_1 = 600$ м^3, если она была наполнена гелием в количестве $V_2 = 500$ м^3 при давлении $P_0 = 10^5$ Па? Атмосферное давление убывает вблизи земли на $\Delta P = 133$ Па при подъеме на каждые $\Delta h = 11$ м. Температуру считать постоянной, не зависящей от высоты. [1380 м].

1-45. Два сосуда с газом одинакового объема V соединены тонкой капиллярной трубкой, имеющей площадь поперечного сечения S. В середине капилляра находится капля ртути. Найти зависимость между относительным изменением температуры $\frac{\Delta T}{To}$ и смещением капли $\Delta\ell$, если начальная температура газа в обоих баллонах была равна T_0 и нагревается только один баллон. [$\frac{\Delta T}{To} = \frac{2S\Delta\ell}{V - S\Delta\ell}$].

1-46. Цилиндрической формы сосуд заполнен газом при температуре $t = 27$°C и давлении $P_0 = 100$ кПа и разделен пополам подвижной перегородкой. Каково будет давление P_1, если газ в одной половине нагрет до температуры $t_1 = 57$ °C, а во второй половине температура газа осталась без изменения? [105 кПа].

1-47. Газ в цилиндрическом сосуде разделен на две части легкоподвижным поршнем, имеющим массу m и площадь S. При горизонтальном положении цилиндра давление газа в сосуде по обе стороны поршня одинаково и равно p. Определить давление P_1 газа над поршнем, когда цилиндр расположен вертикально. Температуру считать постоянной.

$$\left[p_1 = \frac{1}{2}\left[p - \frac{mg}{S} + \sqrt{p^2 + \left(\frac{mg}{S}\right)^2} \right] \right].$$

1-48. Воздух в открытом сосуде нагревают от температуры $t_1 = 10$ °С до температуры $t_2 = 600$ °С, затем, герметически закрыв сосуд, охлаждают воздух в нем до первоначальной температуры. Определить плотность воздуха в сосуде при температуре t_2 и после охлаждения. Плотность воздуха при нормальных условиях $\rho_0 = 1{,}3$ кг/м^3. Изменением объема сосуда пренебречь. [0,41 кг/м^3].

1-49. В запаянной цилиндрической трубке, расположенной горизонтально, находится воздух при нормальных условиях. Трубка разделена легкоподвижным поршнем на две части, объемы которых V_1 и V_2 относятся как 1:2. До какой температуры t_1 следует нагреть меньшую часть и до какой температуры t_2 охладить большую, чтобы поршень делил трубку на две равные части, если нагревание и охлаждение обоих частей производить при условии $\frac{V}{T} = \text{const}$? [$t_1$ = 137°С; t_2 = – 68 °С].

1-50. Закрытый с обоих концов цилиндр наполнен газом при давлении P = 100 кПа и температуре t = 30 °С и разделен легкоподвижным поршнем на две равные части длиной по L = 50 см. На какую величину ΔT нужно повысить температуру газа в одной половине цилиндра, чтобы поршень сместился на расстояние $\ell = 20$ см, если во второй половине цилиндра температура не изменится? Определить давление газа после смещения поршня. [404 К; 167 кПа].

1-51. В каждую из четырех шин автомобиля накачано по $V_1 = 200$ л воздуха при температуре $t_1 = 17$ °С. Объем шины $V_2 = 54{,}6$ л, площадь сцепления шины с грунтом при температуре $t_2 = 0°$ С равна S = 290 см^2. Найти вес автомобиля. Атмосферное давление $P_0 = 100$ кПа. [$4 \cdot 10^4$ Н].

2. Молекулярно-кинетическая теория газов

Основные формулы

1. Количество вещества

$$\upsilon = \frac{m}{\mu} \quad \text{или} \quad \upsilon = \frac{N}{N_A}, \qquad (2.1)$$

где N – число структурных элементов системы (молекул, атомов, ионов и т. п.), N_A – постоянная Авогадро, m – масса, μ – молярная масса.

2. Концентрация частиц (молекул, атомов и т. п.) однородной системы

$$n = \frac{N}{V}, \qquad (2.2)$$

где V – объем системы.

3. Основное уравнение кинетической теории газов

$$P = \frac{1}{3} m_0 n V^2_{ср.} = \frac{2}{3} n\, E_{ср.}, \qquad (2.3)$$

где m_0 – масса частицы (молекулы, атома и т. п.), $V^2_{ср.}$ – среднее значение квадрата скорости, $E_{ср.}$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы.

4. Зависимость средней кинетической энергии поступательного движения молекул от температуры.

$$E_{ср.} = \frac{3}{2} KT, \qquad (2.4)$$

где К – постоянная Больцмана, равная $K = \frac{R}{N_A}$, N_A – постоянная Авогадро (число молекул, содержащихся в одном моле вещества).

5. Скорость молекул.

а) Средняя квадратичная

$$\upsilon_{кв.} = \sqrt{\frac{3KT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}. \quad (2.5)$$

б) Средняя арифметическая

$$\upsilon_{ар.} = \sqrt{\frac{8KT}{n m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{n\mu}}. \quad (2.6)$$

в) Наиболее вероятная

$$\upsilon_{в.} = \sqrt{\frac{2KT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}. \quad (2.7)$$

Методические указания

Вопросы, затрагиваемые в этой теме, очень существенны для понимания природы явлений, обусловливаемых тепловым движением молекул. Упрощения, используемые в данной теме, заключаются в следующем:

1. Вместо того чтобы рассматривать действительное распределение молекул по направлениям их скоростей, предполагается, что молекулы газа движутся в трех взаимно-перпендикулярных направлениях. Вследствие равной вероятности любого направления для скорости молекулы мы предполагаем, что по каждому из трех взаимно-перпендикулярных направлений движется одна треть всех молекул.

2. Часто действительное распределение молекул по модулю скорости заменяется предположением о равенстве скоростей всех молекул по абсолютной величине.

3. При распределении ударов молекул о площадку ΔS за время Δt истинное число ударов заменяется средним.

Решение задач

2-1. Плотность некоторого газа $\rho = 0{,}06$ кг/м^3, средняя квадратичная скорость его молекул $\upsilon_{кв.} = 500$ м/с. Найти давление P, которое газ оказывает на стенки сосуда.

Решение:

Давление газа определяется основным уравнением МКТ:

$$P = \frac{1}{3} m_0 n\, V^2_{ср.}, \qquad (1)$$

где m_0 – масса молекулы, n – (концентрация молекул) число молекул в единице объема, $V^2_{ср.}$ – среднее значение квадрата скорости молекул.

Преобразуем выражение $m_0 n = \dfrac{m_0 \cdot N}{V} = \dfrac{m}{V} = \rho$, где ρ – плотность газа.

Тогда уравнение (1) можно записать следующим образом:

$$P = \frac{1}{3} \rho V^2_{кв.};$$

$$P = \frac{1}{3} \cdot 0{,}06 \cdot (500)^2 = 5 \cdot 10^3 \text{ (Па)} = 5 \text{ кПа}.$$

2-2. Энергия поступательного движения молекул азота, находящегося в баллоне объемом V = 20 л, W = 5 кДж, а средняя квадратичная скорость его молекул $V_{кв.} = 2 \cdot 10^3$ м/с. Найти массу m азота в баллоне и давление P, под которым он находится.

Решение:

Энергия поступательного движения молекул азота $W = \dfrac{mV^2_{кв.}}{2}$, откуда $m = \dfrac{2W}{V^2_{кв.}}$; m = 2,5 г.

Согласно основному уравнению МКТ

$$P = \frac{2}{3} n \frac{m_0 V_{кв.}^2}{2}, \qquad (1)$$

где n – число молекул в единице объема, m_0 – масса одной молекулы. Произведение $nm_0 = \rho$ – равно плотности газа. Тогда $nm_0V = \rho V = m$ – масса всего азота, находящегося в баллоне. Умножив правую и левую части уравнения (1) на V, получим:

$$PV = \frac{2}{3} nm_0V \frac{V_{кв.}^2}{2} = \frac{2}{3} m \frac{V_{кв.}^2}{2} = \frac{2}{3} W, \text{ откуда } P = \frac{2W}{3V};$$

P = 167 кПа.

2-3. Молярная энергия диссоциации W_m (энергия, затрачиваемая на диссоциацию всех молекул газа, содержащего количество вещества, равное молю) водорода равна 419 кДж/моль. При какой температуре T газа средняя кинетическая энергия $E_{ср.}$ поступательного движения его молекул достаточна для их расщепления?

Решение:

Найдем среднюю кинетическую энергии поступательного движения молекул газа, равное числу Авогадро:

$E_{ср.} = \frac{3}{2} KT \cdot N_A = \frac{3}{2} RT$, где $\frac{3}{2} KT$ – среднее значение кинетической энергии поступательного движения одной молекулы. По условию задачи $E_{ср.} = W_m$, то есть $\frac{3}{2} RT = W_m$, откуда $T = \frac{2W_m}{3R}$. T = 33,6 кК.

2-4. В баллоне вместимостью V = 1 л находится азот при нормальных условиях. Когда азот нагрели до температуры T = 1,8 кК, то часть молекул азота оказалась диссоциированной на атомы. Степень диссоциации $\alpha = 0{,}3$. Определить:

1) количество вещества υ и концентрацию n молекул азота до нагревания;

2) количество вещества $\upsilon_м$ и концентрацию $n_м$ молекул молекулярного азота после нагревания;

3) количество вещества $\upsilon_а$ и концентрацию $n_а$ атомов атомарного азота после нагревания;

4) полное количество вещества $\upsilon_{пол.}$ и концентрацию $n_{пол.}$ частиц в сосуде после нагревания.

Диссоциацией молекул при нормальных условиях пренебречь.

Примечание: Степенью диссоциации называют отношение числа молекул, распавшихся на атомы, к общему числу молекул газа.

Решение:

1. Из уравнения состояния идеального газа найдем количество вещества υ молекул азота до нагревания: $P_0V = \upsilon RT_0$, откуда $\upsilon = \dfrac{P_0V}{RT_0}$, где P_0 и T_0 – давление и температура азота при нормальных условиях, то есть

$P_0 = 760$ мм рт. ст. $\approx 10^5$ Па,

$T_0 = 0°C = 273$ К. $\upsilon = 44{,}6$ ммоль.

Концентрацию n молекул азота до нагревания найдем из уравнения $P_0 = nkT_0$, откуда $n = \dfrac{P_0}{kT_0}$, $n = 2{,}69\cdot10^{25}$ м$^{-3}$.

2. Найдем все число молекул N азота до нагревания: $N = nV = \dfrac{P_0V}{kT_0}$.

3. Зная степень диссоциации $\alpha = \dfrac{N_p}{N}$, найдем число N_p распавшихся молекул, то есть $N_p = \alpha N$.

4. Число нераспавшихся молекул $N_м$ будет равно:

$$N_м = N - N_p = N - \alpha N = N\,(1 - \alpha).$$

Тогда количество вещества $\upsilon_м$ молекул молекулярного азота после нагревания будет равно:

$$\upsilon_м = \frac{N_м}{N_A} = \frac{N(1-\alpha)}{N_A} = \frac{P_0V(1-\alpha)}{kT_0 \cdot N_A} = \frac{P_0V(1-\alpha)}{RT_0};$$

$\upsilon_м = 31{,}2$ ммоль.

Концентрация $n_м$ молекул молекулярного азота после нагревания будет равна:

$$n_м = \frac{N_м}{V} = \frac{N(1-\alpha)}{V} = n\,(1-\alpha);\; n_м = 1{,}88 \cdot 10^{25}\ м^{-3}.$$

5. В результате распада одной молекулы азота получается два атома. Поэтому все число N_a атомов, которое получилось при распаде, будет равно:

$N_a = 2 \cdot N_р = 2\alpha N.$

Количество вещества υ_a атомов атомарного азота после нагревания:

$$\upsilon_a = \frac{N_a}{N_A} = \frac{2\alpha N}{N_A};\; \upsilon_а = 26{,}8\ ммоль.$$

Концентрация $n_а$ атомов атомарного азота после нагревания:

$$n_а = \frac{N_A}{V} = \frac{2\alpha N}{V} = 2\alpha N;\; n_а = 1{,}61 \cdot 10^{25}\ м^{-3}.$$

6. Найдем полное количество вещества $\upsilon_{пол.}$ частиц в сосуде после нагревания:

$$\upsilon_{пол.} = \upsilon_м + \upsilon_а = \frac{N(1-\alpha)}{N_A} + \frac{2\alpha N}{N_A} = \frac{N(1-\alpha+2\alpha)}{N_A} =$$

$$= \frac{N(1+\alpha)}{N_A} = \upsilon\,(1+\alpha);\; \upsilon_{пол.} = 58\ ммоль.$$

Концентрация $n_{пол.}$ частиц в сосуде после нагревания будет равна:

$n_{пол.} = n_м + n_а = n(1-\alpha) + 2\alpha n = n(1+\alpha);\; n_{пол.} = 3{,}49 \cdot 10^{25} м^3.$

2-5. На пути молекулярного пучка, состоящего из молекул кислорода, стоит зеркальная стенка. Найти давление, испытываемое этой стенкой, если скорость молекул в пучке $\nu = 10^3$ м/с, концентрация $n = 10^{17}$ $м^{-3}$.

Рассмотреть случаи:

1. Скорость молекул перпендикулярна стенке.
2. Стенка движется навстречу потоку со скоростью $\nu_{ст.} = 500$ м/с.
3. Скорость молекул направлена под углом 60° к неподвижной стенке.

Решение:

Давление на стенку обусловлено ударами молекул.

В первом случае изменение импульса молекулы равно $2m_0\nu$, так что на стенку действует импульс силы $f \cdot \Delta t = 2m_0\nu$. За промежуток времени Δt о стенку ударяется $N = n \cdot \nu\ \Delta tS$ молекул, где S – площадь стенки, следовательно, импульс силы, действующей на стенку за Δt, равен:

$f\,\Delta t = N \cdot 2m_0\nu$, или

$f\,\Delta t = 2n\nu^2 m_0 S\Delta t$.

Отсюда $P = \dfrac{f}{S} = 2m_0\nu^2 n$.

Во втором случае относительно стенки молекула движется со скоростью $\nu_1' = \nu + \nu_{ст.}$. Молекула взаимодействует со стенкой упруго, следовательно, скорость, с которой она отскакивает от стенки, относительно стенки равна:

$\nu_2' = -\nu_1'$.

Скорость молекулы относительно неподвижной системы отсчета есть u и связана со скоростью ν_2':

$\nu_2' = \nu_{ст.} - u$, или

$\nu + \nu_{ст.} = u - \nu_{ст.}$, откуда $u = \nu + 2\nu_{ст}$.

Изменение скорости молекулы равно

$\Delta\nu = \nu + 2\nu_{ст.} - (-\nu) = 2(\nu + \nu_{ст.})$.

Изменение импульса молекулы равно $2m_0(\nu + \nu_{ст.})$.

Импульс силы равен $f{\cdot}\Delta t = 2m_0(\nu + \nu_{ст.})N$,

где $N = n(\nu + \nu_{ст.})\Delta tS$. Откуда сила $f = 2m_0(\nu + \nu_{ст.})^2 n$.

В третьем случае скорость молекул направлена под углом α, поэтому при ударе изменяется только x-компонента скорости, $\Delta v_y = 0$ и, соответственно, $f_y\Delta t = 0$.

Итак, $\Delta P_x = 2m_0 v \cos\alpha$, $f_x\Delta t = 2m_0 v \cos\alpha$.

Очевидно, что

$f_x\Delta t = n2m_0 v \cos\alpha\, (v \cos\alpha)\, S\Delta t = 2m_0 n v^2(\cos^2\alpha)\cdot S\cdot\Delta t$,

$P = 2nm_0 v^2\cos^2\alpha$.

Масса молекулы кислорода равна $m_0 = \dfrac{\mu}{N_A}$, где μ – молярная масса, N_A – число Авогадро.

Итак:

1) $P = 2\dfrac{\mu}{N_A}v^2 n$; $P = 0{,}011$ Па.

2) $P = 2\dfrac{\mu}{N_A}(v + v_{ст.})^2 n$; $P = 0{,}024$ Па.

3) $P = 2\dfrac{\mu}{N_A}v^2 n\cos^2\alpha$; $P = 2{,}7 \cdot 10^{-3}$ Па.

2-6. С какой скоростью растет толщина покрытия стенки серебром при напылении, если атомы серебра, обладая энергией $E_{ср.}=10^{-17}$ Дж, производят давление на стенку $P = 0{,}1$ Па?

Решение:

Если за время Δt толщина слоя серебра стала равной Δℓ, то скорость роста толщины покрытия есть $\dfrac{\Delta\ell}{\Delta t}$. Объем напыленного слоя $\Delta V = S\,\Delta\ell$, где S – площадь поверхности стенки.

Этот объем можно выразить так: $\Delta V = \dfrac{m}{\rho} = \dfrac{m_0 N}{\rho}$,

где m – масса серебряного покрытия, напыленного за время Δt, m_0 – масса молекулы, N – число молекул.

Определим суммарную массу молекул серебра, осевших на стенку.

Изменение импульса молекулы, осевшей на стенку со скоростью ν, равно импульсу силы, подействовавшей на стенку со стороны молекулы:

$f\Delta t = m_0\Delta\nu = m_0(0 - \nu) = -m_0\nu$.

На стенку подействует импульс силы $f_{ст.}\Delta t = +m_0\nu$.

Если на стенку за время Δt осядут N молекул, то импульс силы, подействовавшей на стенку, будет:

$F\Delta t = N\nu m_0$.

Давление на стенку есть

$$P = \frac{F}{S} \text{ или } P = \frac{N\nu m_0}{S \cdot \Delta t}.$$

Средняя кинетическая энергия молекулы равна

$$E_{ср.} = \frac{m_0\nu^2}{2}, \ \nu = \sqrt{\frac{2E_{ср.}}{m_0}}.$$

Подставив выражение для скорости в (1), получим:

$$P = \frac{Nm_0}{S \cdot \Delta t} \cdot \sqrt{\frac{2E_{ср.}}{m_0}} = \frac{N\sqrt{2m_0E_{ср.}}}{S \cdot \Delta t}.$$

Отсюда имеем: $N = \dfrac{PS \cdot \Delta t}{\sqrt{2m_0E_{ср.}}}$,

$$\Delta\ell = \frac{m_0P\Delta t \cdot S}{\rho \cdot \sqrt{2m_0E_{ср.}} \cdot S} = \frac{m_0P\Delta t}{\rho \cdot \sqrt{2m_0E_{ср.}}}, \ \frac{\Delta\ell}{\Delta t} = \frac{\sqrt{m_0} \cdot P}{\rho \cdot \sqrt{2E_{ср.}}}.$$

Масса атома серебра $m_0 = \dfrac{\mu}{N_A}$.

$$\frac{\Delta\ell}{\Delta t} = \sqrt{\frac{\mu}{N_A \cdot E_p}} \cdot \frac{P}{\rho};$$

$$\frac{\Delta\ell}{\Delta t} = 9 \cdot 10^{-10} \text{ м/с}.$$

2-7. Два одинаковых сосуда, содержащих одинаковое число молекул азота, соединены краном. В первом сосуде $v_{кв.1}$ = 400 м/с, во втором сосуде $v_{кв.2}$ = 500 м/с. Кран открывают. Чему будет равна средняя квадратичная скорость молекул после того, как установится равновесие? [453 м/с].

2-8. Определить плотность кислорода при давлении $2 \cdot 10^5$Па, если средняя квадратичная скорость его молекул равна $1 \cdot 10^3$ м/с. [0,6 кг/м^3].

2-9. Оцените число молекул воздуха N, попадающих на 1 см^2 стены комнаты за 1 с. Давление $P_{атм.}$= $1 \cdot 10^5$ Па, t = 27 °C, масса моля воздуха μ = 0,029 кг/моль. [$2 \cdot 10^{23}$ с$^{-1}$].

2-10. В сосуде, объем которого V = 0,5 л, находится 1 г парообразного йода ($I_г$). При температуре 1000 °C давление в сосуде равно 700 мм рт. ст. Найти степень диссоциации молекул йода при этих условиях (μ = 254 г/моль). [0,12].

2-11. На пути молекулярного пучка стоит зеркальная стенка. Найти давление, испытываемое этой стенкой, если скорость молекул в пучке v, а концентрация – n, масса одной молекулы m_0. Стенка расположена перпендикулярно скорости пучка. [$P = 2m_0v^2n$].

2-12. На пути молекулярного пучка находится зеркальная стенка, движущаяся навстречу молекулам с постоянной скоростью u. Найти давление, испытываемое стенкой, если скорость молекул в пучке c, концентрация молекул – n, масса каждой молекулы m_0. Стенка расположена перпендикулярно скорости пучка. [$P = 2nm(c + u)^2$].

2-13. Скорость упорядоченного движения молекул относительно земли u, концентрация молекул n, масса каждой молекулы m_0. Перпендикулярно к скорости молекулярного пучка поставлен экран. Экран движется навстречу молекулам с постоянной относительно Земли скоростью v. Газ и экран имеют одинаковую температуру. Определите, насколько уменьшится давление, производимое на экран, если экран остановится и упорядоченное движение молекул прекратится. [$\Delta P = 2nm_0(v + u)^2$].

2-14. Сколько молекул кислорода содержится в сосуде объемом $V = 100$ см^3, если при хаотическом движении со средней квадратичной скоростью $v_{кв.} = 400$ м/с молекулы газа оказывают на стенки сосуда давление $P = 1 \cdot 10^4$ Па? [$3{,}52 \cdot 10^{20}$].

2-15. Определить среднюю квадратичную скорость молекул газа, плотность которого при давлении $p = 5 \cdot 10^4$ Па равна $\rho = 4{,}1 \cdot 10^{-2}$ кг/м^3. [1910 м/с].

2-16. Энергия поступательного движения, которой обладают все молекулы газа, находящегося в объеме 0,02 м^3 при 17 °С, составляет 0,66 Дж. Найти концентрацию молекул этого газа. [$5{,}5 \cdot 10^{15}$ см$^{-3}$].

2-17. Среднеквадратичная скорость молекул газа равна 500 м/с. Какой объем займет газ массой 1 кг при атмосферном давлении? [833 л].

2-18. Оценить минимальное расстояние между центрами соседних атомов железа, считая его кристаллическую решетку кубической. [230 пм].

2-19. Какое время понадобится для того, чтобы на поверхность стекла нанести слой серебра толщиной 5 мкм, используя для этого атомарный пучок, в котором атомы серебра, имеющие концентрацию 10^{18} м$^{-3}$, движутся со скоростью 390 м/с? [12,5 мин.].

2-20. В комнате размером 4х5х2,7 м испарился кристаллик йода массой 20 мг. Сколько молекул йода оказалось в 1 см^3 воздуха комнаты при условии их равномерного распределения? Молярная масса йода равна 127 г/моль. [$1{,}75 \cdot 10^{12}$] кг.

2-21. За 20 суток из стакана полностью испарилось 0,2 кг воды. Сколько в среднем молекул вылетало с поверхности воды за 1 с? [$3{,}9 \cdot 10^{18}$].

2-22. Считая, что диаметр молекул водорода составляет около 0,23 нм, подсчитать, какой длины получилась бы нить, если бы все молекулы, содержащиеся в 1 мг этого газа, были расположены в один ряд вплотную друг к другу. [69 Гм].

2-23. Одна треть молекул азота массой m = 10 г распалась на атомы. Определить полное число N частиц, находящихся в таком газе. [$2{,}86 \cdot 10^{20}$].

2-24. Определить среднее расстояние между центрами молекул водяных паров при нормальных условиях и сравнить его с диаметром d самих молекул (d = 0,31 нм).

[$b_{ср.} = \sqrt[3]{\dfrac{V_0}{N_A}}$; $\dfrac{b_{ср.}}{d} = 11$].

2-25. Ампула объемом V = 1 см^3, содержащая воздух при нормальных условиях, оставлена в космосе, где давление можно считать равным нулю. В ампуле пробито отверстие. Через какое время t давление в ампуле станет равным нулю, если считать, что через отверстие каждую секунду вылетает сто миллионов молекул? [8500 лет].

2-26. Диаметр молекулы азота примерно равен d = $3 \cdot 10^{-8}$ см. Считая, что молекулы имеют сферическую форму, найти, какая часть объема, занимаемого газом, приходится на объем самих молекул при температуре $t = 0$ °C и нормальном атмосферном давлении $P_0 \approx 100$ кПа? [0,038 %].

2-27. Сосуд, имеющий форму кубика, содержит $\upsilon = 10^{-3}$ молей идеального газа. Будем считать, что к каждой из шести граней кубика перпендикулярно к граням в любой момент времени движется одинаковое число молекул. Найти давление газа, если масса молекулы $m_0 = 3 \cdot 10^{-23}$ г и средняя скорость теплового движения молекул $\nu = 500$ м/с. Считать удары молекул о стенки сосуда абсолютно упругими. [1,5 Па].

3. Смеси газов

Основные формулы

1. Закон парциальных давлений (закон Дальтона)

$$P = P_1 + P_2 + \ldots + P_n, \tag{3.1}$$

где P – давление смеси газов, P_i – парциальное давление i-го компонента смеси, n – число компонентов смеси.

2. Массовая доля i-го компонента смеси газа.

$$W_i = \frac{m_i}{m}, \tag{3.2}$$

где m_i – масса i-го компонента смеси, m – масса смеси.

Методические указания

1. Парциальным называется давление, которое оказывал бы газ, входящий в состав смеси, если бы он был один в этом сосуде. С точки зрения молекулярной физики, согласно которой давление объясняется ударами молекул о стенки сосуда, закон Дальтона означает, что действия на стенки молекул каждого из газов складываются.

2. Закон Дальтона применим и при добавлении в сосуд, в котором уже находится газ под давлением P, некоторого количества этого же газа. В этом случае парциальное давление добавленного газа можно рассчитывать так, как если бы сосуд был пустой. Окончательное же давление будет складываться из этого парциального давления и давления P.

3. В уравнение состояния идеального газа $PV = \frac{m}{\mu}RT$ входит отношение массы газа m к его молярной массе μ, равное числу молей газа. Таким образом, поведение газа определяется не массой, а числом молей. Это особенно важно, если приходится рассматривать смесь газов. В этом случае полное

давление смеси (при заданных объеме и температуре) будет определяться общим количеством молей:

$$PV = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + ...\right)RT. \qquad (3.3)$$

4. Молярная масса смеси газов в соответствии с формулой (3.3) будет равна:

$$\mu = \frac{m_1 + m_2 + ... + m_k}{\upsilon_1 + \upsilon_2 + ... + \upsilon_k}, \qquad (3.4)$$

где m_i – масса i-го компонента смеси, υ_i – количество вещества (число молей) i-го компонента смеси, k – число компонентов смеси.

Решение задач

3-1. Найти молярную массу воздуха, считая, что он состоит по массе из одной части кислорода и трех частей азота ($m_1 : m_2 = 1:3$). [6, С. 62].

Решение:

Запишем уравнение состояния для смеси:

$$PV = \frac{m_1 + m_2}{\mu_{см}}. \qquad (1)$$

Далее записываем уравнения состояния для каждого газового компонента:

$$P_1V = \frac{m_1}{\mu_1}RT; \qquad (2)$$

$$P_2V = \frac{m_2}{\mu_2}RT. \qquad (3)$$

Здесь P_1 и P_2 – парциальные давления каждой компоненты. Для смеси справедлив закон Дальтона:

$$P = P_1 + P_2. \qquad (4)$$

Складывая почленно равенства (2) и (3), получим с учетом (4):

$$PV = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)RT. \qquad (5)$$

Сравнивая (1) и (5), найдем:

$$\frac{m_1 + m_2}{\mu_{см}} = \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}, \text{ откуда } \mu_{см} = \frac{\mu_1\mu_2(m_1 + m_2)}{\mu_1 m_2 + \mu_2 m_1}.$$

$$\mu_{см} = \frac{\mu_1\mu_2(m_1 + 3m_1)}{\mu_1 3m_1 + \mu_2 m_1} = \frac{4\mu_1\mu_2}{3\mu_1\mu_2}. \quad \mu_{см} = 0{,}029 \text{ кг/моль}.$$

3-2. В двух сосудах емкостью $V_1 = 3$ л и $V_2 = 5$ л находятся соответственно азот под давлением $P_1 = 100$ кПа и окись углерода под давлением $P_2 = 500$ кПа. Сосуды соединяют тонкой трубкой, объемом которой можно пренебречь. Найти установившееся давление смеси, если начальная температура обоих газов равна температуре окружающей среды.

Решение:

Как бы ни протекал процесс смешения газов, в конце процесса установится температура, равная температуре окружающей среды, которая, по условию, равна начальной температуре. После смешения каждый из газов будет занимать объем, равный сумме объемов обоих сосудов; давление смеси будет равно сумме парциальных давлений каждого из газов. Вследствие равенства начальной и конечной температур по закону Бойля-Мариотта можно найти парциальное давление каждого газа:

$$P_1V_1 = P_1'(V_1+V_2); \qquad P_1' = \frac{P_1V_1}{V_1 + V_2};$$

$$P_2V_2 = P_2'(V_1+V_2); \qquad P_2' = \frac{P_2V_2}{V_1 + V_2}.$$

По закону Дальтона

$$P = P_1' + P_2' = \frac{P_1V_1}{V_1+V_2} + \frac{P_2V_2}{V_1+V_2} = \frac{P_1V_1 + P_2V_2}{V_1+V_2};$$

P = 3,5 кПа.

3-3. Определить плотность смеси, состоящей из 4 г водорода и 32 г кислорода при температуре 7 °С и давлении 93,3 кПа.

Решение:

Искомая плотность смеси $\rho = \frac{m_1 + m_2}{V}$. По закону Дальтона $P = P_1 + P_2$, где P_1 – давление водорода, P_2 – давление кислорода.

Применяя к водороду и кислороду уравнение Менделеева-Клапейрона, получим $P_1V = \frac{m_1}{\mu_1}RT$, $P_2V = \frac{m_2}{\mu_2}RT$, где μ_1 и μ_2 – молярные массы водорода и кислорода. Следовательно, $(P_1 + P_2)V = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)RT$, откуда объем смеси

$$V = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)\frac{RT}{\rho}.$$

Подставив значение объема в исходную формулу, получим:

$$\rho = \frac{(m_1 + m_2)P}{\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)RT}; \quad \rho = 0{,}481 \text{ кг/м}^3.$$

3-4. В сосуде объемом 1 дм^3 находится 1 г трития при температуре 27 °С. За 12,4 года половина ядер трития превращается в ядра гелия. Определить давление в сосуде в конце этого срока.

Решение:

Ядро трития, состоящее из двух нейтронов и одного протона, является нестабильным и с периодом полураспада 12,4 года распадается на ядро гелия, электрон и электронное антинейтрино. Следовательно, в конце срока в сосуде будет смесь трития ($\mu_1 = 6 \cdot 10^{-3}$кг/моль) и гелия ($\mu_2 = 3 \cdot 10^{-3}$кг/моль).

По закону Дальтона давление в сосуде равно сумме парциальных давлений трития P_1 и гелия P_2, то есть $P = P_1 + P_2$, которые можно определить из уравнения Менделеева-Клапейрона: $P_1V = \dfrac{m_1}{\mu_1}RT$, $P_2V = \dfrac{m_2}{\mu_2}RT$.

Отсюда $P = \dfrac{RT}{V}\left(\dfrac{m_1}{\mu_1} + \dfrac{m_2}{\mu_2}\right)$.

По условию задачи распалась половина ядер трития, следовательно, масса трития в конце срока равна массе гелия в сосуде, то есть $m_1 = m_2 = \dfrac{1}{2}m$, где m – начальная масса трития. Подставляя значения масс в формулу давления, получим:

$$P = \frac{m(\mu_1 + \mu_2)RT}{2\mu_1\mu_2V}; \quad P = 6{,}2 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

3-5. В сосуде объемом V = 0,5 л находится масса m = 1 г парообразного йода ($I_г$). При температуре t = 1000 °С давление в сосуде P_c = 93,3 кПа. Найти степень диссоциации молекул йода на атомы. Молярная масса молекул йода μ = 0,254 кг/моль.

Решение:

Степенью диссоциации α называют отношение числа молекул, распавшихся на атомы, к общему числу молекул газа, то есть $\alpha = \dfrac{N_p}{N}$ или $\alpha = \dfrac{\upsilon_p}{\upsilon}$, так как $N = \upsilon \cdot N_A$, где υ – число молей, N_A – постоянная Авогадро. Число молей молекул йода до распада равно $\upsilon = \dfrac{m}{\mu}$, число молей атомарного йода $\upsilon_а = \dfrac{2\alpha m}{\mu}\left(\upsilon_p = \alpha\upsilon; \upsilon_a = 2\alpha\upsilon\right)$, число молей нераспавшихся молекул $\upsilon_\mu = \upsilon - \upsilon_p = \upsilon - \alpha\upsilon = \upsilon(1 - \alpha) = \dfrac{m}{\mu}(1-\alpha)$.

По закону Дальтона $P_с = P_а + P_м$, где $P_а$ и $P_м$ – парциальные давления соответственно атомарного и молекулярного йода, которые найдем из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$P_аV = \upsilon_аRT,\ P_аV = \frac{2\alpha mRT}{\mu},\ P_а = \frac{2\alpha mRT}{\mu \cdot V};$$

$$P_мV = \upsilon_\mu RT,\ P_мV = \frac{(1-\alpha)mRT}{\mu},\ P_м = \frac{(1-\alpha)mRT}{\mu V}.$$

$$P_с = P_а + P_м = \frac{2\alpha mRT}{\mu \cdot V} + \frac{(1-\alpha)mRT}{\mu V} =$$

$$= \frac{mRT(2\alpha + 1 - \upsilon)}{\mu V} = \frac{mRT(1+\alpha)}{\mu V},\ \text{откуда}\ \alpha = \frac{P_c \cdot \mu V}{mRT} - 1.$$

$\alpha = 0{,}12$

3-6. Камера заполняется смесью 4 г водорода и 32 г кислорода при температуре 27 °С. Камера герметизируется, и производится взрыв. Сразу после того, как реакция соединения водорода с кислородом заканчивается, давление в камере в два раза больше первоначального. Какая в камере температура? Молярная масса водорода $2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, кислорода – $32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Решение:

Результатом реакции $2H_2 + O_2 = 2H_2O$, в процессе которой один моль кислорода соединяется с двумя молями водорода, является образование двух молей водяного пара.

Так как

$\upsilon_1 = \dfrac{m_1}{\mu_1} = \dfrac{4 \cdot 10^{-3} кг}{2 \cdot 10^{-3} кг/моль} = 2\,моль$ – число молей водорода;

$\upsilon_2 = \dfrac{m_2}{\mu_2} = \dfrac{32 \cdot 10^{-3} кг}{32 \cdot 10^{-3} кг/моль} = 1\,моль$ – число молей кислорода

$\upsilon_1 = 2\upsilon_2$,

то газы смеси оказываются прореагировавшими целиком с образованием $\upsilon = \upsilon_1 = 2$ моль водяного пара. Водяной пар подчиняется уравнению Менделеева-Клапейрона

$$PV = \upsilon RT,$$

из которого и определяется искомая температура, если известно P. Обозначая начальное давление в камере P_0, можно записать в соответствии с законом Дальтона:

$P_0 = P_1 + P_2$, где $P_1 = \upsilon_1 \dfrac{R}{V} T_0$, $P_2 = \upsilon_2 \dfrac{R}{V} T_0$ – парциальные давления газов смеси перед реакцией, T_0 – начальная температура смеси. Так как отношение $\dfrac{P}{P_0}$ известно (а объем смеси равен объему образовавшегося пара), то получается уравнение для нахождения T:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{PV}{P_0V} = \frac{\upsilon RT}{(\upsilon_1 + \upsilon_2)RT_0} = \frac{\upsilon T}{(\upsilon_1 + \upsilon_2)T_0} = \frac{\upsilon_1 T}{(\upsilon_1 + \upsilon_2)T_0};$$

$$T = \frac{P(\upsilon_1 + \upsilon_2) \cdot T_0}{P_0 \upsilon_1} = \frac{PT_0}{P_0}\left(1 + \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\right).$$

$$T = 2 \cdot 300K\left(1 + \frac{\upsilon_2}{2\upsilon_2}\right) = \frac{2 \cdot 300к \cdot 3}{2} = 900\text{ K} = 627\text{ °C}$$

3-7. Плотность смеси азота и водорода при температуре t = 47 °C и давлении P = 200 кПа равна ρ = 0,3 г/дм^3. Найти концентрации молекул азота (n_1) и водорода (n_2) в смеси.

Решение:

Для определения концентрации азота и водорода, кроме очевидного соотношения

$$n_1 + n_2 = n = \frac{P}{KT}. \qquad (1)$$

Необходимо иметь еще одно уравнение, связывающее величины n_1 и n_2. В связи с этим учтем следующее. Используя данные задачи, можно найти молярную массу $\mu_{см}$ смеси рассматриваемых газов. Действительно, из уравнения Менделеева-Клапейрона вытекает, что

$$\mu_{см} = \frac{mRT}{VP} = \rho\frac{RT}{P}. \qquad (2)$$

С другой стороны, можно выразить $\mu_{см}$ через молярные массы азота (μ_1) и водорода (μ_2), а также их концентрации n_1 и n_2. Заметим, что между массой m газа и его концентрацией n существует зависимость

$m = N \cdot m_0 = nVm_0 = \dfrac{nV \cdot \mu}{N_A}$, $\dfrac{m}{\mu} = \dfrac{nV}{N_A}$, где N – все число молекул, V – объем газа, m_0 – масса одной молекулы. Итак,

$$\mu_{см} = \frac{m_1 + m_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2} = \frac{m_1 + m_2}{\dfrac{m_1}{\mu_1} + \dfrac{m_2}{\mu_2}} = \frac{\dfrac{n_1 V \mu_1}{N_A} + \dfrac{n_2 V \mu_2}{N_A}}{\dfrac{n_1 V}{N_A} + \dfrac{n_2 V}{N_A}} = \qquad (3)$$

$$= \frac{n_1\mu_1 + n_2\mu_2}{n_1 + n_2}.$$

Приравнивая правые части соотношений (2) и (3), получим:

$$\frac{n_1\mu_1 + n_2\mu_2}{n_1 + n_2} = \frac{\rho RT}{P}. \qquad (4)$$

Решив систему (1) и (4), найдем неизвестные n_1 и n_2:

$$n_1 = \frac{\rho RT - P\mu_2}{KT(\mu_1 - \mu_2)}; \qquad n_1 = 3{,}5 \cdot 10^{24}\ м^{-3}.$$

$$n_2 = \frac{\rho RT - P\mu_1}{KT(\mu_2 - \mu_1)}; \qquad n_2 = 4{,}1 \cdot 10^{25}\ м^{-3}.$$

3-8. В запаянном сосуде находится вода, занимающая объем, равный половине объема сосуда. Найти давление P и плотность ρ водяного пара при температуре t = 400 °C, зная, что при этой температуре вся вода обращается в пар. [500 кг/м^3; 1,55 МПа].

3-9. В закрытом сосуде объемом V = 1 м^3 находится масса m_1 = 1,6 кг кислорода и масса m_2 = 0,9 кг воды. Найти давление P в сосуде при температуре t = 500 °C, зная, что при этой температуре вся вода превращается в пар. [640 кПа].

3-10. В сосуде объемом V = 2 л находится масса m_1 = 6 г углекислого газа (CO_2) и масса m_2 закиси азота (N_2O) при температуре t = 127 °C. Найти давление P смеси в сосуде. [415 кПа].

3-11. В сосуде находится масса m_1 = 14 г азота и масса m_2 = 9 г водорода при температуре t = 10°C и давлении P = 1 МПа. Найти молярную массу μ смеси и объем V сосуда. [4,6 · 10^{-3}кг/моль; 11,7 л].

3-12. Закрытый сосуд объемом V = 2 л заполнен воздухом при нормальных условиях. В сосуд вводится диэтиловый эфир ($C_2H_5OC_2H_5$). После того как весь эфир испарился, давление в сосуде стало равным P = 0,14 МПа. Какая масса m эфира была введена в сосуд? [2,5 г].

3-13. В сосуде находится углекислый газ. При некоторой температуре степень диссоциации молекул углекислого газа на кислород и окись углерода $\alpha = 0{,}25$. Во сколько раз давление в сосуде при этих условиях будет больше того давления, которое имело бы место, если бы молекулы углекислого газа не были диссоциированы? [1,25].

3-14. В воздухе содержится 23,6 % кислорода и 76,4 % азота (по массе) при давлении $P = 100$ кПа и температуре $t = 13$ °C. Найти плотность ρ воздуха и парциальные давления P_1 и P_2 кислорода и азота. [1,2 кг/м^3; 21 кПа; 79 кПа].

3-15. В сосуде находится масса $m_1 = 10$ г углекислого газа и масса $m_2 = 15$ г азота. Найти плотность ρ смеси при температуре $t = 27$ °C и давлении $P = 150$ кПа. [1,98 гк/м^3].

3-16. В сосуде находится количество $\upsilon_1 = 10^{-7}$ молей кислорода и масса $m_2 = 10^{-6}$ г азота. Температура смеси $t = 100$ °C, давление в сосуде $P = 133$ мПа. Найти объем V сосуда, парциальные давления P_1 и P_2 кислорода и азота и число молекул n в единице объема сосуда. [3,2 л; 98 мПа; 35 мПа; $2{,}6 \cdot 10^{19}$ м$^{-3}$].

3-17. В баллоне емкостью 0,5 л содержится смесь газов, состоящая из 10^{15} молекул кислорода, $4 \cdot 10^{15}$ молекул азота и $3{,}3 \cdot 10^{7}$ г аргона. Определите: а) давление смеси; б) молярную массу смеси. Температура смеси 127 °C. [$10{,}5 \cdot 10^{-2}$ Па; $3 \cdot 10^{-3}$ кг/моль].

3-18. При температуре $t = 27$°C и давлении $P = 1{,}1 \cdot 10^5$ Па плотность смеси кислорода и азота $\rho_{см} = 1{,}3$ кг/м^3. Определите концентрацию молекул кислорода и азота в смеси. [$1{,}68 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$; $9{,}8 \cdot 10^{24}$ м$^{-3}$].

3-19. В замкнутом сосуде находится смесь водорода и азота при температуре 27 °C и давлении 10^5 Па. Как изменится давление смеси, если температуру повысить до 150 °C? Десорбцию молекул со стенок сосуда не учитывать. [$1{,}415 \cdot 10^5$ Па].

3-20. В сосуде находится смесь газов, состоящая из аргона и гелия. Каковы отношения средних квадратичных скоростей молекул этих газов? [3,14].

3-21. В баллоне емкостью $25 \cdot 10^{-2}$ м^3 содержится смесь углекислого газа и паров воды. Число молекул углекислого газа $6{,}6 \cdot 10^{21}$, число молекул паров воды $9 \cdot 10^{20}$. Определите давление газа на стенки сосуда, если температура газа 600 К. [250 Па].

3-22. Баллон, содержащий кислород под давлением $7 \cdot 10^5$ Па, соединен с другим баллоном, содержащим такую же массу азота под давлением $4 \cdot 10^5$ Па. Температура одинакова. Определите давление смеси газов. [$5 \cdot 10^5$ Па].

3-23. В сосуд емкостью 2 л помещают 8 г кислорода и 7 г азота. Каково давление смеси газов при температуре 0 °С? [$5{,}7 \cdot 10^5$ Па].

3-24. Два сосуда, содержащие по одному молю газа, соединены между собой трубкой с краном. Давление газа в одном сосуде $3 \cdot 10^5$ Па, а в другом – $5 \cdot 10^5$ Па. Температура одинакова. Какое давление установится в сосудах, если открыть кран? [$3{,}75 \cdot 10^5$ Па].

3-25. Два сосуда с объемами V_1 = 40 л и V_2 = 20 л содержат газ при одинаковой температуре, но разных давлениях. После соединения сосудов в них установилось давление P = 1 МПа. Каково было начальное давление P_1 в большом сосуде, если в меньшем оно было P_2 = 600 кПа? Температура не меняется. [1,8 МПа].

3-26. Три сосуда одинакового объема соединены между собой кранами. Первый сосуд содержит газ с массой m_1, третий – тот же газ с массой m_2, второй сосуд пустой. Сначала соединили второй и третий сосуды, а когда давление выровнялось, второй сосуд отсоединили от третьего и соединили с первым. Давление в первом и втором сосудах установилось равным P_1. Определить начальное давление P в первом сосуде. Температуру считать постоянной. [$P = \dfrac{4P_1 m_1}{2m_1 + m_2}$].

3-27. Найти объем, занимаемый смесью 2,8 кг азота и 3,2 кг кислорода при температуре 17 °С и давлении $4 \cdot 10^5$ Па. [1,2 $м^3$].

3-28. В баллоне объемом 14 л находится 64 г смеси гелия с кислородом при температуре 7 °С и давлении $12 \cdot 10^5$ Па. Найти массу гелия и массу кислорода в смеси. [24 г; 40 г].

3-29. Гремучим газом называется смесь одной весовой части водорода и восьми весовых частей кислорода. Определить плотность гремучего газа при нормальных условиях. [0,534 $кг/м^3$].

3-30. В сосуде объемом V = 15 л находится смесь азота и водорода при температуре t = 23 °С и давлении P = 200 кПа. Определить массы смеси и ее компонентов, если массовая доля ω_1 азота в смеси равна 0,7. [6,87 г; 4,81 г; 2,06 г].

3-31. Смесь азота и гелия при температуре 27°С находится под давлением $P = 1,3 \cdot 10^2$ Па. Масса азота составляет 70 % от общей массы смеси. Найти концентрацию молекул каждого из газов. [$0,8 \cdot 10^{22}$ $м^{-3}$; $2,4 \cdot 10^{22}$ $м^{-3}$].

3-32. Три баллона соединены трубками с краном. В первом баллоне объемом V_1 находится газ под давлением P_1, во втором – V_2 под давлением P_2, третий объемом V_3 пустой. Определите, какое установится давление после открытия обоих кранов? [$P = \dfrac{P_1V_1 + P_2V_2}{V_1 + V_2 + V_3}$].

4. Элементы статистической физики

Основные формулы

1. Вероятность того, что физическая величина x, характеризующая молекулу, лежит в интервале значений от x до x + dx, равна

$$dw(x) = f(x) \cdot dx, \qquad (4.1)$$

где f(x) – функция распределения молекул по значениям данной физической величины x (плотность вероятности).

Приведенная формула также выражает долю числа молекул, для которых физическая величина x заключена в интервале от x до x + dx.

2. Количество молекул, для которых физическая величина x, характеризующая их, заключена в интервале значений от x до x + dx.

$$dN = Ndw(x) = Nf(x)dx. \qquad (4.2)$$

3. Распределение Максвелла (распределение молекул по скоростям).

$$dN(\nu) = Nf(\nu)d\nu = 4\pi N\left(\frac{m_0}{2\pi KT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_0\nu^2}{2KT}} \cdot \nu^2 \cdot d\nu, \qquad (4.3)$$

где f(ν) – функция распределения молекул по абсолютным значениям скоростей, выражающая отношение вероятности того, что скорость молекулы лежит в интервале от ν до ν + dν, к величине этого интервала, а также долю числа молекул, скорости которых лежат в указанном интервале; N – общее число молекул; m_0 – масса молекулы.

4. Распределение Больцмана (распределение частиц в силовом поле)

$$n = n_0 e^{\frac{-W_n}{KT}}, \tag{4.4}$$

где n – концентрация частиц, W_n – их потенциальная энергия, n_0 – концентрация частиц в точках поля, где $W_n = 0$, К – постоянная Больцмана, Т – термодинамическая температура, е – основание натуральных логарифмов.

5. Барометрическая формула (распределение давления в однородном поле силы тяжести).

$$P = P_0 e^{-\frac{m_0 gh}{KT}} \text{ или } P = P_0 e^{\frac{-\mu gh}{RT}}, \tag{4.5}$$

где Р – давление газа, m_0 – масса частицы, μ – молярная масса, h – высота точки по отношению к уровню, принятому за нулевой, P_0 – давление на этом уровне, g – ускорение свободного падения, R – универсальная газовая постоянная.

6. Средняя арифметическая скорость молекулы.

$$\nu_{ар} = \sqrt{\frac{8KT}{\pi m_0}} \text{ или } \nu_{ар} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}, \tag{4.6}$$

где Т – термодинамическая температура, m_0 – масса одной молекулы, μ – молярная масса.

7. Наиболее вероятная скорость молекулы.

$$\nu_в = \sqrt{\frac{2KT}{m_0}} \text{ или } \nu_в = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}. \tag{4.7}$$

Методические указания

1. В состоянии термодинамического равновесия макросостояние системы, состоящей из N частиц, характеризуется сравнительно небольшим числом макропараметров (физических величин, которые можно определить путем измерения из эксперимента), имеющих определенное, не зависящее от времени, значение. Вследствие хаотического движения час-

тиц их положения и скорости непрерывно изменяются. Следовательно, изменяются микросостояния системы, в то время как макропараметры остаются постоянными. Таким образом, одному и тому же макросостоянию соответствует множество микросостояний. Поэтому любые макроскопические величины зависят от микроскопических параметров. В статистической физике принимается, что наблюдаемые экспериментально физические величины (макропараметры) могут быть найдены как средние значения, вычисленные по множеству допустимых микросостояний. Вследствие этого одной из основных задач, решаемых статистическим методом, является нахождение средних значений различных физических величин и определение среднего числа частиц dN (из данных N), обладающих некоторым свойством.

2. В кинетической теории, рассматривающей газ как совокупность огромного числа хаотически движущихся молекул, употребляются различные типы средних скоростей молекул: средняя квадратичная $v_{кв}$, средняя арифметическая $v_{ар}$ (или $\langle v \rangle$) и наиболее вероятная $v_{в}$.

Средней квадратичной скоростью $v_{кв}$ пользуются в тех случаях, когда необходимо рассчитать какую-либо физическую величину, пропорциональную квадрату скорости, например, кинетическую энергию поступательного движения молекул, давление газа.

Средняя арифметическая скорость $v_{ар}$ (или $\langle v \rangle$) позволяет определять средние значения таких физических величин, которые характеризуют свойства газа, в формулу которых скорость входит в первой степени, например, среднее число столкновений молекул в единицу времени, среднее время свободного пробега, средний импульс молекул.

Наиболее вероятной скоростью $v_{в}$ пользуются в задачах, связанных с применением закона распределения молекул по скоростям. Этой скорости соответствует максимум функции распределения f(x).

Решение задач

4-1. Азот находится под давлением P = 100 кПа при температуре T = 300 К. Найти относительное число молекул азота, модуль скорости которых лежит в интервале от $\langle v \rangle$ до $\langle v \rangle + dv$, где dv = 1м/с. Внешние силы отсутствуют.

Решение:

При давлении P = 100 кПа и температуре T = 300 К азот можно считать идеальным газом. В отсутствие внешних сил молекулы идеального газа подчиняются закону распределения Максвелла. Конкретный вид этого закона определяется из условий задачи – необходимо использовать распределение Максвелла по модулю скорости:

$$dN = N\,4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi KT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2\, \ell^{-\frac{m_0 v^2}{2KT}}\, dv, \qquad (1)$$

где dN – число молекул из данных N, модуль скорости которых лежит в интервале от v до $v + dv$; m_0 – масса молекулы.

Как известно, выражение (1) справедливо, если интервал скоростей dv столь мал, что изменением функции распределения

$$f(v) = \frac{dN}{N \cdot dv} = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi KT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2\, \ell^{-\frac{m_0 v^2}{2KT}} \qquad (2)$$

на этом интервале скоростей можно пренебречь, считая ее приближенно постоянной. В нашем случае dv = 1м/с мал по сравнению со значением средней скорости $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \approx$ 475 м/с.

Кроме того, функция распределения $f(v)$ в области средней скорости $\langle v \rangle$ изменяется весьма слабо.

Поэтому выражение (1) практически решает задачу. Подставив в (1) значение средней скорости $\langle v\rangle = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}$, получаем решение задачи в общем виде:

$$\frac{dN}{N} = \frac{8\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{m_0}{\pi KT}\right)^{\frac{1}{2}} \ell^{\frac{-4}{\pi}} dv .$$

Произведя вычисление, получим:

$$\frac{dN}{N} = 1{,}9 \cdot 10^{-3} = 0{,}19\ \%.$$

4-2. Используя закон распределения молекул идеального газа по скоростям, найдите закон, выражающий распределение молекул по относительным скоростям u

$(u = \dfrac{v}{v_в})$.

Решение:

Из закона распределения Максвелла по модулю скорости следует:

$$f(v)dv = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi KT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2\ \ell^{-\frac{m_0 v^2}{2KT}} dv. \qquad (1)$$

Найдем выражение для квадрата наиболее вероятной скорости: $v_в^2 = \dfrac{2KT}{m_0}$. Преобразуем выражения:

$$\ell^{-\frac{m_0 v^2}{2KT}} = \ell^{-\frac{v^2}{v_в^2}} = \ell^{-u^2} \qquad (2)$$

$$\left(\frac{m_0}{2\pi KT}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}}\cdot\left(\frac{m_0}{2KT}\right)\cdot\left(\frac{m_0}{2KT}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{v_в^2}\cdot\frac{1}{v_в} \qquad (3)$$

$$v = v_в \cdot u; \qquad dv = v_в \cdot du \qquad (4)$$

Подставив выражения (2), (3) и (4) в (1), получим:

$$\frac{4\pi}{\pi^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{\nu_в}\cdot\frac{\nu^2}{\nu_в^2}\ell^{-u^2}\cdot\nu_в\cdot du=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\cdot u^2\ell^{-u^2}du=f(u)=f(u)\cdot du\cdot$$

$$f(\mathrm{u})=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\cdot u^2\ell^{-u^2}.$$

4-3. Используя закон распределения молекул идеального газа по скоростям, найдите закон, выражающий распределение молекул газа по значениям кинетической энергии.

Решение:

Чтобы найти распределение молекул газа по значениям кинетической энергии ε, надо перейти от переменной ν к переменной $\varepsilon=\frac{m_0\nu^2}{2}$.

$$\nu=\sqrt{\frac{2\varepsilon'}{m_0'}} \qquad (1)$$

$$d\nu=(2m_0\varepsilon)^{-1/2}d\varepsilon. \qquad (2)$$

Подставим (1) и (2) в формулу распределения Максвелла:

$$dN(\nu)=4\pi N\left(\frac{m_0}{2\pi KT}\right)^{\frac{3}{2}}\ell^{-\frac{m_0\nu^2}{2KT}}\nu^2\cdot d\nu.$$

$$\ell^{-\frac{m_0\nu^2}{2KT}}=\ell^{-\frac{\varepsilon}{KT}};\ \nu^2=\frac{2\varepsilon}{m_0};$$

$dN(\varepsilon)=4\pi\cdot N\cdot$

$$\left(\frac{m_0}{2\pi KT}\right)^{\frac{3}{2}}\ell^{-\frac{\varepsilon}{KT}}\cdot\frac{2\varepsilon}{m_0}\cdot(2m_0\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}d\varepsilon=\frac{2N}{\sqrt{\pi}}(KT)^{-\frac{3}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}\ell^{-\frac{\varepsilon}{KT}}d\varepsilon.$$

$$f(\varepsilon)=\frac{dN(\varepsilon)}{N\cdot d\varepsilon}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot(KT)^{-\frac{3}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}\ell^{-\frac{\varepsilon}{KT}}.$$

4-4. Какая часть молекул водорода при температуре t = 27 °C обладает скоростями, лежащими в интервале от 1900 до 1905 м/с?

Решение:

Так как интервал скоростей мал, воспользуемся формулой Максвелла, которая дает распределение молекул по скоростям:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \ell^{-u^2} \cdot u^2 \Delta u \ .$$

В этой формуле относительная скорость $u = \dfrac{v}{v_в}$, где v – скорость данной группы молекул, $v_в$ – наиболее вероятная скорость молекул, равная $v_в = \sqrt{\dfrac{2RT}{\mu}}$, ΔN – число молекул, относительные скорости которых лежат в интервале от u до $(u+\Delta u)$, N – общее число молекул.

Вычислим наиболее вероятную скорость:

$$v_в = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}31 \cdot 300}{2 \cdot 10^{-3}}} = 1580 \text{ (м/с).}$$

Значение относительной скорости, соответствующее $v = 1900$ м/с, будет

$$u = \frac{v}{v_в} = \frac{1900}{1580} \approx 1{,}2; \quad \Delta u = \frac{\Delta v}{v_в} = \frac{5}{1580} = 3{,}16 \cdot 10^{-3};$$

$$\ell^{-u^2} = \ell^{-1{,}44} = 0{,}238 \, .$$

Подставляя найденные значения в формулу Максвелла, получим:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot (1{,}2)^2 \cdot 3{,}16 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}238 = 2{,}45 \cdot 10^{-3} = 0{,}245 \ \%.$$

4-5. В некотором объеме газа содержится число молекул, равное постоянной Авогадро N_A. Рассматривая этот газ как идеальный, определить число ΔN молекул, скорости v которых меньше 0,001 наиболее вероятной скорости $v_в$.

Решение:

Для решения задачи удобно воспользоваться распределением молекул по относительным скоростям u ($u = \frac{v}{v_в}$).

Число dN(u) молекул, относительные скорости u которых заключены в пределах от u до u + du, определяется формулой:

$$dN(u) = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \ell^{-u^2} \cdot u^2 du, \qquad (1)$$

где N – полное число молекул в рассматриваемом объеме.

По условию задачи максимальная скорость интересующих нас молекул $v_{max} = 0{,}001 v_в$, откуда $u_{max} = \frac{v_{max}}{v_в} = 0{,}001$.

Для таких значений u выражение (1) можно существенно упростить.

Для u<<1 имеем $\ell^{-u^2} \approx 1 - u^2$. Пренебрегая значением $u^2 = 10^{-6}$ по сравнению с единицей, выражение (1) запишем в виде: $dN(u) = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} u^2 du$.

Интегрируя это выражение по u в пределах от 0 до u_{max}, получим:

$$\Delta N = \frac{4N_A}{\sqrt{\pi}} \int_0^{u_{max}} u^2 du = \frac{4N_A}{\sqrt{\pi}} \left| \frac{u^3}{3} \right|_0^{u_{max}} = \frac{4N_A \cdot u_{max}^3}{3\sqrt{\pi}}$$

$$\Delta N = 4{,}53 \cdot 10^{17}.$$

4-6. Закон распределения молекул газа по скоростям в некотором молекулярном пучке имеет вид $f(v) = Av^3 \ \ell^{\frac{-m_0 v^2}{2KT}}$. Определите: 1) наиболее вероятную скорость; 2) наиболее вероятное значение энергии $\varepsilon_в$ молекул в этом пучке.

Решение:

Наиболее вероятную скорость найдем из условия:

$$\frac{df(v)}{dv} = 0$$

$$\frac{d}{dv}\left(Av^3\ell^{-\frac{m_0v^2}{2KT}}\right) = A\left(3v^2\ell^{-\frac{m_0v^2}{2KT}} - \frac{m_0}{2KT}2v\cdot v^3\ell^{-\frac{m_0v^2}{2KT}}\right) =$$

$$= Av^2\ell^{-\frac{m_0v^2}{2KT}}\left(3 - \frac{m_0v^2}{KT}\right) = 0$$

$$\frac{m_0v^2}{KT} = 3,\ \ v = v_в = \sqrt{\frac{3KT}{m_0}}.$$

Аналогично наиболее вероятное значение энергии тоже найдем из условия: $\frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon} = 0,$ но предварительно данное распределение молекул газа по скоростям преобразуем в распределение молекул по значениям энергии.

$$\frac{dN(v)}{N} = f(v)dv;\quad \frac{dN(\varepsilon)}{N} = f(\varepsilon)d\varepsilon.$$

$$f(\varepsilon) = f(v)\frac{dv}{d\varepsilon}.$$

$$\varepsilon = \frac{m_0v^2}{2};\ \ v = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m_0}};\ \ \frac{dv}{d\varepsilon} = (2m_0\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f(\varepsilon) = A\cdot(\frac{2\varepsilon}{m_0})^{\frac{3}{2}}\ell^{-\frac{\varepsilon}{KT}}(2m_0\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2A}{m_0^2}\varepsilon\ell^{-\frac{\varepsilon}{KT}}.$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{2A}{m_0^2}\varepsilon\ell^{-\frac{\varepsilon}{KT}}\right) = \frac{2A}{m_0^2}\frac{d}{d\varepsilon}(\varepsilon\cdot\ell^{-\frac{\varepsilon}{KT}}) = \frac{2A}{m_0}\ell^{-\frac{\varepsilon}{KT}}(1-\frac{\varepsilon}{KT}) = 0.$$

$$1 - \frac{\varepsilon}{KT} = 0;\qquad \varepsilon = \varepsilon_в = KT.$$

4-7. Найти давление и число молекул в единице объема воздуха на высоте 2000 м над уровнем моря. Давление на уровне моря равно 10^5 Па, температура 17 °С. Изменением температуры с высотой пренебречь.

Решение:

Давление воздуха на высоте h можно определить по барометрической формуле:

$$P = P_0 \ell^{\frac{-\mu g h}{RT}}.$$

Число молекул в единице объема:

$$n = \frac{P}{KT} = \frac{P_0}{KT} \cdot \ell^{\frac{-\mu g h}{RT}};$$

$n = 1{,}98 \cdot 10^{25} м^{-3}$.

4-8. Пылинки массой $m = 10^{-18}$ г взвешены в воздухе. Определить толщину слоя воздуха, в пределах которого концентрация пылинок различается не более чем на 1 %. Температура Т воздуха во всем объеме одинакова и равна 300 К.

Решение:

При равновесном распределении пылинок их концентрация зависит только от координаты y по оси, направленной вертикально. В этом случае к распределению пылинок можно применить формулу Больцмана:

$$n = n_0 \ell^{-\frac{m_0 g y}{KT}}. \qquad (1)$$

По условию задачи изменение Δn концентрации с высотой мало по сравнению с n $\left(\frac{\Delta n}{n} = 0{,}01\right)$, поэтому без существенной погрешности изменение концентрации Δn можно заменить дифференциалом dn.

Дифференцируя выражение (1) по y, получим:

$$dn = -n_0 \frac{m_0 g}{KT} \ell^{-\frac{m_0 g y}{KT}} dy.$$

Так как $n_0 \ell^{\frac{-m_0 g y}{KT}} = n$, то $dn = -\frac{m_0 g}{KT} dy$.

Откуда $dy = -\dfrac{KT}{m_0 g} \cdot \dfrac{dn}{n}$.

Знак минус показывает, что положительным изменениям координаты ($dy > 0$) соответствует уменьшение относительной концентрации ($dn < 0$). Знак минус опустим (в данном случае он несущественен) и заменим дифференциалы dy и dn конечными приращениями Δy и Δn:

$$\Delta y = \frac{KT}{m_0 g} \cdot \frac{\Delta n}{n}, \qquad \Delta y = 4{,}23 \text{ мм}.$$

4-9. Ротор центрифуги вращается с угловой скоростью ω. Используя функцию распределения Больцмана, установить распределение концентрации n частиц массой m_0, находящихся в роторе центрифуги, как функцию расстояния r от оси вращения.

Решение:

Согласно принципу эквивалентности гравитационных сил и сил инерции, любые силы инерции (в случае однородных полей) во всем пространстве можно заменить гравитационными силами. Для неоднородных полей принцип эквивалентности выполняется лишь в небольшой части пространства за небольшие промежутки времени.

Каждая частица, находящаяся на расстоянии r от оси вращения, будет иметь нормальное ускорение $a_n = \omega^2 r$. Если рассматривать газ в центрифуге в НИСО, вращающегося вместе с центрифугой, то тогда в центрифуге появляется радиальное поле тяготения, обусловленное свойствами выбранной СО. Покажем, что потенциальная энергия частицы W_n есть функция расстояния r.

$dW_n = -dA = -f \cdot dr = -madr = -m\omega^2 rdr$.

$$W_n = -\int_0^r m\omega^2 rdr = -m\omega^2 \frac{r^2}{2}. \qquad (1)$$

В распределение Больцмана n = $n_0 \ell^{\frac{-W_n}{KT}}$ подставим выражение (1).

n = $n_0 \ell^{\frac{m\omega^2 r^2}{2KT}}$.

4-10. Какова вероятность того, что данная молекула идеального газа имеет скорость, отличную от 1/2 $\nu_в$ не более чем на 1 %? [$4{,}39 \cdot 10^{-3}$].

4-11. Найти вероятность того, что данная молекула идеального газа имеет скорость, отличную от 2$\nu_в$ не более чем на 1 %. [$6{,}68 \cdot 10^{-3}$].

4-12. Зная функцию распределения молекул по скоростям, вывести формулу, определяющую долю молекул, скорости которых много меньше наиболее вероятной скорости. [$\frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{m}{KT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot v^3$].

4-13. Определить относительное число молекул идеального газа, скорости которых заключены в пределах от нуля до одной сотой вероятной скорости. [$7{,}52 \cdot 10^{-7}$].

4-14. По функции распределения молекул по скоростям определить среднюю квадратичную скорость.

4-15. Распределение молекул по скоростям в молекулярных пучках при эффузионном истечении отличается от максвелловского и имеет вид f(v)dv = $cv^3 \ell^{\frac{-mv^2}{2KT}}$ ·dv. Определить из условия нормировки коэффициент с. [c = $\frac{m^2}{2K^2T^2}$].

Замечание: Эффузионным называется истечение газов через отверстия, малые по сравнению с длиной свободного пробега молекулы.

4-16. Зная функцию распределения молекул по скоростям в некотором молекулярном пучке f(v) = $\frac{m^2}{2K^2T^2}\ell^{\frac{-mv^2}{2KT}}\cdot v^3$, найти выражение для наиболее вероятной скорости. [$v_в$ = $\sqrt{\frac{3KT}{m}}$].

4-17. Водород находится при нормальных условиях и занимает объем 1 см^3. Определить число молекул в этом объеме, обладающих скоростями, меньшими некоторого значения v_{max} = 1 м/с. [6 · 10^9].

4-18. Вывести формулу наиболее вероятного импульса молекул идеального газа. [$P_в$ = $\sqrt{2mKT}$].

4-19. Найти число молекул идеального газа, которые имеют импульс, значение которого точно равно наиболее вероятному значению импульса. [0].

4-20. Какая часть молекул кислорода при 0 °С обладает скоростью от 100 м/с до 110 м/с? [0,4 %].

4-21. Какая часть молекул азота при 150 °С обладает скоростями от 300 м/с до 325 м/с? [2,8 %].

4-22. Какая часть молекул водорода при 0 °С обладает скоростью от 2000 м/с до 2100 м/с? [4,5 %].

4-23. Во сколько раз число молекул ΔN_1, скорости которых лежат в интервале от $\nu_{кв}$ до $\nu_{кв} + \Delta\nu$, меньше числа молекул ΔN_2, скорости которых лежат в интервале от $v_в$ до $v_в$ + Δv? [1,1 для любого газа при любой температуре].

4-24. Какая часть молекул азота, находящаяся при температуре 400 К, имеет скорости, лежащие в интервале $v_в$ + Δv, где Δv = 20 м/с? [3,4 %].

4-25. Какая часть молекул азота при температуре 150 °С обладает скоростями, лежащими в интервале от 300 м/с до 800 м/с? [70 %].

4-26. Какая часть общего числа молекул имеет скорости: 1) больше наиболее вероятной скорости; 2) меньше наиболее вероятной скорости? [57 %; 43 %].

4-27. В баллоне находится 2,5 г кислорода. Найти число молекул кислорода, скорости которых превышают значение средней квадратичной скорости. [$1{,}9 \cdot 10^{22}$].

4-28. Какая часть молекул кислорода обладает скоростями, отличающимися от наиболее вероятной не более чем на 10 м/с при температуре 0 °С? [4,4 %].

4-29. Определить отношение числа молекул водорода, скорости которых лежат в интервале от 2000 до 2010 м/с, к числу молекул, скорости которых лежат в интервале от 1000 до 1010 м/с, если температура водорода 0 °С. [1,07].

4-30. Используя функцию распределения молекул идеального газа по энергиям, найти наиболее вероятное значение энергии молекул. [1/2 кТ].

4-31. Покажите, что доля молекул, скорости которых лежат в интервале скоростей от средней скорости до средней квадратичной, не меняется при изменении температуры.

4-32. Определите отношение числа молекул газа, скорости которых отличаются от наиболее вероятной не больше чем на 5 м/с при температуре T_1, к числу молекул того же газа, скорости которых отличаются на ту же величину от наиболее вероятной скорости, но при температуре $T_2 = 2T_1$. [1,4].

4-33. Температура кислорода 208°С. Определите отношение числа молекул этого газа, модули скоростей которых лежат в интервале 798 м/с – 802 м/с, к числу молекул, модули скоростей которых лежат в интервале (398–402) м/с. [0,6].

4-34. Какую часть от общего числа молекул некоторого газа составляют молекулы, модули скоростей которых отличаются не более чем на 0,5 % от наиболее вероятной скорости? Как изменится результат при увеличении температуры газа в два раза? [0,83 %; не изменится].

4-35. Определить высоту горы, если давление на ее вершине равно половине давления на уровне моря. Температуру считать постоянной и равной 0°С. [5,53 км].

4-36. При подъеме вертолета на некоторую высоту барометр, находящийся в его кабине, изменил свое показание на 85 мм рт. ст. На какой высоте летит вертолет, если на взлетной площадке барометр показывал 755 мм рт. ст.? Температуру воздуха считать постоянной и равной 17°С. [1 км].

4-37. Каково давление и число молекул в единице объема воздуха на высоте 2 км над уровнем моря? Давление над уровнем моря $1{,}01 \cdot 10^5$ Па, а температура 10°С. Изменением температуры с высотой пренебречь. [$7{,}93 \cdot 10^4$ Па; $1{,}6 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$].

4-38. Одинаковые частицы массой 10^{-12} г каждая распределены в однородном гравитационном поле напряженностью 0,2 мкН/кг. Определить отношение концентраций частиц, находящихся на эквипотенциальных уровнях, отстоящих друг от друга на 10 м. Температура во всех слоях считается одинаковой и равной 290 К. [1,65].

4-39. Масса каждой из пылинок, взвешенных в воздухе, равна 10^{-18} г. Отношение концентрации пылинок на высоте 1 м к концентрации их на высоте, равной 0, равно 0,787. Температура воздуха 300 К. Найти по этим данным значение постоянной Авогадро. [$5{,}97 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$].

4-40. Определить силу, действующую на частицу, находящуюся во внешнем однородном поле силы тяжести, если отношение концентраций частиц на двух уровнях, отстоящих друг от друга на 1 м, равно *e*. Температуру считать везде одинаковой и равной 300 К. [$4{,}14 \cdot 10^{-21}$Н].

4-41. Насколько уменьшится атмосферное давление 100 кПа при подъеме наблюдателя над поверхностью Земли на высоту 100 м? Считать, что температура воздуха равна 290 К и не изменяется с высотой. [1,18 кПа].

4-42. На какой высоте над поверхностью Земли атмосферное давление вдвое меньше, чем на ее поверхности? Считать, что температура воздуха равна 290 К и не изменяется с высотой. [5,88 км].

4-43. Барометр в кабине летящего самолета все время показывает одинаковое давление 80 кПа, благодаря чему летчик считает высоту полета неизменной. Однако температура воздуха изменилась на 1 К. Какую ошибку в определении высоты допустил летчик? Считать, что температура не зависит от высоты и что у поверхности Земли давление 100 кПа. [6,5 м].

4-44. В центрифуге с ротором радиусом а, равном 0,5 м, при температуре Т = 300 К находится в газообразном состоянии вещество с относительной молекулярной массой $M_r = 10^3$. Определить отношение $\frac{n_a}{n_0}$ концентраций молекул у стенок ротора и в центре его, если ротор вращается с частотой $n = 30\ с^{-1}$. [5,91].

4-45. Ротор центрифуги, заполненный радоном, вращается с частотой $n = 50\ с^{-1}$. Радиус a ротора равен 0,5 м. Определить давление P газа на стенки ротора, если в его центре давление P_0 равно нормальному атмосферному. Температуру T по всему объему считать одинаковой и равной 300 K. [304 кПа].

4-46. В центрифуге находится некоторый газ при температуре 271 К. Ротор центрифуги радиусом a = 0,4 м вращается с угловой скоростью 500 рад/с. Определить относительную молекулярную массу газа, если давление у стенки ротора в 2,1 раза больше давления в его центре. [84].

4-47. Ротор ультрацентрифуги радиусом 0,2 м заполнен атомарным хлором при температуре 3000 К. Хлор состоит из двух изотопов: ^{37}Cl и ^{35}Cl. Доля атомов изотопа ^{37}Cl составляет 0,25. Определить доли атомов того и другого изотопов вблизи стенок ротора, если ротору сообщить угловую скорость вращения, равную 10^4 рад/с. [28 %; 72 %].

4-48. Показания барометра на вершине горы «Пик Ленина» на Памире составляют 43 % от показаний барометра у подножия горы. Определите высоту этой вершины, если температура воздуха 10 °С. [6900 м].

4-49. Считая, что воздух на поверхности Земли находится при нормальных условиях, определите отношение давления воздуха на высоте 2 км к давлению на дне шахты глубиной 2 км. [0,61].

4-50. Считая, что температура воздуха и ускорение свободного падения не зависят от высоты, определите, на какой высоте плотность воздуха уменьшится в *e* раз по сравнению с плотностью воздуха на уровне моря. Температура воздуха 300 К. [$8{,}75 \cdot 10^3$ м].

4-51. Определите вес цилиндрического столба воздуха, основание которого равно 1 $м^2$, а высота его равна высоте Останкинской телебашни (530 м). Считайте, что температура воздуха 300 К, давление у поверхности Земли 760 мм рт. ст. [6000 Н].

4-52. На какой высоте давление воздуха составляет 75 % от давления на уровне моря? Температуру считать постоянной и равной 0 °С. [2,3 км].

4-53. Пассажирский самолет совершает полеты на высоте 8300 м. Чтобы не снабжать пассажиров кислородными масками, в кабинах при помощи компрессора поддерживается постоянное давление, соответствующее высоте 2700 м. Найти разность давлений внутри и снаружи кабины. Среднюю температуру наружного воздуха считать равной 0°С. [0,36 атм.].

4-54. На какой высоте плотность составляет 50 % от плотности над уровнем моря? Температуру считать постоянной и равной 0 °С. [5,5 км].

4-55. На какой высоте над уровнем моря плотность воздуха уменьшается в *e* раз? Считать, что температура воздуха не зависит от высоты и равна 0 °С. [73 м].

4-56. Определить вес P газа, заключенного в вертикальном цилиндрическом сосуде. Площадь основания сосуда S, высота h. Давление газа на уровне нижнего основания цилиндра P_0, температура газа T. Молярная масса μ. [$P = P_0S(1 - \ell^{\frac{\mu g h}{RT}})$].

4-57. Показать, что центр тяжести вертикального цилиндрического столба воздуха находится на высоте h_c, на которой плотность газа убывает в *e* раз. Считать, что температура воздуха T не зависит от высоты h. $\left[\dfrac{RT}{\mu g}\right]$.

4-58. Вычислить, какой процент молекул газа, находящихся в поле силы тяжести, имеет большую потенциальную энергию, чем их средняя кинетическая энергия поступательного движения. Считать, что для газа имеет место распределение Больцмана. [22 %].

4-59. Какая часть молекул водорода имеет кинетическую энергию, достаточную для преодоления гравитационного поля Земли, если температура газа 300 К? [10^{-9} %].

5. Явления переноса

Основные формулы

1. Среднее число соударений, испытываемых одной молекулой газа в единицу времени,

$$\langle z \rangle = \sqrt{2}\,\pi d^2 n \langle v \rangle, \qquad (5.1)$$

где d – эффективный диаметр молекулы, n – концентрация молекул, $\langle v \rangle$ – средняя арифметическая скорость молекул.

2. Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}. \qquad (5.2)$$

3. Закон Ньютона

$$F = \eta \frac{dv}{dz} \Delta S, \qquad (5.3)$$

где F – сила внутреннего трения между движущимися слоями газа, $\frac{dv}{dz}$ – градиент скорости в направлении z, перпендикулярном к площадке ΔS, η – коэффициент внутреннего трения (динамическая вязкость).

4. Динамическая вязкость

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \cdot \lambda, \qquad (5.4)$$

где ρ – плотность газа (жидкости), $\langle v \rangle$ – средняя арифметическая скорость хаотического движения его молекул, λ – их средняя длина свободного пробега.

5. Закон Фурье

$$Q = -\text{æ}\,\frac{dT}{dx}\cdot S\cdot\Delta t, \tag{5.5}$$

где Q – количество теплоты, перенесенное за время Δt через площадку S в результате теплопроводности, $\frac{dT}{dx}$ – градиент температуры в направлении x, перпендикулярном к площадке S, æ – коэффициент теплопроводности.

6. Коэффициент теплопроводности газа

$$\text{æ} = \frac{1}{3}C_v\rho <v> \lambda, \tag{5.6}$$

где C_v – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, ρ – плотность газа, $<v>$ – средняя арифметическая скорость его молекулы, λ – средняя длина свободного пробега молекул.

7. Закон Фика

$$M = -D\frac{d\rho}{dx}\cdot S\cdot\Delta t, \tag{5.7}$$

где M – масса газа, перенесенная в результате диффузии через поверхность площадью S за время Δt, $\frac{d\rho}{dx}$ – градиент плотности в направлении x, перпендикулярном к площадке S, D – коэффициент диффузии.

8. Коэффициент диффузии

$$D = \frac{1}{3}<v>\cdot\lambda, \tag{5.8}$$

где $<v>$ – средняя арифметическая скорость его молекул, λ – средняя длина свободного пробега молекул.

Решение задач

5-1. Рассчитать среднюю длину свободного пробега молекул воздуха при температуре t = 17 °C и давлении $P = 10^5$ Па, если эффективный диаметр молекул воздуха можно принять равным $3 \cdot 10^{-10}$ м.

Решение:

Средняя длина свободного пробега может быть рассчитана по формуле

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}. \qquad (1)$$

Если концентрацию n молекул выразить как отношение $n = \dfrac{P}{KT}$, то при подстановке получим $\lambda = \dfrac{KT}{\sqrt{2}\pi d^2 P}$. $\lambda = 10^{-7}$м.

После расчета разберемся, как будет меняться длина свободного пробега в зависимости от температуры и давления в различных процессах при условии, что эффективный диаметр предполагается постоянным. Результаты такого рассмотрения даны в таблице 1.

	V = const	P = const	T = const
λ(P)	const	–	– 1/P
λ(T)	const	~ T	–

При изотермическом расширении с уменьшением давления линейный рост λ будет продолжаться только до тех пор, пока длина свободного пробега не станет соизмеримой с размерами сосуда. В этом случае формула (1) теряет смысл и длина свободного пробега молекул определяется главным образом размерами сосуда.

5-2. При какой концентрации среднее расстояние между молекулами в сто раз меньше, чем длина свободного пробега молекул азота ($d = 3{,}1 \cdot 10^{-10}$м)?

Решение:

Для оценки среднего расстояния между молекулами будем считать, что на каждую молекулу приходится кубик, ребро которого равняется искомому расстоянию a, тогда имеет место соотношение $na^3 = 1$. Отсюда расстояние между молекулами

$$a = n^{-\frac{1}{3}}. \qquad (1)$$

Длина свободного пробега зависит не только от концентрации, но и от эффективного диаметра d.

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}. \qquad (2)$$

Из требования $\lambda = 100$ a и формул (1) и (2) находим:

$$n = (\sqrt{2}\pi d^2 \cdot 100)^{-\frac{3}{2}}; \quad n = 3{,}5 \cdot 10^{18} см^{-3}.$$

5-3. Найти число столкновений z, которые происходят в течение секунды между всеми молекулами, находящимися в объеме $V = 1$ мм^3 водорода при нормальных условиях. Принять для водорода $d = 2{,}3 \cdot 10^{-10}$м.

Решение:

Число столкновений z_1, испытываемых одной молекулой за секунду, определяется формулой:

$$z_1 = \sqrt{2}\,\pi d^2 n\langle v\rangle. \qquad (1)$$

Чтобы установить соотношение между величинами z и z_1, учтем, что если умножить число столкновений одной молекулы за секунду z_1 на число всех молекул N, то получим результат, превышающий в два раза искомое число z. Действительно, в одном столкновении участвуют сразу две молекулы, поэтому в число $z_1 \cdot N$ каждое столкновение входит дважды: один раз в счет столкновений одной из молекул данной пары, другой раз в счет столкновений второй молекулы. Следовательно, правильным будет выражение:

$$z = \frac{z_1 N}{2} = \frac{z_1 \cdot nV}{2}, \qquad (2)$$

где n – концентрация молекул.

Подставив в (2) вместо z_1 его значение по формуле (1), получим:

$$z = \frac{\sqrt{2}\pi d^2 n^2 \cdot \langle v \rangle \cdot V}{2}.$$

Найдем концентрацию молекул из формулы $P = nKT$, $n = \dfrac{P}{KT}$, а среднюю арифметическую скорость по формуле $\langle v \rangle = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}$. Тогда окончательно для z имеем:

$$z = \frac{\sqrt{2}\pi d^2 P^2 V}{2K^2 T} \cdot \sqrt{\frac{8R}{\pi\mu T}},\ z = 1{,}6 \cdot 10^{26} c^{-1}.$$

5-4. Пространство между двумя коаксиальными цилиндрами заполнено водородом при атмосферном давлении и температуре $t = 17$ °C. Радиусы цилиндров соответственно равны $r_1 = 10$ см и $r_2 = 10{,}5$ см. Внешний цилиндр приводят во вращение с частотой 15 об/с. Какой момент нужно приложить к внутреннему цилиндру, чтобы он оставался неподвижным?

Длина цилиндров $\ell = 30$ см. Эффективный диаметр молекул водорода $d = 2{,}3 \cdot 10^{-10}$м.

Решение:

Слой молекул газа, адсорбированный внутренней поверхностью вращающегося цилиндра, будет обладать той же направленной скоростью, что и цилиндр:

$$v_2 = 2\pi\upsilon r_2. \quad (1)$$

В пространстве между цилиндрами (на расстоянии $\Delta r = 0{,}5$ см) направленная скорость молекул будет непрерывно (и мы предположим – линейно) уменьшаться до нуля; молекулы, адсорбированные внешней поверхностью меньшего (внутреннего) цилиндра, будут неподвижны (рис. 28), то есть

$$v_1 = 0 \quad (2).$$

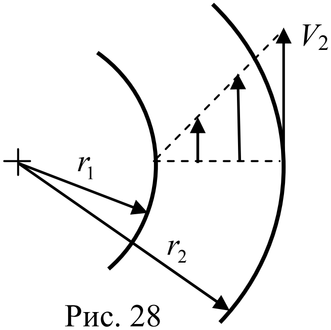

Рис. 28

Сила, действующая на боковую поверхность внутреннего цилиндра:

$$F = \eta \frac{dv}{dr} \cdot S\,, \qquad (3)$$

где η – коэффициент внутреннего трения водорода при заданных условиях; S – боковая поверхность внутреннего цилиндра.

Момент, действующий на внутренний цилиндр:

$$M = F \cdot r_1. \qquad (4)$$

Подставив значение F и учитывая, что $S = 2\pi r_1 \ell$, получим:

$$M = 2\pi r_1 \ell \eta \frac{dv}{dr}. \qquad (5)$$

Коэффициент внутреннего трения водорода может быть рассчитан по формуле:

$$\eta = \frac{1}{3} \lambda \rho \langle v \rangle, \qquad (6)$$

где ρ – плотность газа при заданных условиях.

Ввиду сложности вычислений каждый из сомножителей будем рассчитывать отдельно.

$$\lambda = \frac{KT}{\sqrt{2}\pi d^2 P}; \quad \lambda = 1{,}8 \cdot 10^7 \text{м}.$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}; \quad \langle v \rangle = 1{,}7 \cdot 10^3 \text{м/с}.$$

$$\rho = \frac{P \cdot M}{RT}; \qquad \rho = 8{,}3 \cdot 10^{-2} кг/м^3.$$

Подставляя полученные значения в формулу (6), находим:

$\eta = 0{,}85 \cdot 10^{-5}$ Па·с.

Поскольку было предположено, что скорость между цилиндрами меняется с расстоянием линейно, то:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta r}.$$

Подставив сюда значения ν_2 и ν_1, найдем по формуле (5) действующий на внутренний цилиндр момент сил M, $M = 3{,}2 \cdot 10^{-5}$ Н·м.

Рассмотрим зависимость коэффициента внутреннего трения от температуры и давления при разных процессах.

	P = const	T = const
$\eta(P)$	–	const
$\eta(T)$	$\sim T^{1/2}$	–

При изотермическом расширении коэффициент внутреннего трения не зависит от давления только до тех пор, пока длина свободного пробега обратно пропорциональна давлению, то есть до тех пор, пока длина свободного пробега много меньше размеров сосуда.

5-5. Сколько жидкого воздуха испарится за 1 час из плохо откачанного дюаровского сосуда, если поверхность стенок сосуда $S = 600$ см^2? Расстояние между стенками $\ell = 1$ см, температура жидкого воздуха $t_1 = -180$ °C, температура наружных стенок $t_2 = 17$ °C. Теплота испарения жидкого воздуха $r = 1{,}83 \cdot 10^5$ Дж/кг в пустом сосуде, то есть когда температура обеих стенок $t_1 = 17$ °C, давление воздуха $P_0 = 0{,}133$ Па.

Решение:

Прежде всего, следует вычислить длину свободного пробега молекул воздуха, заключенного между стенками дюаровского сосуда. Если полученная величина окажется меньше, чем расстояние между стенками сосуда, то можно использовать формулу для коэффициента теплопроводности:

$$æ = \frac{1}{3}\lambda\rho\langle v\rangle C_v. \tag{1}$$

Если же окажется, что длина свободного пробега больше или равна расстоянию между стенками, то формула (1) будет неприменима.

Если $\lambda > \ell$, то соударениями молекул можно пренебречь и учитывать только удары молекул о стенки сосуда. В этом случае в пространстве между стенками имеются как бы два встречных потока молекул; один поток – молекулы, летящие со средней скоростью и средней энергией, соответствующей температуре более горячей стенки; другой поток – молекулы, летящие уже со средней скоростью и средней энергией, соответствующей температуре холодной стенки.

Из условий задачи получим, что:

$$\lambda = \frac{KT_2}{\sqrt{2}\pi d^2 P_0} = 8 \text{ см}.$$

Для расчета количества тепла, получаемого единицей площади холодной стенки сосуда за 1 с, необходимо знать число ударов, испытываемых стенкой за 1 с, и энергию, теряемую одной молекулой при ударе. При расчете предположим, что от стенки к стенке движется одна треть всех молекул, и все молекулы, летящие от одной стенки с температурой Т, обладают скоростью

$$v = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \tag{2}$$

и энергией

$$E_1 = \frac{5}{2}KT. \tag{3}$$

Энергия, отдаваемая одной молекулой холодной стенке при ударе

$$\Delta E_1 = \frac{5}{2}K(T_2 - T_1), \tag{4}$$

где T_2 – температура наружной стенки; T_1 – температура жидкого воздуха.

Число ударов, испытываемых стенкой за 1 с:

$$z = \frac{N}{3} \cdot \frac{1}{\tau},$$

где τ – время между двумя последовательными ударами молекулы о холодную стенку; N – общее число молекул.

Учитывая, что $\tau = \frac{\ell}{V_1} + \frac{\ell}{V_2} = \ell\frac{V_1 \cdot V_2}{V_1 + V_2}$, получим значение энергии, теряемой молекулами за 1 с в результате ударов о холодную стенку

$$\Delta E = \Delta E_1 \cdot \frac{N}{3} \cdot \frac{V_1 \cdot V_2}{\ell\left(V_1 + V_2\right)}. \tag{5}$$

Согласно выражению (2), вычислим

$$\frac{V_1 \cdot V_2}{V_1 + V_2} = \frac{\sqrt{\dfrac{3RT_1 \cdot T_2}{\mu}}}{\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}}.$$

Если учесть выражение (4) для ΔE_1, то найдем, что

$$\Delta E = \frac{5}{6\ell}NK\left(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}\right) \cdot \sqrt{\frac{3RT_1 \cdot T_2}{\mu}}. \tag{6}$$

Количество энергии, теряемой молекулами за промежуток времени Δt, а следовательно, и количество тепла, получаемого жидким воздухом

$$Q = \Delta E \cdot \Delta t. \tag{7}$$

Общее число молекул N может быть рассчитано из формулы начального давления P_0 при температуре t_2

$$N = \frac{P_0 \cdot S \cdot \ell}{KT_2}. \tag{8}$$

Подставив выражения (8) и (6) в формулу (7), найдем, что

$$Q = \frac{5P_0S}{6T_2}(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}) \cdot \sqrt{\frac{3RT_1 \cdot T_2}{\mu}} \cdot \Delta t. \qquad (9)$$

Находим теперь искомую величину:

$m = \dfrac{Q}{r}$; m = 14,5 г.

5-6. Две пластины площадью $S = 10^{-2} м^2$ каждая помещены в атмосфере азота на расстоянии $\Delta x = 2 \cdot 10^{-3}$ м одна от другой; температура одной пластины $t_1 = 0$ °C, другой $t_2 = 14$ °C, причем эти температуры поддерживаются постоянными. Количество тепла, прошедшее между пластинами за время $\tau = 1$ ч, вследствие теплопроводности газа оказалось равным $Q = 3{,}26 \cdot 10^3$ Дж. Определить размеры молекулы азота.

Решение:

Напишем уравнение Фурье для теплопроводности:

$$Q = -\text{æ}\left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right) \cdot \Delta S \cdot \Delta \tau .$$

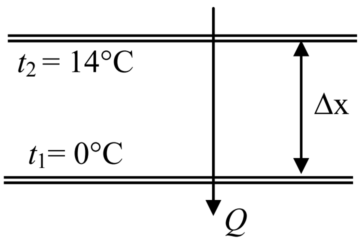

Рис. 29

Отсюда $\text{æ} = \dfrac{Q \cdot \Delta x}{(t_2 - t_1) \cdot S \cdot \tau}$,

æ = 0,013 Вт/(м·К).

С другой стороны, согласно МКТ коэффициент теплопроводности газов определяется по формуле

$æ = \frac{1}{3}\rho < \nu > \lambda C_v.$

Так как $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$, то $æ = \frac{\rho\langle v\rangle C_v}{3\sqrt{2}\pi d^2 n}$.

Преобразуем полученное выражение. Так как i = 5, то удельная теплоемкость при постоянном объеме равна:

$C_v = \frac{i}{2}\cdot\frac{R}{\mu}$; $C_v = \frac{2{,}8\cdot 10^4}{\mu}$ Дж/(кг·К).

Очевидно, что $\frac{\rho}{n}$ есть масса одной молекулы, но, с другой стороны, масса молекулы равна $\frac{\mu}{N_A}$, где N_A – число Авогадро, поэтому $\frac{\rho}{n} = \frac{\mu}{N_A}$.

Такую замену удобно произвести, так как μ и N_A – постоянные величины, не зависящие от состояния газа. Тогда для коэффициента теплопроводности получим:

$æ = \frac{iR\langle v\rangle}{6\sqrt{2}\pi d^2 N_A}$, откуда $d^2 = æ^{-1}\frac{iR\langle v\rangle}{6\sqrt{2}\cdot\pi\cdot N_A}$.

В последней формуле неизвестна только средняя скорость <ν>.

$$<\nu> = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}};$$

температуру газа t примем средней арифметической между t_1 и t_2, то есть $t = \frac{t_1 + t_2}{2} = 7$ °C, или T = 280 K. Тогда для средней скорости имеем $<\nu> = 4{,}6\cdot 10^2$ м/с.

Следовательно, квадрат эффективного диаметра молекулы равен:

$d^2 = æ^{-1}\frac{iR\langle v\rangle}{6\sqrt{2}\cdot\pi\cdot N_A}$; $d^2 = 9{,}17\cdot 10^{-20}$ м^2;

d = 3,03 · 10^{-10}м.

5-7. Определите массу азота, прошедшего вследствие диффузии через площадку 50 см^2 за 20 с, если градиент плотности в направлении, перпендикулярном площадке, равен 1 кг/м^4. Температура азота 290 К, а средняя длина свободного пробега его молекул равна 1 мкм.

Решение:

Запишем закон Фика для диффузии:

$$m = \left| D\frac{dP}{dx} \cdot S \cdot t \right|. \tag{1}$$

Коэффициент диффузии найдем по формуле:

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \cdot \lambda, \tag{2}$$

а среднюю скорость –

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}. \tag{3}$$

Подставив выражения (2) и (3) в формулу (1), получим:

$$m = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \cdot \lambda \cdot \frac{d\rho}{dx} \cdot S \cdot t; \quad m = 15{,}6 \text{ мг.}$$

5-8. Рассчитать, во сколько изменится число ударов, испытываемых 1 см^2 стенки сосуда за 1 с при двукратном увеличении объема двухатомного газа в случае: 1) изобарного расширения; 2) изотермического расширения; 3) адиабатного расширения. [0,7; 0,5; 0,43].

5-9. Вакуум называют средним, если длина свободного пробега молекул сравнима с размерами сосуда, содержащего разреженный газ. Какого порядка давление (в мм рт. ст.) нужно создать в круглой колбе диаметром 10 см, содержащей азот при температуре 24 °С, чтобы получить средний вакуум? Для молекул азота d = 3,1 · 10^{-10}м. [7,3 · 10^{-5} мм рт. ст.].

5-10. Зная диаметр молекулы кислорода ($d = 2{,}9 \cdot 10^{-10}$м), определить число столкновений молекулы с другими молекулами при нормальных условиях. [$4{,}2 \cdot 10^{3}$с$^{-1}$].

5-11. Как изменится в зависимости от абсолютной температуры T средняя квадратичная скорость молекул, средняя длина свободного пробега λ и число соударений молекулы в секунду z: 1) при изохорном процессе? 2) при изобарном процессе? 3) при изотермическом процессе?

5-12. Каков диаметр молекулы аргона, если его вязкость при 200 °C равна $3{,}22 \cdot 10^{-5}$Па·с? [$d = \begin{cases} 2{,}78 \cdot 10^{-10}\, м \\ 3{,}45 \cdot 10^{-10}\, м \end{cases}$; $M_1 = 39{,}9$; $M_2 = 79{,}8$].

5-13. Определить эффективный диаметр молекулы водорода, зная, что при температуре t = 100 °C его теплопроводность равна 0,154 Вт/(м·К). [$1{,}83 \cdot 10^{-10}$м].

5-14. Самолет летит со скоростью 540 км/ч. Будем считать, что вследствие вязкости воздух перестает увлекаться самолетом только на расстоянии 0,04 м от поверхности крыла. Найти касательную силу, действующую на каждый квадратный метр поверхности крыла. Для воздуха $d = 3 \cdot 10^{-10}$м; $\mu = 29 \cdot 10^{3}$ кг/моль. Температура воздуха 15° C. [$6{,}9 \cdot 10^{-2}$ Н].

5-15. Определить минимальное давление, при котором теплопроводность газа, заключенного между стенками сосуда Дьюара, еще не зависит от давления. Расстояние между стенками 5 мм, эффективный диаметр молекул газа положить $d = 3 \cdot 10^{-10}$м, температуру газа принять 15° C. [$1{,}5 \cdot 10^{-7}$мм рт. ст.].

5-16. Пространство между двумя коаксиальными цилиндрами заполнено газом. Радиусы цилиндров равны соответственно 5 см и 5,2 см. Высота внутреннего цилиндра равна 25 см. Внешний цилиндр вращается с частотой 360 об/мин. Для того чтобы внутренний цилиндр оставался неподвижным, к нему надо приложить касательную силу $1{,}38 \cdot 10^{-3}$Н. Рассматривая в первом приближении случай, как плоский, определить из данных этого опыта коэффициент вязкости газа, находящегося между цилиндрами. [$1{,}8 \cdot 10^{-5}$ Па·с].

5-17. В сосуде объемом 2 л находится $4 \cdot 10^{22}$ молекул двухатомного газа. Коэффициент теплопроводности газа равен 0,014 Вт/(м·К). Найти коэффициент диффузии газа при этих условиях. [$2 \cdot 10^{-5}$м^2/с].

5-18. Углекислый газ и азот находятся при одинаковых температуре и давлении. Найти для этих газов отношение: 1) коэффициентов диффузии; 2) коэффициентов внутреннего трения; 3) коэффициентов теплопроводности. Диаметры молекул этих газов считать одинаковыми.

$$\left[\frac{D_1}{D_2} = 0{,}8; \frac{\eta_1}{\eta_2} = 1{,}25\right]; [æ_1 : æ_2 = 0{,}96].$$

5-19. Расстояние между стенками дьюаровского сосуда равно 8 мм. При каком давлении теплопроводность воздуха, находящегося между стенками дьюаровского сосуда, начнет уменьшаться при откачке? Температура воздуха 17°С, диаметр молекул воздуха принять равным $3 \cdot 10^{-10}$м. [1,26 Па].

5-20. Какое количество тепла теряется ежечасно через окно за счет теплопроводности воздуха, заключенного между рамами? Площадь каждой рамы 4 м^2, расстояние между рамами 30 см. Температура помещения 18 °С, температура наружного пространства – 20 °С. Диаметр молекул воздуха принять равным $3 \cdot 10^{-10}$м, температуру воздуха между рамами считать равной среднему арифметическому температур помещения и наружного пространства. Давление равно 10^5 Па. [24 кДж].

5-21. Между двумя пластинами, находящимися на расстоянии 1 мм друг от друга, находится воздух. Между пластинами поддерживается разность температур 1 К. Площадь каждой пластины равна 100 см^2. Какое количество тепла передается за счет теплопроводности одной пластины к другой за 10 минут? Считать, что воздух находится при нормальных условиях. Диаметр молекулы воздуха принять равным $3 \cdot 10^{-10}$м. [78 Дж].

5-22. В вакуумной технике называют вакуумом такое разрежение газа, при котором длина свободного пробега молекул равна линейным размерам того сосуда, в котором находится газ. Какому давлению соответствует такое состояние газа, если размеры сосуда 20 см, а диаметр молекулы газа равен $3 \cdot 10^{-10}$ м? Температура 0 °С. [$3{,}5 \cdot 10^{-4}$ мм рт. ст.].

5-23. Какова длина свободного пробега молекул водорода, если среднее расстояние между молекулами равно $0{,}33 \cdot 10^{-6}$ см? Диаметр молекул $2{,}3 \cdot 10^{-8}$см. [$1{,}6 \cdot 10^{-5}$см].

5-24. Найти предельное значение давления, при котором и ниже которого теплопроводность газа, заключенного между стенками дьюаровского сосуда, начинает зависеть от давления. Расстояние между стенками 5 мм. Диаметр молекул газа $3 \cdot 10^{-8}$см. Температура газа 20 °С. [$1{,}5 \cdot 10^{-2}$ мм рт. ст.].

5-25. При температуре 0 °С и некотором давлении средняя длина свободного пробега молекул кислорода равна $9{,}5 \cdot 10^{-6}$ см. Чему будет равно число столкновений, испытываемых одной молекулой кислорода, если сосуд откачать до

0,01 первоначального давления. Температура остается неизменной. [$4{,}5 \cdot 10^7 c^{-1}$].

5-26. Можно ли считать вакуум с давлением 100 мкПа высоким, если он создан в колбе диаметром 20 см, содержащей азот при температуре 280 К? [Можно].

5-27. Найти число всех соударений, которые происходят в течение 1 с между всеми молекулами водорода, занимающего при нормальных условиях объем 1 мм^3. [$1{,}57 \cdot 10^{21}$].

5-28. В газоразрядной трубке находится неон при температуре 300 К и давлении 1 Па. Найти число атомов неона, ударяющихся за время 1 с о катод, имеющий форму диска площадью 1 см^2. [$3{,}38 \cdot 10^{18}$].

5-29. Найти среднюю продолжительность свободного пробега молекул кислорода при температуре 250 К и давлении 100 Па. [288 нс].

5-30. В сферическом сосуде объемом 2 дм^3 находится водород. При какой плотности водорода молекулы его не будут сталкиваться друг с другом? [$9{,}43 \cdot 10^{-8}$ кг/м^3].

5-31. Средняя длина свободного пробега молекул водорода при некотором давлении и температуре 21°С равна $9 \cdot 10^{-8}$м. В результате изотермического процесса давление газа увеличилось в 3 раза. Найти среднее число столкновений молекул водорода в 1 с в конце процесса. [$5{,}87 \cdot 10^{10} c^{-1}$].

5-32. Пространство между двумя коаксиальными цилиндрами, радиусы которых соответственно равны 5 и 5,5 см, заполнено кислородом при температуре 0 °С. Определить, выше какого давления коэффициент внутреннего трения кислорода не будет зависеть от давления. [2 Па].

6. Первое начало термодинамики

Основные формулы

1. Внутренняя энергия идеального газа является функцией только температуры T:

$$U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}RT, \tag{6.1}$$

где i – число степеней свободы молекул газа, R – универсальная газовая постоянная.

2. При элементарном изменении объема газа совершается работа:

$$\delta A = PdV. \tag{6.2}$$

3. Работа при изобарическом процессе:

$$A = P(V_2 - V_1). \tag{6.3}$$

4. Работа при изотермическом процессе

$$A = \frac{m}{\mu}RT\ell_n\frac{V_2}{V_1}. \tag{6.4}$$

5. Работа при адиабатическом процессе

$$A = -\Delta U. \tag{6.5}$$

6. Работа, связанная с изменением объема газа, в общем случае вычисляется по формуле:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} PdV, \tag{6.6}$$

где V_1 – начальный объем газа, V_2 – его конечный объем.

7. Первое начало термодинамики: в дифференциальной форме

$$\delta Q = dU + \delta A, \tag{6.7}$$

где δQ – элементарное количество теплоты, сообщенное системе, dU – изменение внутренней энергии, δA – работа, совершаемая системой при бесконечно малом изменении объема.

8. Молярная теплоемкость газа при изохорическом процессе:

$$\left(\frac{dQ}{dT}\right)_V = C_{\mu V} = \frac{i}{2}R, \tag{6.8}$$

где i – число степеней свободы молекулы газа.

9. Молярная теплоемкость при изобарическом процессе:

$$\left(\frac{dQ}{dT}\right)_P = C_{\mu P} = C_{\mu V} + R = \frac{i+2}{2}R. \tag{6.9}$$

10. Связь между молярной (C_μ) и удельной (C) теплоемкостями газа:

$$C_\mu = C\mu, \tag{6.10}$$

где μ – молярная масса газа.

11. Уравнения адиабатного процесса.

а) уравнение Пуассона:

$$PV^\gamma = \text{const}; \tag{6.11а}$$

$$\text{б) } T\cdot V^{\gamma-1} = \text{const}; \tag{6.11б}$$

$$\text{в) } T^\gamma \cdot P^{1-\gamma} = \text{const}, \tag{6.11в}$$

где $\gamma = \dfrac{C_P}{C_V} = \dfrac{i+2}{i}$ – показатель адиабаты.

Методические указания

Первое начало термодинамики в форме $\delta Q = dU + \delta A$ справедливо для элементарных квазистатических процессов. В результате квазистатического процесса система проходит через последовательный ряд равновесных состояний. Так как равновесное состояние системы может быть изображено точкой в некоторой системе координат (целесообразней в $P - V$), то квазистатический процесс в этой системе координат представляется некоторой линией. Графическое изображение различных процессов очень часто используют при решении задач термодинамическим методом. В системе координат ($P - V$) работа численно равна площади $V_1 12 V_2$ фигуры на рис. 30 (кривая 1–2 изображает соответствующий процесс).

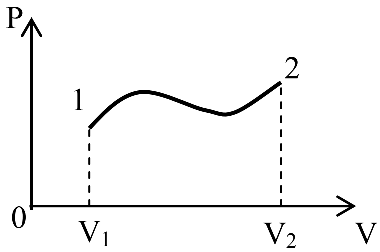

Рис. 30

Квазистатическим считают следующие изопроцессы: изохорный ($V = \text{const}$, $m = \text{const}$), изобарный ($P = \text{const}$, $m = \text{const}$) и изотермический ($T = \text{const}$, $m = \text{const}$). Другие процессы (например, адиабатный: $\delta Q = 0$) также могут быть квазистатическими, если они протекают столь медленно, что система проходит через последовательный ряд равновесных состояний.

Количество теплоты δQ и работа δA являются характеристиками процессов теплопередачи и совершения работы. Эти процессы различны: первый происходит на микроуровне (в результате взаимодействия микрообъектов – молекул, атомов и т. д.), второй – на макроуровне (в результате взаимодействия макротел). Процесс теплопередачи называют элементарным, если изменение температуры dT столь мало, что теплоемкость можно считать постоянной. В изохорном и изобарном процессах количество теплоты, полученное газом, всегда связано с изменением его температуры:

$$\delta Q = \upsilon C dT,$$

где $C = C_V$ при изохорном процессе и $C = C_P$ при изобарном. Поскольку обе молярные теплоемкости C_P и C_V – величины положительные, знаки δQ и dT всегда совпадают. Следовательно, при нагревании ($dT > 0$) газ получает тепло ($\delta Q > 0$), при охлаждении ($dT < 0$) газ отдает тепло ($\delta Q < 0$).

При изотермическом и адиабатическом процессах не существует связи между приращением температуры газа и количеством теплоты, полученным им, по той причине, что в первом процессе отсутствует изменение температуры ($dT = 0$), хотя газ при этом получает или отдает тепло $\delta Q = \delta A$, а во втором процессе газ не получает и не отдает тепло ($\delta Q = 0$), хотя при этом изменяется его температура.

Расчет количества теплоты в случае неэлементарного процесса теплопередачи производится по формуле:

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} \upsilon C dT .$$

Для вычисления этого интеграла необходимо знать зависимость теплоемкости C от других параметров.

Процесс совершения работы называют элементарным, если изменение объема dV столь мало, что давление P можно считать постоянным. Тогда работу можно рассчитать по формуле:

$$\delta A = P dV.$$

Для неэлементарного процесса:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV .$$

Решение задач

6-1. Баллон емкостью V = 20 л с кислородом при давлении $P_1 = 100$ кПа и температуре $t_1 = 7$ °С нагревается до $t_2 = 27$ °С. Какое количество теплоты при этом поглощает газ?

Решение:

Поскольку коэффициент теплового расширения для твердых приблизительно в сто раз меньше, чем для газов, то в условиях данной задачи можно пренебречь расширением баллона и считать процесс нагревания газа изохорным.

В зависимости от того, применять ли непосредственно первое начало термодинамики или формулу, определяющую теплоемкость тела, возможны два способа решения.

Первый способ. Применим к рассматриваемому газу первое начало термодинамики. Поскольку при изохорном процессе газ не совершает работы, то получим $Q = \Delta U$.

Из формулы внутренней энергии идеального газа, используя уравнение состояния, запишем:

$$U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}RT = \frac{i}{2}PV.$$

Отсюда для изменения внутренней энергии имеем:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{i}{2}(P_2 - P_1)V = \frac{i}{2}P_1V\left(\frac{P_2}{P_1} - 1\right).$$

Заменяя по закону Шарля для изохорного процесса отношение давлений $\frac{P_2}{P_1}$ отношением термодинамических температур $\frac{T_2}{T_1}$, получим:

$$Q = \Delta U = \frac{i}{2}P_1V\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right). \qquad (1)$$

Кислород является двухатомным газом, поэтому число степеней свободы i = 5.

Второй способ. Из формулы для молярной теплоемкости следует, что элементарное количество теплоты, сообщенное телу при повышении его температуры на dT, равно

$$\delta Q = \upsilon C dT. \qquad (2)$$

Число молей υ найдем из уравнения состояния:

$$\upsilon = \frac{m}{\mu} = \frac{P_1 V}{R T_1}.$$

Так как газ нагревается при постоянном объеме, то

$$C = C_V = \frac{i}{2} R.$$

Подставив значения υ и C_V в (2), получим:

$$\delta Q = \frac{i}{2} \frac{P_1 V}{T_1} dT. \qquad (3)$$

Отсюда, интегрируя и учитывая при этом, что все величины i, P_1, T_1, V – постоянные, найдем полное количество теплоты, поглощенное газом при нагревании от T_1 до T_2:

$$Q = \frac{i}{2} \frac{P_1 V}{T_1} (T_2 - T_1), \ Q = 35 \text{кДж}.$$

6-2. Водород H_2 объемом 1 м^3, находившийся при нормальных условиях, сначала изохорно перевели в состояние с давлением, в n раз больше первоначального, а затем изобарно в состояние с объемом, в k раз больше первоначального. Определить изменение внутренней энергии газа, работу, совершенную им, и полученное количество теплоты.

Решение:

Физическая система состоит из некоторой массы m идеального газа.

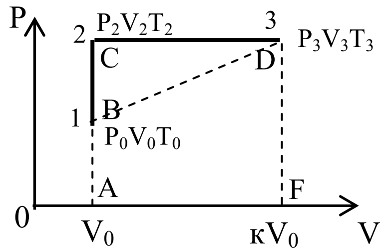

Рис. 31

Начальное макросостояние системы (1 на рис. 31) известно (нормальное давление $P_0 = 10^5$ Па, нормальная температура $T_0 = 273$ К и объем $V_0 = 1$ м^3 (по условию)). Состояния и процессы, в которых участвовала система, изобразим графически в системе координат P–V (рис. 31). Найдем параметры второго 2 и третьего 3 макросостояний системы. Для этого используем уравнение Менделеева-Клапейрона и определения изопроцессов:

$$P_2=nP_0,\ V_2=V_0,\ T_2=\frac{\mu P_2 V_2}{mR}=\frac{\mu n P_0 V_0}{mR}; \tag{1}$$

$$P_3=P_2=nP_0,\ V_3=kV_0,\ T_3=\frac{\mu P_3 V_3}{mR}=\frac{\mu nk P_0 V_0}{mR}. \tag{2}$$

Изменения внутренней энергии

$$\Delta U=\frac{m}{\mu}\frac{iR}{2}(T_3-T_0)=\frac{miR}{2\mu}\left(\frac{\mu nkP_0V_0}{mR}-\frac{\mu P_0V_0}{mR}\right)= \\ =\frac{i}{2}P_0V_0(nk-1). \tag{3}$$

В изохорном процессе $dV = 0$ и работа равна нулю. Работа в изобарном процессе:

$$A = P_2(V_3 - V_2) = nP_0(kV_0 - V_0) = P_0V_0n(k - 1). \tag{4}$$

Количество теплоты:

$$Q = Q_{12} + Q_{23} =$$
$$= \frac{m}{\mu} C_V (T_2 - T_0) + \frac{m}{\mu} C_P (T_3 - T_2) =$$
$$= \frac{P_0 V_0}{2} [i(nk - 1) + 2n(k - 1)]. \qquad (5)$$

Количество теплоты можно было бы рассчитать по первому началу термодинамики:

$$Q = \Delta U + A =$$
$$= \frac{i}{2} P_0 V_0 (nk - 1) + P_0 V_0 n(k - 1) = \frac{P_0 V_0}{2} [i(nk - 1) + 2n(k - 1)] .$$

Для числового расчета необходимо выбрать разумные значения величин n и k. Из уравнений (2) видно, что значение определяет максимальное давление $P_3 = nP_0$, а произведение $n \cdot k$ – максимальную температуру $T_3 = nkT_0$. Значение n не может превышать $n_{max} = 100$, ибо при давлениях, равных (и больших) 100 P_0, газ уже не является идеальным. Произведение nk не может превышать значения $(nk)_{max} = 10$, так как при температурах $T_3 \approx 10T_0 \approx 3 \cdot 10^3$ К (и больших), во-первых, могут расплавиться стенки сосуда (необходимо их охлаждать) и, во-вторых, молекулярный водород станет атомарным, а при еще больших температурах в сосуде окажется уже водородная плазма. Полагая, что n = 5 и k = 2, из формул (3), (4) и (5) получаем:

$\Delta U \approx 2,2 \cdot 10^6$ Дж; $A = 5 \cdot 10^5$ Дж; $Q \approx 2,7 \cdot 10^6$ Дж.

Как изменились бы искомые величины, если бы система из начального состояния перешла в конечное (квазистатически) по пунктирной прямой (рис. 32)?

Изменение внутренней энергии ΔU не зависит от вида процесса и определяется начальным и конечным состоянием системы. Поэтому изменение внутренней энергии остается прежним и будет равно $\Delta U \approx 2,2 \cdot 10^6$ Дж. Работа уменьшится (площадь трапеции ABDE меньше площади прямоугольника

ACDE). Следовательно, по первому началу термодинамики $Q = \Delta U + A$ система получит и меньшее количество теплоты.

6-3. Два моля азота N_2, находившиеся при нормальных условиях, сначала изотермически перевели в некоторое состояние, а затем квазистатически и адиабатно – в конечное состояние с объемом в четыре раза больше первоначального. Определить работу, совершенную газом, если в изотермическом процессе ему было сообщено Q = 11300 Дж теплоты.

Решение:

Определим промежуточное и конечное макросостояния системы. Уравнение Менделеева-Клапейрона приводит к неопределенной системе уравнений. Используем первое начало термодинамики. Для изотермического процесса:

$$\Delta U = 0,\ Q = A_1 = \int_{V_0}^{V_2} PdV = \int_0^{V_2} \frac{m}{\mu} RT_0 \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT_0 \ell n \frac{V_2}{V_0},$$

где A_1 – работа, совершенная газом в изотермическом процессе. Отсюда определяем объем промежуточного состояния:

$$V_2 = V_0 e^{Q\mu/(mRT_0)}$$

Далее, используя уравнение адиабатного процесса

$$T_0 V_0^{\gamma-1} = T_3 (4V_0)^{\gamma-1},$$

находим конечную температуру T_3:

$$T_3 = T_0 \frac{e^{Q\mu(\gamma-1)/(mRT_0)}}{4^{\gamma-1}}.$$

В этих формулах $\gamma = \dfrac{C_P}{C_V} = \dfrac{i+2}{i}$ – показатель адиабаты.

Для азота i = 5. Найдем изменение внутренней энергии:

$$\Delta U = \frac{m}{\mu}\frac{iR}{2}\left(T_3 - T_0\right) = \frac{m}{\mu}\frac{iRT_0}{2}\left[\frac{\ell^{Q\mu(\gamma-1)/(mRT)}}{4^{\gamma-1}} - 1\right].$$

Искомая работа равна $A = Q - \Delta U$; $A \approx 4500$ Дж.

6-4. Найти для идеального газа уравнение такого процесса, при котором теплоемкость газа изменяется с температурой по закону C = α/T, где α = const.

Решение:

Применим первое начало термодинамики в форме δQ = dU +δA для одного моля газа:

$$\frac{\alpha}{T}dT = C_V dT + PdV.$$

Используя уравнение Менделеева-Клапейрона PV = RT, перепишем это уравнение в виде:

$$\frac{\alpha}{T}dT = C_V dT + RT\frac{dV}{V}.$$

Разделив левую и правую части на RT, после интегрирования получаем:

$$-\frac{\alpha}{RT} = \frac{1}{\gamma - 1}enT + \ell nV + const.$$

Отсюда находим искомое уравнение процесса:

$VT^{1/(\gamma-1)}\ell^{(\alpha/(RT)} = const.$

6-5. Нагревается или охлаждается идеальный газ, если он расширяется по закону $\frac{Q}{PV^2} = b$? Какова его молярная теплоемкость при этом процессе?

Решение:

Качественный анализ происходящего процесса удобнее всего провести, рассмотрев график этого процесса в координатах P–V и сравнив его с изотермой и адиабатой, изображающими расширение газа из одного и того же начального состояния до одинакового конечного объема (рис. 32).

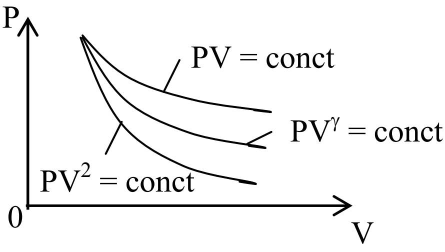

Рис. 32

График рассматриваемого процесса лежит ниже изотермы, следовательно, расширение, происходящее по указанному закону, сопровождается понижением температуры. Он лежит также ниже адиабаты. Это значит, что конечная температура при данном расширении меньше, чем конечная температура, которая установилась бы при адиабатном расширении, и убыль внутренней энергии больше, чем при отсутствии теплообмена.

Работа, совершенная газом, меньше, чем при адиабатном процессе. Следовательно, работа газа при его расширении по указанному закону меньше, чем убыль внутренней энергии газа. Это может быть только в том случае, если расширение сопровождается отдачей тепла.

Найдем теперь аналитическую связь между объемом газа и его температурой и молярную теплоемкость газа при данном процессе.

Согласно уравнению Менделеева-Клапейрона для одного моля

$$P = \frac{RT}{V}. \tag{1}$$

Заданный закон расширения газа может быть записан как:

$$P = \frac{b}{V^2}. \tag{2}$$

Приравнивая правые части равенства (1) и (2), получим:

$$\frac{b}{V} = RT. \tag{3}$$

Действительно, увеличение объема сопровождается уменьшением температуры. Для нахождения молярной теплоемкости применим к рассматриваемому процессу первое начало термодинамики:

$$\delta Q = dU + \delta A \text{ или } C_x\, dT = C_V\, dT + PdV. \tag{4}$$

Согласно уравнению Клапейрона-Менделеева:

$$PdV = RdT - VdP. \tag{5}$$

Величина dP может быть найдена из уравнения (2):

$$dP = -\frac{2bdV}{V^3}. \tag{6}$$

Умножаем правую и левую части равенства (6) на V:

$$VdP = -\frac{2bdV}{V^2}. \tag{7}$$

Дифференцирование равенства (3) дает, что:

$$-\frac{bdV}{V^2} = RdT. \tag{8}$$

При сравнении выражений (8) и (7) находим, что:

$$VdP = 2RdT. \tag{9}$$

Подставив последовательно выражения (9) в уравнения (5) и (4), получим:

$C_X = C_V - R$.

Полученная величина теплоемкости – положительная, следовательно, охлаждение газа будет сопровождаться отдачей тепла, нагревание – поглощением тепла.

6-6. Какую работу надо совершить, чтобы, медленно сжимая при помощи поршня газ в цилиндре с хорошо проводящими тепло стенками, увеличить его давление в два раза? Начальное давление газа равно атмосферному $P_1 = 10^5$ Па, начальный объем $V_1 = 5$ л. Во время сжатия давление и температура окружающего воздуха остаются постоянными. Весом поршня и трением пренебречь. Сколько тепла выделяется при сжатии газа?

Решение:

Вначале выясним, каким процессом является сжатие газа в условиях задачи. Медленное протекание процесса и большая теплопроводность стенок цилиндра позволяют считать температуру газа равной температуре окружающей среды в течение всего процесса. А так как последняя, согласно условию, остается неизменной, то сжатие газа следует считать изотермическим процессом.

Работа газа при изотермическом процессе определяется по формуле:

$$A_Г = \frac{m}{\mu} RT\ell n \frac{V_2}{V}.$$

Преобразуем ее применительно к данной задаче, используя уравнение Менделеева-Клапейрона и закон Бойля-Мариотта:

$$A_Г = \frac{m}{\mu} RT\ell n \frac{V_2}{V_1} = P_1 V_1 \ell n \frac{P_1}{P_2}.$$

Поскольку $P_1 < P_2$, то $A_Г < 0$, то есть работа, совершенная газом при его сжатии, отрицательна. В этом случае положительной будет работа $A_{внеш.}$, совершенная внешними силами, сжимающими при помощи поршня газ в цилиндре:

$$A_{внеш.} = -A_Г = P_1 V_1 \ell n \frac{P_2}{P_1}. \qquad (1)$$

Однако выражение (1) еще не является ответом, ибо $A_{внеш.}$ есть сумма двух работ: работы A силы, приложенной к поршню, и работы $A_{атм.}$ силы атмосферного давления, то есть:

$$A_{внеш.} = A + A_{атм.} \qquad (2)$$

По условию задачи искомой величиной является работа A. Величину $A_{атм.}$ можно найти по формуле работы газа при изобарном процессе, поскольку атмосферное давление P_1 остается постоянным:

$$A_{атм.} = P_1(V_1 - V_2). \qquad (3)$$

При этом индексы у объемов проставлены так, чтобы работа $A_{атм.}$, вычисленная по (3), была положительной. Преобразуем (3), учитывая, что газ в цилиндре сжимается изотермически:

$$A_{атм.} = P_1V_1\left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right) = P_1V_1\left(1 - \frac{P_1}{P_2}\right). \qquad (4)$$

Подставив в (2) вместо $A_{внеш.}$ и $A_{атм.}$ их значения по (1) и (4), найдем искомую работу:

$$A = A_{внеш.} - A_{атм.} = P_1V_1\left(\ell n\frac{P_2}{P_1} - 1 + \frac{P_1}{P_2}\right).$$

Для определения количества теплоты, выделенного при сжатии газа, воспользуемся первым началом термодинамики. Поскольку при изотермическом процессе (T = const) изменение внутренней энергии равно 0, то количество теплоты, сообщенное газу, равно:

$$Q = A_Г = P_1V_1\ell n\frac{P_1}{P_2} = -P_1V_1\ell n\frac{P_2}{P_1}.$$

Величина Q оказалась отрицательной, что обусловлено выделением теплоты газом при его сжатии.

A = 0,1 кДж; Q = – 0,35 кДж.

6-7. 160 г кислорода нагревают от 50 °С до 60 °С. Найти количество поглощенного тепла и изменение внутренней энергии в случае, если процесс происходит: а) при постоянном объеме; б) при постоянном давлении. [а) 1,04 кДж; б) 1,04 кДж; 1,47 кДж].

6-8. Азот, занимающий при давлении 100 кПа объем 10 л, расширяется вдвое. Найти конечное давление и работу, совершенную газом, в случае: а) изобарного процесса; б) изотермического процесса; в) адиабатного процесса. [а) 1 кДж; б) 50 кПа, 700 Дж; в) 38 кПа, 600 Дж].

6-9. В цилиндре с подвижным поршнем заключен азот. Газ расширяется сначала адиабатически от объема $V_1 = 1 \cdot 10^{-3}$м^3 до объема $V_2 = 3 \cdot 10^{-3}$м^3, потом изобарически от объема V_2 до объема $V_3 = 5 \cdot 10^{-3}$м^3, потом изотермически от V_3 до $V_4 = 7 \cdot 10^{-3}$м^3. Начальная температура газа $T_1 = 290$ К; начальное давление $P_1 = 6{,}5 \cdot 10^5$ Па. Определить полную работу, совершенную газом, изменение его внутренней энергии и количество подведенного к газу тепла. Найти конечное давление газа и температуру. [1097 Дж; 1,1213 Дж; 10^5 Па; 312 К].

6-10. Какое количество тепла поглощается при изотермическом расширении $5 \cdot 10^{-4}$м^3 воздуха, если давление убывает от $6 \cdot 10^5$ Па до $1 \cdot 10^5$ Па? [5,37 Дж].

6-11. 0,035 кг азота, находящегося при температуре 17 °С, расширяются адиабатически, причем объем возрастает в 8 раз. Найти работу, совершенную при расширении. [4260 Дж].

6-12. При изобарическом расширении некоторой массы двухатомного газа, находящегося под давлением 10^5 Па, внутренняя энергия его изменилась на 490 Дж. Найти приращение объема газа. [1960 см^3].

6-13. 0,01 кг кислорода находятся под давлением $3 \cdot 10^5$ Па при температуре 10 °С. После расширения вследствие нагревания при постоянном давлении газ занял объем 0,01 м^3. Найти количество тепла, сообщенное газу, изменение внутренней энергии газа и работу, произведенную газом при расширении. [7970 Дж; 5770 Дж; 2200 Дж].

6-14. Чему равна внутренняя энергия 0,012 кг кислорода при температуре 700 °С, если при этом 1/3 молекул диссоциировала на атомы? [8090 Дж].

6-15. При адиабатическом увеличении объема кислорода в 10 раз его внутренняя энергия уменьшилась на 42 кДж. Начальная температура кислорода 280 К. Найдите массу кислорода. [384 г].

6-16. Газ изотермически расширяется до объема, который в 6 раз больше первоначального. Во сколько раз работа полного расширения больше работы на первой половине расширения при увеличении объема только в 3 раза? [1,631].

6-17. При изобарическом расширении 1 моль некоторого газа, занимавшего объем 12 л при давлении $2 \cdot 10^5$ Па, было подведено к газу 2750 Дж тепла, при этом газ совершил работу 1100 Дж. Определите: а) параметры газа в конечном состоянии; б) из какого числа атомов состоят молекулы газа. [$17{,}5 \cdot 10^{-3}$ м^3; 420 К; i = 3].

6-18. Некоторое количество азота, заключенное в цилиндре под поршнем, бесконечно медленно переводят из состояния с параметрами V_1 и P_1 в состояние с параметрами $V_2 = \dfrac{V_1}{3}$, $P_2 = 4P_1$. На графике зависимости давления газа от объема процесс изображается прямой линией. Определите: а) изменение внутренней энергии газа; б) работу, совершаемую над газом; в) выделяется ли в этом процессе теплота или газ поглощает эту теплоту. [5/6 P_1V_1; 5/3 P_1V_1; 2,5 P_1V_1].

6-19. При изобарическом расширении некоторой массы двухатомного газа, находящегося под давлением 10^5 Па, внутренняя энергия его изменилась на 500 Дж. Определите увеличение объема газа. [$2 \cdot 10^{-3}$ м^3].

6-20. Двухатомный газ первоначально имеет объем 50 л, и его давление равно $3 \cdot 10^5$ Па. Газ нагревают изохорически до тех пор, пока давление не удвоится. После этого газ изотермически расширяют до начального давления и, наконец, его изобарически охлаждают до первоначального объема. Определите в каждом процессе: а) работу, производимую газом; б) изменение его внутренней энергии; в) количество теплоты, получаемое газом.

а) [0; $20{,}7\cdot10^3$ Дж; $-15\cdot10^3$ Дж];

б) [$37{,}5\cdot10^3$ Дж; 0; $-37{,}5\cdot10^3$ Дж];

в) [37,5 Дж; $20{,}7\cdot10^3$ Дж; $-52{,}5\cdot10^3$ Дж].

6-21.

Углекислый газ находится в баллоне емкостью 20,5 л при температуре 0 °С и давлении $5\cdot10^5$ Па. Определите температуру и давление, если газ получит $1{,}25\cdot10^4$ Дж теплоты. [384 К; $7{,}05\cdot10^5$ Па].

6-22. Какое количество теплоты выделится, если 1 г азота, взятого при температуре 0 °С под давлением 10^5 Па, изотермически сжать до давления 10^6 Па? [–186 Дж].

6-23. Некоторая масса азота при давлении $1{,}01\cdot10^5$ Па имеет объем 5 л, а при давлении $3\cdot10^5$ Па – объем 2 л. Переход от первого состояния ко второму был произведен в два этапа: а) сначала по адиабате, потом по изохоре; б) сначала по изохоре, затем по адиабате. Определите изменение внутренней энергии, количество полученной или отданной теплоты и произведенную работу. [$2{,}5\cdot10^2$ Дж; а) $-5{,}5\cdot10^2$ Дж; $-3\cdot10^2$ Дж; б) $A = -4{,}61\cdot10^2$ Дж; $-2{,}11\cdot10^2$ Дж].

6-24. Некоторая масса двухатомного газа подвергается сжатию: один раз изотермически, другой раз адиабатно. Начальные температура и давление сжимаемого газа оба раза одинаковы. Конечное давление оба раза в n раз больше начального. Найдите отношения работ сжатия при адиабатном и изотермическом процессах. Рассмотрите случаи: а) $n = 2$; б) $n > 100$. [0,8; 1,5].

6-25. Переход из первого состояния во второе был совершен в два этапа: а) сначала по изохоре, затем по изобаре; б) сначала по изобаре, затем по изохоре. Определите изменение внутренней энергии, количество отданной или полученной теплоты и произведенную работу в обоих случаях. Почему результаты для рассмотренных двух переходов различны?

[ΔU = 250 Дж];

а) [–6,5·10^2 Дж; –9·10^2 Дж]; б) [–0,5·10^2 Дж; –3·10^2 Дж].

6-26. Какая часть количества теплоты, подводимой к идеальному газу при изобарическом процессе, расходуется на увеличение внутренней энергии газа, а какая часть – на работу, совершаемую газом при расширении, если газ: а) одноатомный; б) двухатомный; в) многоатомный? [а) 0,6; 0,4; б) 0,71; 0,29; в) 0,75; 0,25].

6-27. Плотность некоторого газа при нормальных условиях 1,25 кг/м^3. Отношение удельных теплоемкостей 1,4. Определите удельные теплоемкости C_P и C_V этого газа. [1040 Дж/(кг·К); 740 Дж/(кг·К)].

6-28. Определить показатель адиабаты для газовой смеси, состоящей из 4 г водорода и 22 г углекислого газа. [1,38].

6-29. При нагревании газа на 25 К при постоянном давлении необходимо затратить 500 Дж тепла, а при охлаждении того же количества газа на 75 К при постоянном объеме выделяется 1070 Дж. Определить показатель адиабаты. [1,4].

6-30. Расширяясь, многоатомный газ совершает работу 245 Дж. Какое количество теплоты было подведено к газу, если он расширяется изобарически и изотермически? [980 Дж; 245 Дж].

6-31. В цилиндре диаметром 40 см содержится 0,08 $м^3$ двухатомного газа. На сколько следует увеличить нагрузку поршня при подводе 84 Дж тепла, чтобы поршень не пришел в движение? [53 Н].

7. Второе начало термодинамики

Основные формулы

1. Термический коэффициент полезного действия (к. п. д.) цикла в общем случае:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \qquad (7.1)$$

где А – работа, совершаемая рабочим телом при круговом процессе, Q_1 – количество теплоты, полученное рабочим телом, Q_2 – количество теплоты, переданное рабочим телом холодильнику.

2. К. п. д. цикла Карно:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \text{ или } \eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \qquad (7.2)$$

где T_1 – температура нагревателя, T_2 – температура холодильника.

3. Изменение энтропии:

$$\Delta S = \int_A^B \frac{\delta Q}{T}, \qquad (7.3)$$

где А и В – пределы интегрирования, соответствующие начальному и конечному состояниям системы. Так как процесс равновесный, то интегрирование проводится по любому пути.

4. Формула Больцмана:

$$S = K \ln W, \qquad (7.4)$$

где S – энтропия системы, W – термодинамическая вероятность ее состояния, K – постоянная Больцмана.

Методические указания

При рассмотрении циклов необходимо учитывать те же замечания, что рассматривались при использовании первого начала термодинамики.

В задачах на расчет изменения энтропии используются важнейшие свойства энтропии: 1) энтропия является функцией состояния; 2) энтропия сложной системы равна сумме энтропий ее частей.

Рассчитывая изменения энтропии тела по формуле (7.3), следует помнить, что здесь δQ означает количество теплоты, полученное телом. Поэтому, если тело отдает тепло, величину δQ следует ставить в (7.3) со знаком минус.

Если переход тела из начального состояния в конечное осуществляется несколькими последовательно протекающими процессами, то полное изменение энтропии равно алгебраической сумме изменений энтропии в каждом процессе.

Соотношение (7.3) выражает изменение энтропии только в обратимом процессе.

Решение задач

7-1. Цикл (рис. 33) состоит из двух изотерм ($T_1 = 600$ К, $T_2 = 300$ К) и двух изобар ($P_1 = 4\ P_2$). Определить к. п. д. цикла, если рабочим веществом служит идеальный газ, число степеней свободы молекул которого $i = 5$.

Решение:

Физическая система состоит из одного моля идеального газа. В этой системе происходит круговой процесс, состоящий из двух изотерм и двух изобар (рис. 33). Для нахождения к. п. д. цикла по формуле (1) $\eta = \dfrac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$ необходимо определить Q_1 и Q_2. Система получает теплоту Q_1 при изобарном переходе из состояния 1 с параметрами P_1, V_1', T_1 в состояние с параметрами P_2, V_2, T_2:

$$Q_1 = C_p(T_1 - T_2) + RT_1\, \ell n\, (V_2/V_1). \qquad (2)$$

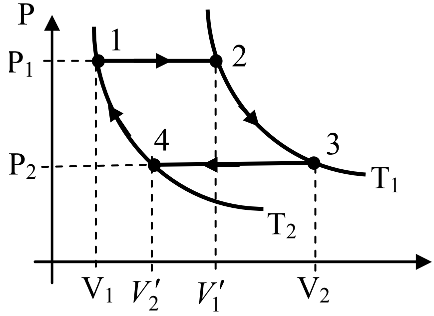

Рис. 33

Система отдает теплоту Q_2 холодильнику при изобарном переходе из состояния 3 в состояние 4 с параметрами P_2, V_2', T_2 и при изотермическом сжатии из состояния 4 в состояние 1:

$$Q_2 = C_p(T_1 - T_2) + RT_2\, \ell n\, (V_2'/V_1). \qquad (3)$$

Из закона Бойля-Мариотта для изотерм T_1 и T_2

$P_1V_1' = P_2V_2$ и $P_1V_1 = P_2V_2'$ следует, что $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{V_2'}{V_1} = \dfrac{P_1}{P_2}$.

Подставляя эти отношения объемов в формулы (2) и (3) и учитывая (1), находим:

$$\eta = \frac{R(T_1 - T_2)\ell n(P_1 / P_2)}{C_p(T_1 - T_2) + RT_1 \ell n(P_1 / P_2)}.$$

Используя известное соотношение $C_p = \dfrac{i+2}{2}R$, где i – число степеней свободы, получаем:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1 + \dfrac{(i+2)(T_1 - T_2)}{2\ell n(P_1 / P_2)}}; \qquad \eta \approx 22{,}5\ \%.$$

К. п. д. цикла Карно для таких же температур T_1 нагревателя и T_2 холодильника

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}; \quad \eta \approx 50\ \%.$$

7-2. Цикл состоит из изотермы (T_1 = 600 К), изобары и изохоры (рис. 34). Отношение $V_2/V_1 = 2$. Рабочее вещество – идеальный газ (i = 5). Определить к. п. д. цикла как функцию максимальной (T_1) и минимальной температур рабочего вещества.

Решение:

Определим минимальную температуру. В изобарном процессе газ охлаждается, а в изохорном – нагревается. Следовательно, минимальная температура – это температура T_3 в состоянии 3. Из уравнений состояния для точек 2 и 3

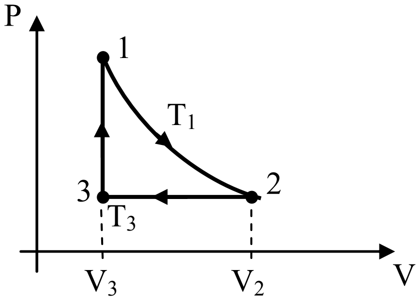

Рис. 34

$PV_2 = RT_1$, $PV_3 = RT_3$ находим минимальную температуру:

$T_3 = T_1 \cdot V_3/V_2 = 0{,}5\ T_1$; $\quad T_3 = 300$ К.

Определим количество теплоты, поглощаемое (отдаваемое) рабочим веществом в указанных процессах.

Для изотермического процесса:

$Q_{12} = A_{12} = RT_1 \ell n(V_2/V_1)$.

Так как $V_1 = V_3$, а $V_2/V_3 = T_1/T_3$, то $Q_{12} = RT_1 \ell n(T_1/T_3)$.

Для изобарного процесса:

$Q_{23} = C_p(T_1 - T_3) = \dfrac{i+2}{2} R(T_1 - T_3)$.

Для изохорного процесса:

$Q_{31} = C_v(T_1 - T_3) = \dfrac{i}{2} R(T_1 - T_3)$.

$Q_1 = Q_{12} + Q_{31}$; $Q_2 = Q_{23}$.

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{Q_{12} + Q_{31} - Q_{23}}{Q_{12} + Q_{31}} = 1 - \frac{\frac{1}{2}(i+2)(T_1 - T_3)}{T_1 \ell n(T_1 / T_3) + \frac{i}{2}(T_1 - T_3)}.$$

$\eta \approx 10$ %.

7-3. Идеальный трехатомный газ совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар (рис. 35). Определить к. п. д. цикла, если $V_1 = 1$ л, $V_2 = 2$ л, $P_1 = 1 \cdot 10^5$ Па, $P_2 = 2 \cdot 10^5$ Па. Считая величины V_1, V_2, P_1, P_2 переменными, принимающими любые положительные значения, найти наибольший к. п. д. данного цикла.

Решение:

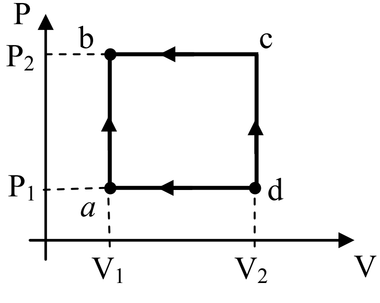

Рис. 35

Изображенный на рис. 35 цикл состоит из четырех последовательно протекающих процессов. Рассмотрим их по порядку.

1. Участок ab. Объем V_1 газа сохраняется, при этом давление его увеличивается от P_1 до P_2. Так как при изохорном процессе давление газа пропорционально абсолютной температуре, поэтому температура газа здесь повышается. Следовательно, газ при этом получает (от нагревателя) количество теплоты Q_{ab}.

2. Участок bc. Давление P_2 газа сохраняется, объем же увеличивается от V_1 до V_2, при этом газ совершает работу, равную:

$$A_{bc} = P_2 (V_2 - V_1). \qquad (1)$$

Так как при изобарном процессе объем газа пропорционален абсолютной температуре, то температура газа и в этом процессе повышалась. Следовательно, и здесь газ получил количество теплоты Q_{bc}.

3. Участок cd. Процесс идет изохорно (V_2 = const), давление газа уменьшается от P_2 до P_1, что означает понижение температуры. Следовательно, газ при этом отдает (холодильнику) количество теплоты Q_{cd}.

4. Участок da. При постоянном давлении P_1 газ сжимается от объема V_2 до объема V_1 и совершает при этом отрицательную работу:

$$A_{da} = P_1 (V_1 - V_2) = - P_1 (V_2 - V_1). \qquad (2)$$

Уменьшение объема при изобарном процессе связано с понижением температуры газа. Следовательно, газ отдает (холодильнику) некоторое количество тепла Q_{da}.

Теперь можно приступить к вычислению к. п. д. цикла по формуле:

$$\eta = \frac{A}{Q_1}. \qquad (3)$$

Работа газа, совершенная им на участках bc и da, равна, согласно (1) и (2),

$$A = A_{bc} + A_{da} = (P_2 - P_1) (V_2 - V_1). \qquad (4)$$

Формулу (4) можно получить сразу, если учесть, что работа газа, совершенная за цикл, численно равна площади фигуры, ограниченной замкнутой линией-графиком цикла в системе координат (P, V). В данном случае эта работа равна площади прямоугольника abcd.

Количество теплоты Q_1, сообщенное газу при его нагревании, найдем на основании первого начала термодинамики. Учитывая, что газ получает теплоту на участках ab и bc, запишем для всего пути процесса abc:

$$Q_1 = \Delta U + A_{bc}. \tag{5}$$

Изменение внутренней энергии Δu при переходе газа из состояния а в состояние с будет равно:

$\Delta u = u_c - u_a = \dfrac{i}{2}\dfrac{m}{\mu}R(T_c - T_a)$, или на основании уравнения газового состояния:

$$\Delta u = \frac{i}{2}(P_2V_2 - P_1V_1). \tag{6}$$

Подставив в (5) вместо ΔU и A_{bc} их значения по (6) и (1), получим:

$$Q_1 = \frac{i}{2}(P_2V_2 - P_1V_1) + P_2(V_2 - V_1). \tag{7}$$

Подставив в (3) значения A и Q_1 из (4) и (7), найдем:

$$\eta = \frac{(P_2 - P_1)(V_2 - V_1)}{\frac{i}{2}(P_2V_2 - P_1V_1) + P_2(V_2 - V_1)}. \tag{8}$$

Газ трехатомный, поэтому i = 6, $\eta = 0{,}09$.

Чтобы определить наибольший к. п. д. цикла, выразим количество теплоты, сообщенное газу, через молярные теплоемкости C_p и C_v:

$$Q_1 = Q_{ab} + Q_{bc} = \upsilon C_v(T_b - T_a) + \upsilon C_p(T_c - T_b). \tag{9}$$

Преобразуем (9) с помощью уравнения Менделеева-Клапейрона, записав последнее для каждого из трех состояний газа, соответствующих точкам a, b, c графика:

$$Q_1 = [(P_2 - P_1)V_1C_v/R] + [(V_2 - V_1)P_2C_p/R]. \tag{10}$$

Подставив в (3) значения A и Q_1 по (4) и (10), получим:

$$\eta = \frac{(P_2 - P_1)(V_2 - V_1)R}{(P_2 - P_1)V_1C_v + (V_2 - V_1)P_2C_p}. \qquad (11)$$

Чтобы упростить исследование, разделим числитель и знаменатель правой части (11) на произведение P_2V_2 и введем обозначение $\alpha = P_1/P_2$, $\beta = V_1/V_2$:

$$\eta = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)R}{(1-\alpha)\beta C_v + (1-\beta)C_p}. \qquad (12)$$

Согласно условию, каждая из величин α и β может принимать любые значения в интервале]0,1[. При произвольном фиксированном значении β выражение (12) приобретает вид:

$$\eta = \frac{K_1(1-\alpha)}{K_2(1-\alpha) + K_3} = \frac{K_1}{K_2 + K_3/(1-\alpha)}, \qquad (13)$$

где K_1, K_2, K_3 – постоянные положительные величины. Из (13) видно, что $\eta(\alpha)$ – убывающая функция. Следовательно, она принимает наибольшее значение при $\alpha \to 0$.

При любом фиксированном значении α выражение (12) дает:

$$\eta = \frac{K_4(1-\beta)}{K_5\beta + K_6(1-\beta)} = \frac{K_4}{K_6 + K_5/1(\beta - 1)}, \qquad (14)$$

где K_4, K_5, K_6 – постоянные положительные величины. Из (14) следует, что $\eta(\beta)$ – убывающая функция. Значит, ее наибольшему значению соответствует $\beta \to 0$.

Сопоставляя полученные результаты, приходим к выводу, что, положив в (12) $\alpha = 0$, $\beta = 0$, найдем предельное значение $\eta_{пред}$:

$$\eta_{пред} = \frac{R}{C_p} = \frac{2}{i+2} = 0{,}25.$$

7-4. Цикл Карно, совершаемый смесью жидкости и пара, происходит в том же температурном интервале, что и цикл, рассматриваемый в задаче № 7-3. Определить к. п. д. цикла Карно.

Решение:

К. п. д. цикла Карно, состоящего из двух изотерм и двух адиабат (рис. 36), не зависит от того, какое рабочее вещество совершает этот цикл, и равен

$$\eta_К = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \qquad (1)$$

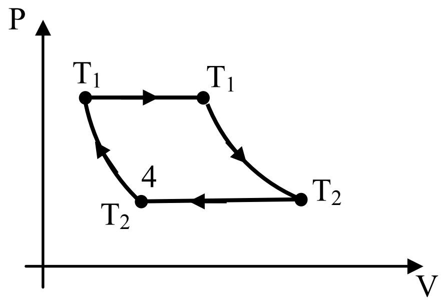

Рис. 36

Таким образом, задача сводится к определению наивысшей и наинизшей температур газа в условиях задачи № 7-3.

Было уже выяснено, что газ нагревался на пути abc и охлаждался на пути cda. Следовательно, наивысшей температурой газ обладал в состоянии c и наинизшей – в состоянии a. Сохраняя обозначения предыдущей задачи, можно записать на основании уравнения состояния газа:

$$T_1 = T_c = \frac{P_2V_2}{\upsilon R}, \; T_2 = T_a = \frac{P_1V_1}{\upsilon R}.$$

Подставив эти значения T_1 и T_2 в (1), получим:

$$\eta_к = \frac{P_2V_2 - P_1V_1}{P_2V_2}, \; \eta_к = 0{,}75.$$

7-5. Между двумя термостатами (t_1 = 400 °C, t_2 = 20 °C) совершается цикл Карно. Время, за которое осуществляется этот цикл, τ = 1с. Найти мощность двигателя, работающего по этому циклу, если известно, что рабочим телом служит 2 кг воздуха; давление в конце изотермического расширения равно давлению в начале адиабатного сжатия.

Решение:

Для того чтобы процесс был обратимым, он должен протекать бесконечно медленно (он должен быть квазистатическим). Тот факт, что рассматриваемый цикл происходит в течение одной секунды, свидетельствует о необратимости процессов, составляющих цикл; и лишь приближенно (явно завышая значение) коэффициент полезного действия можно рассчитать по формуле:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \tag{1}$$

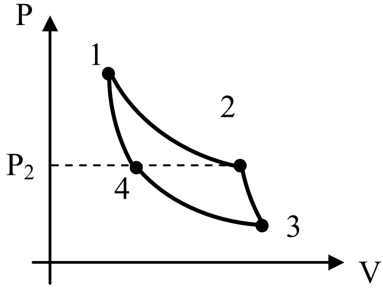

Рис. 37

Работа, совершаемая за один цикл, ввиду того, что продолжительность цикла равна 1 с, численно равна искомой мощности. Поэтому:

$$A = N = \eta Q_1. \tag{2}$$

Количество тепла, получаемое рабочим телом от нагревателя, может быть определено из рассмотрения цикла (рис. 38).

$$Q = \frac{m}{\mu} R T_1 \ell n \frac{P_1}{P_2}. \tag{3}$$

По условию $P_2 = P_4$, давления в начале и в конце адиабатного сжатия связаны соотношением:

$$\frac{P_1}{P_4} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \qquad (4)$$

Подставив выражения (4), (3) и (1) в формулу (2), получим:

$$N = (T_1 - T_2)\frac{m}{\mu} R \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ell n \frac{T_1}{T_2}; \qquad N = 620 \text{ кВт}.$$

7-6. Определить изменение энтропии одного моля идеального газа в изобарном, изохорном и изотермическом процессах.

Решение:

Один моль идеального газа участвует в трех изопроцессах. Эти процессы квазистатические и обратимые. Следовательно, изменение энтропии можно получить непосредственно по формуле:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}. \qquad (1)$$

Для изобарного процесса:

$$\Delta S_p = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_p dT}{T} = C_p \ell n \frac{T_2}{T_1} = C_p \ell n \frac{V_2}{V_1}. \qquad (2)$$

Для изохорного процесса:

$$\Delta S_v = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_v dT}{T} = C_v \ell n \frac{T_2}{T_1} = C_v \ell n \frac{P_2}{P_1}. \qquad (3)$$

Для изотермического процесса:

$$\Delta S_T = \int \frac{\delta Q}{T} = \int \frac{\delta A}{T} = \int \frac{PdV}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{RTdV}{TV} = R \ell n \frac{V_2}{V_1}. \qquad (4)$$

7-7. 0,2 кг кислорода нагревают от температуры t_1 = 27 °С до температуры t_2 = 127 °С. Найти изменение энтропии, если известно, что начальное и конечное давления газа одинаковы.

Решение:

Изменение энтропии газа при переходе из одного состояния в другое определяется только параметрами этих состояний и не зависит от характера процесса, при котором был осуществлен этот переход. В случае обратимого процесса конечное изменение энтропии будет определяться соотношением:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}. \qquad (1)$$

Поэтому независимо от процессов, происходящих в действительности, искомое изменение энтропии может быть найдено при рассмотрении обратимого процесса, в результате которого газ будет переведен из первого состояния во второе.

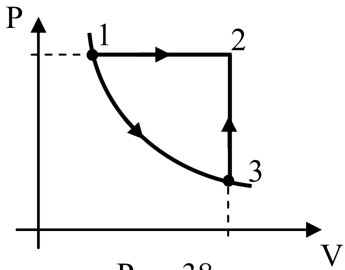

Рис. 38

В данном случае переход из состояния 1 в состояние 2 может быть осуществлен, например, изобарным процессом или изотермическим расширением до промежуточного состояния 3 с последующим изохорным нагреванием 3–2 (рис. 38). Проведем расчет для изобарного процесса. В этом случае $\delta Q = \frac{m}{\mu} C_p dT$. Подставив это выражение в равенство (1), получим:

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} C_p \ell n \frac{T_2}{T_1}; \qquad \Delta S = 51{,}3 \text{ Дж/к.}$$

7-8. Найти изменение ΔS энтропии при нагревании воды массой m = 100 г от температуры t_1 = 0 °С до температуры t_2 = 100 °С и последующем превращении воды в пар той же температуры.

Решение:

Найдем отдельно изменение энтропии ΔS' при нагревании воды и изменение энтропии ΔS'' при превращении ее в пар. Полное изменение энтропии выразится суммой ΔS' и ΔS''.

Изменение энтропии определяется по формуле:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}. \tag{1}$$

При бесконечно малом изменении dT температуры нагреваемого тела затрачивается количество теплоты

$$\delta Q = mcdT,$$

где m – масса тела, c – его удельная теплоемкость.

Подставив выражение δQ в равенство (1), найдем формулу для вычисления изменения энтропии при нагревании воды:

$$\Delta S' = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mcdT}{T} = mc\ell n \frac{T_2}{T_1}, \qquad \Delta S' = 132 \text{ Дж/к.}$$

При вычислении по формуле (1) изменения энтропии во время превращения воды в пар той же температуры постоянная температура T выносится за знак интеграла. Вычислив интеграл, найдем:

$$\Delta S'' = \frac{1}{T}\int_1^2 \delta Q = \frac{Q}{T}, \tag{2}$$

где Q – количество теплоты, переданное при превращении нагретой воды в пар той же температуры; Q = λm, где λ – удельная теплота преобразования:

$\Delta S'' = \dfrac{\lambda m}{T}$; $\Delta S'' = 605$ Дж/к.

Полное изменение энтропии при нагревании воды и последующем превращении ее в пар:

$\Delta S = \Delta S' + \Delta S'' = 737$ Дж/к.

7-9. $3 \cdot 10^{-5}$м^3 N_2 диффундируют в $3 \cdot 10^{-5}$м^3 SO_2 под постоянным давлением в $2 \cdot 10^5$ Па и температуре 0 °С. Найти изменение энтропии.

Решение:

Два разных газа в количестве υ_1 и υ_2 молей, занимающих объемы V_1 и V_2, имеют энтропию до диффузии:

$S_1 = \upsilon_1(C_{v1}\ \ell nT + R\ell nV_1 + S_{01}) + \upsilon_2(C_{v2}\ell nT + R\ell nV_2 + S_{02})$,

после диффузии:

$S_2 = \upsilon_1[C_{v1}\ell nT + R\ell n(V_1 + V_2) + S_{01}] + \upsilon_2[C_{v2}\ell nT + R\ell n(V_1 + V_2) + S_{02}]$.

Следовательно, изменение энтропии системы после диффузии, когда оба газа займут общий объем $(V_1 + V_2)$, будет:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \upsilon_1 R\ell n\frac{V_1 + V_2}{V_1} + \upsilon_2 R\ell n\frac{V_1 + V_2}{V_2}.$$

По условию задачи $V = V_1 = V_2 = 3 \cdot 10^{-5}$м^3; $\upsilon = \upsilon_1 = \upsilon_2 = \dfrac{3 \cdot 10^{-5}}{11,2}$, так как при давлении $P = 2 \cdot 10^5$ Па и температуре 0 °С объем одного килограмм-моля газа равен: $\dfrac{22,4}{2} = 11,2\ (м^3)$.

$\Delta S = 3 \cdot 10^{-2}$ Дж/к.

7-10. Два баллона емкостью $V_1 = 2 \cdot 10^{-3}$м^3 и $V_2 = 3 \cdot 10^{-3}$м^3 соединены трубкой с краном. Первый наполнен азотом под давлением $P_1 = 1 \cdot 10^5$ Па, второй – окисью углерода (СО) под давлением $P_2 = 5 \cdot 10^5$ Па. Найти изменение энтропии системы, которое произойдет в результате открытия крана, если вся система заключена в теплоизолирующую оболочку. Начальные температуры в обоих баллонах одинаковы и равны 27 °C.

Решение:

Так как вся система в теплообмене не участвует и не совершает работы против внешних сил, то суммарная внутренняя энергия общих газов будет неизменна. Поэтому кинетические энергии молекул после смешения и установления термодинамического равновесия останутся прежними. Другими словами, температура смеси будет равна начальной температуре газов.

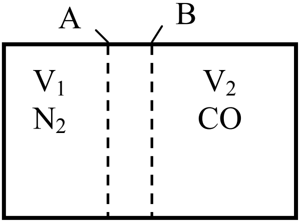

Рис. 39

Смешение газов – процесс необратимый, и, следовательно, энтропия всей системы будет увеличиваться. Чтобы подсчитать изменение энтропии, надо рассмотреть такой процесс, при котором смешение газов произойдет обратимым образом. Представим себе цилиндрический сосуд, разделенный на две части, объемы которых соответственно равны V_1 и V_2. В левой части сосуда находится N_2, в правой – CO (рис. 39). Газы отделены полупроницаемыми перегородками A и B. Причем перегородка A проницаема только для N_2, перегородка B – только для CO. При очень медленном движении перегородки влево окись углерода будет расширяться до объема $(V_1 + V_2)$, и газ будет совершать изотермическое расширение, получая извне тепло $\delta Q = PdV$. Поэтому изменение энтропии:

$$\Delta S = \int_{V_2}^{V_1+V_2} \frac{PdV}{T}.$$

Проведя интегрирование:

$$\Delta S_2 = \int_{V_2}^{V_1+V_2} \frac{PdV}{T} =$$

$$= \int_{V_2}^{V_1+V_2} \frac{\upsilon RdV}{V} = \upsilon R\ell n\frac{V_1+V_2}{V_2} = \frac{P_2V_2}{T}\ell n\frac{V_1+V_2}{V_2}.$$

При перемещении перегородки В произойдет изотермическое расширение азота до объема

$(V_1 + V_2)$ и $\Delta S_1 = \dfrac{P_1V_1}{T}\ell n\dfrac{V_1+V_2}{V_1}$.

Таким образом, мы можем провести обратимое смешение.

Полное изменение энтропии равно сумме изменений энтропий каждого газа:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{P_1V_1}{T}\ell n\frac{V_1+V_2}{V_1} + \frac{P_2V_2}{T}\ell n\frac{V_1+V_2}{V_2};$$

$\Delta S = 3{,}26$ Дж/к.

Оба слагаемых, входящих в сумму, положительны. Это соответствует тому, что процесс самопроизвольного смешения газов необратим и в теплоизолированной системе всегда сопровождается увеличением энтропии.

7-11. Идеальный двухатомный газ, содержащий количество вещества $\upsilon = 1$ моль, совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Наименьший объем $V_{min}= 10$ л, наибольший $V_{max}= 20$ л, наименьшее давление $P_{min}= 246$ кПа, наибольшее $P_{max}= 410$ кПа. Построить график цикла. Определить температуру Т газа для характерных точек цикла и его термический к. п. д. [300 К; 500 К; 1000 К; 605 К; 8,55 %].

7-12. Идеальный двухатомный газ, содержащий количество вещества $\upsilon = 1$ моль, находящийся под давлением $P_1 = 0{,}1$ МПа при температуре $T_1 = 300$ К, нагревают при постоянном объеме до давления $P_2 = 0{,}2$ МПа. После этого газ изотермически расширился до начального давления и затем изобарически был сжат до начального объема V_1. Построить график цикла. Определить температуру T газа для характерных точек цикла и его термический к. п. д. [600 К; η = 9,9 %].

7-13. Одноатомный газ, содержащий количество вещества υ = 0,1 моль, под давлением P_1 = 100 кПа занимал объем V_1 = 5 м^3. Газ сжимался изобарически до объема V_2 = 1 м^3, затем сжимался адиабатически и расширялся при постоянной температуре до начальных объема и давления. Построить график процесса. Найти: 1) температуры T_1 и T_2, объемы V_1 и V_2, давление P_3, соответствующее характерным точкам цикла; 2) количество теплоты Q_1, полученное газом от нагревателя; 3) количество теплоты Q_2, переданное газом охладителю; 4) работу A, совершенную газом за весь цикл; 5) термический к. п. д. цикла. [T_1 = 600 К; T_2 = 120 К; V_2 = 1 м^3; V_3 = 0,09 м^3; P_3 = 5,56 МПа; 2 МДж; 1 МДж; 1 МДж].

7-14. Идеальный многоатомный газ совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар, причем наибольшее давление газа в два раза больше наименьшего, а наибольший объем в четыре раза больше наименьшего. Определить термический к. п. д. цикла. [0,11].

7-15. Идеальный газ, совершающий цикл Карно, получив от нагревателя количество теплоты Q_1 = 4,2 кДж, совершил работу A = 590 Дж. Найти термический к. п. д. этого цикла. Во сколько раз температура T_1 нагревателя больше температуры T_2 охладителя? [14 %; 1,16 раза].

7-16. Идеальный газ совершает цикл Карно. Работа A_1 изотермического расширения газа равна 5 Дж. Определить работу A_2 изотермического сжатия, если термический к. п. д. цикла равен 0,2. [4 Дж].

7-17. Наименьший объем V_1 газа, совершающего цикл Карно, равен 153 л. Определить наибольший объем V_3, если объем V_2 в конце изотермического расширения и объем V_1 в конце изотермического сжатия равны соответственно 600 и 189 л. [0,74 м^3].

7-18. Некоторое количество идеального газа совершает цикл, состоящий из двух изобар при давлениях P_1 и P_2 и двух изотерм при температурах T_1 и T_2. Докажите, что к. п. д. этого цикла меньше, чем цикла Карно.

7-19. Докажите, что цикл из двух изохор при объемах V_1 и V_2 и двух изотерм при температурах T_1 и T_2 имеет к. п. д. меньше, чем к. п. д. цикла Карно.

7-20. На рис. 40 изображен цикл двигателя Отто, состоящий из двух изохор 1–4 и 2–3 и двух адиабат 1–2 и 3–4. Коэффициент сжатия рабочего тела $\frac{V_1}{V_2} = n$. Определите к. п. д. цикла [$\eta = 1 - \frac{1}{n^{\gamma-1}}$].

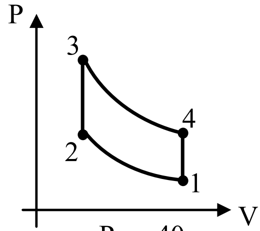

Рис. 40

7-21. На рис. 41 изображен цикл, состоящий из изобары 2–3, изохоры 4–1 и двух адиабат 1–2 и 3–4 (цикл двигателя Дизеля). Коэффициент адиабатического сжатия n = $\frac{V_1}{V_2}$, коэффициент изобарического расширения k = $\dfrac{V_3}{V_2}$. Найдите к. п. д. цикла. [$\eta = 1 - \dfrac{1}{\gamma} \cdot \dfrac{k^{\gamma} - 1}{n^{\gamma-1}(k-1)}$].

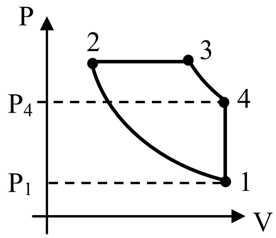

Рис. 41

7-22. На рис. 42 изображен цикл, состоящий из двух изобар 1–2 и 3–4 и двух адиабат 4–1 и 2–3. Коэффициент адиабатического сжатия n = $\dfrac{P_1}{P_4}$. Определите к. п. д. цикла. [$\eta = 1 - \dfrac{1}{n^{\gamma-1/\gamma}}$].

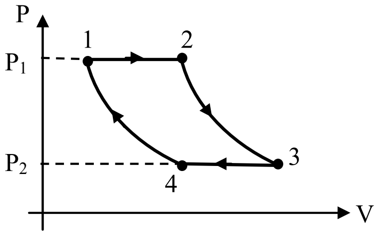

Рис. 42

7-23. Идеальный двухатомныи газ совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар, причем наибольшее давление в 3 раза больше наименьшего, а наибольший объем в 5 раз больше наименьшего. Определить к. п. д. цикла. [17 %].

7-24. Идеальный многоатомный газ, находящийся под давлением 10^5 Па при температуре 27 °С, нагревается при постоянном объеме до давления $2 \cdot 10^5$ Па. После этого газ изотермически расширяется до начального давления и затем изобарически сжимается до начального объема. Определить к. п. д. цикла. [9 %].

7-25. Идеальный многоатомный газ нагревается при постоянном объеме так, что его давление возрастает в 2 раза. После этого газ адиабатически расширяется до начального давления и затем изобарически сжимается до начального объема. Определить к. п. д. цикла. [9,3 %].

7-26. Применяемый в двигателях внутреннего сгорания цикл состоит из двух изобар и двух адиабат. В работающем по такому циклу двигателе горючая смесь, которую можно принять за двухатомный газ, сжимается до объема 2 дм^3, ход и диаметр поршня соответственно равны 40 и 15 см. Определить к. п. д. цикла. [40 %].

7-27. Тепловой двигатель работает по циклу, состоящему из изотермического, изобарного и адиабатического процессов (рис. 43). При изобарном процессе рабочее тело – идеальный газ – нагревается от температуры T_1 = 200 К до температуры T_2 = 500 К. Определить к. п. д. данного теплового двигателя и двигателя, работающего по циклу Карно, происходящему между максимальной и минимальной температурами данного цикла. [0,39; 0,60].

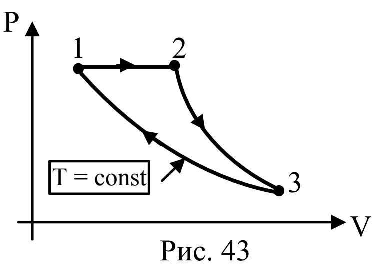

Рис. 43

7-28. Один киломоль идеального газа совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. При этом объем газа изменяется от V_1 = 25 м^3 до V_2 = 50 м^3 и давление изменяется от P_1 = 10^5 Па до P_2= 2 · 10^5 Па. Во сколько раз работа, совершаемая при таком цикле, меньше работы, совершаемой в цикле Карно, изотермы которого соответствуют наибольшей и наименьшей температурам рассматриваемого цикла, если при изотермическом расширении объем увеличивается в два раза? [2,1 раза].

7-29. Определить термический коэффициент полезного действия цикла, состоящего из двух изобар и двух изохор, и сравнить его с коэффициентом полезного действия цикла Карно, проведенного между крайними температурами первого цикла (рис. 44).

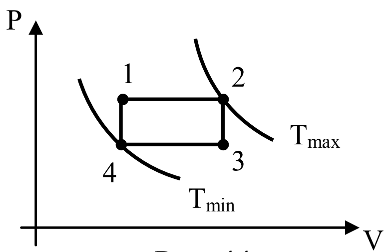

Рис. 44

Известно, что при изобарном расширении объем увеличивается вдвое, температура в конце изобарного расширения 1 – 2 t_2 = 800 °C; в конце изохорного процесса 2 – 3 t_3 = 700 °C. Рабочее тело – воздух; отводимое тепло не используется для нагревания рабочего тела. [2,7 %; 45 %].

7-30. Цикл, совершаемый двумя киломолями одноатомного идеального газа, состоит из изотермы, изобары и изохоры (рис. 45). Известно, что максимальный объем газа в два раза больше минимального и что изотермический процесс совершается при температуре T = 400 K. Вычислить работу и к. п. д. цикла. [1,27·10^6 Дж; 13 %].

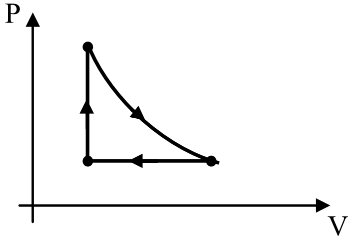

Рис. 45

7-31. Найти к. п. д. цикла, состоящего из двух изобар и двух адиабат, предполагая, что рабочим веществом является идеальный газ. Известно, что максимальное давление в два раза больше минимального. [η = $1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$].

7-32. Найти к. п. д. цикла, состоящего из двух изохор и двух адиабат, если в пределах цикла объем идеального газа изменяется в n = 10 раз. Рабочим веществом является азот. [60 %].

7-33. Найти к. п. д. цикла, состоящего из двух изобар и двух адиабат, если в пределах цикла давление изменяется в n раз. Рабочее вещество – идеальный газ с показателем адиабаты γ. [η=$1-n^{\frac{-(\gamma-1)}{\gamma}}$].

7-34. Идеальный газ с показателем адиабаты γ совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Найти к. п. д. такого цикла, если температура T газа возрастает в n раз как при изохорическом нагревании, так и при изобарическом расширении. [η = $1-\frac{n+\gamma}{1+\gamma\cdot n}$].

7-35. Идеальный газ совершает цикл, состоящий из: 1) изохоры, адиабаты и изотермы; 2) изобары, адиабаты и изотермы. Причем изотермический процесс происходит при минимальной температуре цикла. Найти к. п. д. каждого цикла, если температура T в его пределах изменяется в n раз. [В обоих случаях $\eta = 1 - \frac{\ell n\left(n\right)}{n-1}$].

7-36. В медном калориметре массой m_1 = 1 кг содержится вода при температуре t_1 = 7 °С. Масса воды m_2 = 3 кг. В калориметр погрузили кусок алюминия массой m_3 = 0,5 кг, имеющий температуру t_2 = 77 °С. Найдите изменение энтропии системы при установлении равновесной температуры. [–5,58 Дж/К].

7-37. Камень массой 10 кг упал с высоты 20 м на землю. Температура камня и окружающей среды 20 °С. Определить изменение энтропии системы камень – Земля. [6,688 Дж/К].

7-38. Найдите изменение энтропии 1 кг воздуха, если его давление увеличилось от $2 \cdot 10^5$ Па до 10^6 Па, а температура понизилась от 327 °С до 127 ºС. [–55,02 Дж/К].

7-39. Определите изменение энтропии при изотермическом сжатии 1 моль кислорода от объема V_0 до объема $1/3V_0$. [$-9{,}3 \cdot 10^4$ Дж/К].

7-40. Смешали воду массой m_1 = 5 кг при температуре T_1 = 280 К с водой массой m_2 = 8 кг при температуре T_2 = 350 К. Найти: 1) температуру θ смеси; 2) изменение энтропии, происходящее при смешивании. [323 К; 0,3 кДж/К].

7-41. В результате изохорического нагревания водорода массой m = 1 г давление P газа увеличилось в два раза. Определите изменение энтропии газа. [7,2 Дж/К].

7-42. Найти изменение энтропии при изобарическом расширении азота массой $m = 4$ г от объема $V_1 = 5$ л до объема $V_2 = 9$ л. [2,43 Дж/К].

7-43. Кусок льда массой $m = 200$ г, взятый при температуре $t_1 = -10$ ºС, был нагрет до температуры $t_2 = 0$ °С и расплавлен, после чего образовавшаяся вода была нагрета до температуры $t = 10$ ºС. Определить изменение энтропии. [291 Дж/К].

7-44. Лед массой $m_1 = 2$ кг при температуре $t_1 = 0$ °С был превращен в воду той же температуры с помощью пара, имеющего температуру $t_2 = 100$ ºС. Определить массу m_2 израсходованного пара. Каково изменение энтропии системы лед – пар? [251 г; 610 Дж/К].

7-45. Кислород массой $m = 2$ кг увеличил свой объем в $n = 5$ один раз изотермически, другой – адиабатически. Найти изменение энтропии в каждом из указанных процессов. [836 Дж/К; 0].

7-46. Водород массой $m = 100$ г был изобарически нагрет так, что его объем увеличился в $n = 3$ раза, затем водород был изохорически охлажден так, что давление его уменьшилось в $n = 3$ раза. Найти изменение энтропии в ходе указанных процессов. [457 Дж/К].

7-47. Определить изменение энтропии при изотермическом расширении кислорода массой $m = 10$ г от объема $V_1 = 25$ л до объема $V_2 = 100$ л. [3,60 Дж/К].

7-48. Найти изменение энтропии при нагревании воды массой $m = 100$ г от температуры $t_1 = 0$ °С до температуры $t_2 = 100$ ºС и последующем превращении воды в пар той же температуры. [737 Дж/К].

7-49. Найти изменение энтропии при превращении 10 г льда при –20 ºС в пар при 100 ºС. [88 Дж/К].

7-50. Найти прирост энтропии при превращении 1 г воды при 0 ºС в пар при 100 ºС. [7,4 Дж/К].

7-51. Найти изменение энтропии при плавлении 1 кг льда, находящегося при 0 ºС. [1230 Дж/К].

7-52. 640 г расплавленного свинца при температуре плавления вылили на лед при 0 ºС. Найти изменение энтропии при этом процессе. [63 Дж/К].

7-53. Найти изменение энтропии при переходе 8 г кислорода от объема в 10 л при температуре 80 ºС к объему в 40 л при температуре 300 ºС. [5,4 Дж/К].

7-54. Найти изменение энтропии при переходе 6 г водорода от объема 20 л под давлением $1{,}5 \cdot 10^5$ Па к объему в 60 л под давлением в $1 \cdot 10^5$ Па. [71,0 Дж/К].

7-55. 6,6 г водорода расширяются изобарически до удвоения объема. Найти изменение энтропии при этом расширении. [66,3 Дж/К].

7-56. Найти изменение энтропии при изобарическом расширении 8 г гелия от объема $V_1 = 10$ л до объема $V_2 = 25$ л. [38,1 Дж/К].

7-57. При нагревании 1 кмоля двухатомного газа его абсолютная температура увеличивается в 1,5 раза. Найти изменение энтропии, если нагревание происходит: 1) изохорически; 2) изобарически. [8,5 Дж/К; 11,8 Дж/К].

7-58. В результате нагревания 22 г азота его абсолютная температура увеличилась в 1,2 раза, а энтропия увеличилась на 4,19 Дж/К. При каких условиях производилось нагревание (при постоянном объеме или при постоянном давлении)? [P = const].

7-59. Изменение энтропии на участке между двумя адиабатами в цикле Карно равно 4,19 Дж/К. Разность температур между двумя изотермами равна 100 К. Какое количество тепла превращается в работу в этом цикле? [$4{,}2 \cdot 10^5$ Дж].

7-60. Определить, на сколько увеличивается энтропия при смешении 3 кг азота и 2 кг углекислого газа. Температуры и давление газов до смешения одинаковы. [771 Дж/К].

8. Жидкости

Основные формулы

1. Коэффициент поверхностного натяжения – величина, численно равная силе, действующей на единицу длины границы раздела поверхности жидкости:

$$\alpha = \frac{F}{\ell}, \tag{8.1}$$

где F – сила поверхностного натяжения, действующая на контур ℓ, ограничивающий поверхность жидкости.

С другой стороны, коэффициент поверхностного натяжения – величина, численно равная изменению свободной энергии поверхностной пленки жидкости ΔE при изменении ее площади на единицу:

$$\alpha = \frac{\Delta E}{\Delta S}. \tag{8.2}$$

2. Добавочное давление ΔP, производимое на жидкость поверхностным слоем произвольной формы, определяется формулой Лапласа:

$$\Delta P = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \tag{8.3}$$

где ΔP – давление, создаваемое изогнутой поверхностью жидкости; α – коэффициент поверхностного натяжения; R_1 и R_2 – радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости в рассматриваемой точке. Радиус кривизны считается положительным, если центр кривизны находится внутри жидкости, и отрицательным, если центр кривизны находится вне жидкости.

3. В случае сферической поверхности:

$$\Delta P = \frac{2\alpha}{R}. \tag{8.4}$$

4. Высота подъема жидкости в капиллярной трубке определяется формулой:

$$h = \frac{2\alpha \cos\theta}{\rho g R}, \qquad (8.5)$$

где α – коэффициент поверхностного натяжения; θ – краевой угол; R – радиус канала трубки; ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения.

Методические указания

1. При расчетах сил поверхностного натяжения следует учитывать, что эти силы действуют вдоль любого контура, лежащего на поверхности жидкости. При этом сила поверхностного натяжения, приложенная к каждому элементу этого контура, перпендикулярна ему и направлена по касательной к поверхности. Если в качестве такого контура выбрать границу соприкосновения свободной поверхности жидкости с твердым телом, которое она смачивает, то соответствующая сила поверхностного натяжения будет проявляться как сила, с которой поверхностный слой жидкости действует на твердое тело. Полную силу можно найти по формуле (8.1) лишь при условии, что силы поверхностного натяжения, приложенные ко всем элементам контура, параллельны друг другу.

2. Каким бы тонким ни был слой жидкости (например, в мыльном пузыре), он всегда имеет две поверхности – наружную и внутреннюю, вдоль каждой из которых действуют силы поверхностного натяжения.

3. Чтобы не допустить ошибки при учете избыточного (лапласовского) давления, выражаемого формулой (8.3), полезно рассматривать его как скачок давления, который существует на границе жидкости с окружающей ее средой. Величина этого скачка определяется кривизной поверхности жидкости в данной точке. Поэтому в случае поверхности переменной кривизны (например, поверхность капли, висящей на смачиваемом ею твердом теле, имеет кривизну, положительную

внизу, и кривизну, отрицательную вверху) поверхностное давление ΔP будет различным в различных точках одной и той же жидкости, лежащих вблизи ее поверхности. В простейших случаях сферических поверхностей целесообразно искривленную поверхность жидкости (маленькая капля, воздушный пузырек внутри жидкости и т. д.) условно принимать за некую упругую пленку, находящуюся в состоянии натяжения и поэтому сжимающую охватываемые ею жидкость или газ.

4. Во всех задачах, связанных с расчетом высоты поднятия жидкости в капилляре, где невозможно применить формулу (8.5), следует исходить из условия равновесия столба жидкости: разность давлений, производимых на столб снизу и сверху, должна быть равна гидростатическому давлению, оказываемому столбом жидкости на его основание и равное $\rho g h$, где ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения, h – высота столба.

Решение задач

8-1. Определить внутреннее давление и плотность воздуха ($\mu = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль) внутри мыльного пузыря радиусом $R = 5 \cdot 10^{-3}$ м, если коэффициент поверхностного натяжения мыльной воды $40 \cdot 10^{-3}$ Н/м, а давление и температура атмосферы равна $P_0 = 1 \cdot 10^5$ Па и $t = 17$ °С.

Решение:

Избыточное давление внутри мыльного пузыря обусловлено давлением двойной поверхности пленки мыльной воды. Считая, что искривленная поверхность есть сферическая, и пренебрегая толщиной пленки, можно рассчитать избыточное давление по формуле:

$$\Delta P = \frac{4\alpha}{R}.$$

Плотность воздуха внутри пузыря определяется из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu P}{RT},$$

где P – давление воздуха можно найти из условия равновесия (рис. 46):

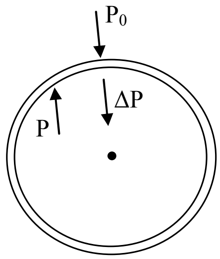

Рис. 46

$$P = P_0 + \Delta P = P_0 + \frac{4\alpha}{R}, \text{ откуда } \rho = \frac{\mu}{RT}\left(P_0 + \frac{4\alpha}{R}\right).$$

ρ = 1,2 кг/моль.

8-2. В спирт опущена на ничтожную глубину трубка, радиус внутреннего канала которой r = 0,2 мм. Каков вес вошедшего в нее спирта? Чему будет равно давление в трубке в точках, лежащих на половине высоты столбика спирта (рис. 47)? Коэффициент поверхностного натяжения спирта $\alpha = 22 \cdot 10^{-3}$ Н/м.

Решение:

Спирт смачивает стекло и краевой угол равен нулю, поэтому мениск будет вогнутым и будет иметь форму полусферы, радиус которой равен радиусу канала трубки. В точках 1 и 2, расположенных вплотную к поверхности жидкости, но по разные от нее стороны, давления будут отличаться друг от друга на величину ΔP, определяемую формулой Лапласа:

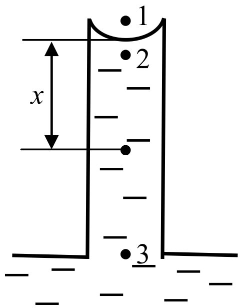

Рис. 47

$\Delta P = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$, где R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны. В данном случае $R_1 = R_2 = R$ канала. Таким образом, давление в точке 2:

$P_2 = P_0 - \frac{2\alpha}{r}$, где P_0 – давление в точке 1, равное атмосферному (давлением паров спирта пренебрегаем).

Давление в точке, лежащей под поверхностью на расстоянии x от нее, будет больше, чем в точке 2, на величину гидростатического давления столбика спирта высотой x:

$P_x = P_0 - \frac{2\alpha}{r} + \rho g x$.

В точке 3, лежащей на уровне свободной поверхности жидкости, которую можно считать плоской, давление должно равняться атмосферному (P_0), то есть:

$$P_0 - \frac{2\alpha}{r} + \rho g h = P_0, \qquad (1)$$

где h – высота всего столбика спирта.

На основании формулы (1) находим $h = \frac{2\alpha}{r\rho g}$.

Искомый вес может быть рассчитан так:

$$P = \rho g h \cdot \pi r^2 = 2\alpha\pi r \qquad (2)$$

$P = 2{,}8 \cdot 10^{-6}$Н.

Давление в точках, лежащих на половине высоты столбика спирта ($x = \frac{h}{2}$), равно:

$$P_{h/2} = P_0 - \frac{\alpha}{r}. \quad P_{h/2} = 759 \text{ мм рт. ст.}$$

Формула (2) может быть получена непосредственно из следующих соображений. Вдоль всей линии соприкосновения поверхности спирта со стеклом со стороны стекла на жидкость действует сила, направленная вертикально вверх и равная произведению величины коэффициента поверхностного натяжения на длину линии соприкосновения, то есть:

$f = \alpha \cdot 2\pi r$.

Эта сила уравновешивается весом P столбика спирта.

8-3. Поверхностное натяжение на границе вода – масло можно принять равным $\alpha = 18 \cdot 10^{-3}$ Н/м. Какую работу надо произвести, чтобы каплю масла массой m = 1 г раздробить внутри воды на капельки радиусом $r = 10^{-4}$ см; процесс дробления можно считать изотермическим. Плотность масла $\rho = 900$ кг/м^3

Решение:

При изотермическом дроблении одной большой капли на множество мелких затрачивается энергия только на образование добавочной поверхности. Внутренняя энергия капель не меняется.

$$A = \alpha\Delta S, \tag{1}$$

где ΔS – добавочная поверхность, которую можно вычислить по формуле:

$$\Delta S = 4\pi(Nr^2 - R^2), \tag{2}$$

где R – радиус большой капли, N – число мелких капель.

Масса масла не меняется, следовательно,

$\frac{4}{3}\pi R^3\rho = N \cdot \frac{4}{3}\pi r^3\rho$, откуда $N^{1/3} = \frac{R}{r}$; $R = r \cdot N^{1/3}$.

Подставив R в (2), получим:

$$\Delta S = 4\pi N^{2/3} \cdot r^2(N^{1/3} - 1). \tag{3}$$

Число маленьких капель может быть найдено из выражения:

$$m = N \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho, \text{ откуда}$$

$$N = \frac{3m}{4\pi r^3 \rho}. \qquad (4)$$

Пренебрегая единицей по сравнению с $N^{1/3}$ и подставляя (3) и (4) в (1), находим искомую работу:

$$A = \frac{3m\alpha}{r \cdot \rho}; \qquad A = 6 \cdot 10^{-2} \text{Дж.}$$

8-4. Какую работу надо совершить, чтобы выдуть мыльный пузырь, радиус которого r = 7 см. Коэффициент поверхностного натяжения $40 \cdot 10^{-3}$ Н/м, атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па.

Решение:

Если процесс выдувания считать изотермическим, то искомая работа будет определяться величиной энергии, которую надо затратить на образование поверхности пузыря, и работой по сжатию воздуха в объеме пузыря до давления P. Давление P – это давление воздуха внутри пузыря. Для его вычисления рассмотрим элемент пленки (рис. 48).

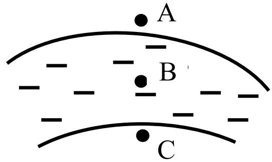

Рис. 48

Известно, что при переходе через сферическую поверхность жидкости давление меняется скачком на величину

$$\Delta P = \frac{2\alpha}{r}.$$

Следовательно, $P_B - P_A = \frac{2\alpha}{r}$, $P_C - P_B = \frac{2\alpha}{r}$, где P_A –

внешнее давление воздуха на пузырь; P_B – давление в толще пленки; $P_C = P$ – искомое давление воздуха внутри пузыря.

Учитывая, что $P_A = P_0$, получим:

$$P = P_0 + \frac{4\alpha}{r}. \qquad (1)$$

Энергия, затрачиваемая на образование поверхности пузыря $W = \alpha S$, где S – есть сумма внутренней и внешней поверхностей пленки. Искомая работа вычисляется по формуле:

$$A = \alpha S + PV\ \ell n\frac{P}{P_0}.$$

Выразив поверхность пленки и объем V пузыря через радиус и давление по формуле (1), получим:

$$A = 8\pi r^2 \cdot \alpha + P_0\left(1 + \frac{4\alpha}{rP_0}\right) \cdot \frac{4}{3}\pi r^3\ \ell n\left(1 + \frac{4\alpha}{rP_0}\right).$$

Если учесть, что $\frac{4\alpha}{rP_0} \ll 1$, то, раскладывая натуральный логарифм в ряд и пренебрегая величинами второго порядка, можно получить окончательный результат:

$$A = 8\pi r^2\alpha\left(1 + \frac{2}{3}\right); \quad A = 8{,}2 \cdot 10^{-3}\text{Дж}.$$

8-5. Две параллельные пластинки шириной в 10 см, находящиеся на расстоянии d = 0,1 мм, погружены нижним краем в воду. Какую силу надо приложить к каждой из пластинок, чтобы не допустить их сближения? Коэффициент поверхностного натяжения воды $\alpha = 70 \cdot 10^{-3}$ Н/м.

Решение:

Давление вдоль столба жидкости, который поднимется между пластинками, будет уменьшаться от атмосферного давления P_0 до давления $P_h = P_0 - \Delta P$, где ΔP рассчитывается по формуле Лапласа. В данном случае один из главных радиусов кривизны равен бесконечности. Второй главный радиус равен половине расстояния между пластинками, поэтому $\Delta P = \frac{2\alpha}{d}$.

Давление на боковую поверхность каждой пластинки со стороны жидкости на расстоянии x от уровня мениска меньше, чем наружное давление, на величину $\delta P = \dfrac{2\alpha}{d} - \rho g x$.

Тогда сила, которую надо приложить к каждой из пластинок, чтобы не допустить их сближения:

$$f = \int_0^h \delta P \cdot a \cdot dx = \int_0^h \left(\frac{2\alpha}{d} - \rho g x x \right) \cdot a \cdot dx,$$

где a – ширина пластинок, h – высота поднятия жидкости. Произведя интегрирование, получим:

$$f = \frac{2\alpha a}{d} h - \frac{\alpha \rho g h^2}{2}. \qquad (1)$$

Высота поднятия жидкости может быть рассчитана из соотношения:

$$\frac{2\alpha}{d} - \rho g h = 0.$$

Выразив отсюда h и подставив в (1), получим:

$$f = \frac{2\alpha^2 a}{d^2 \rho g}; \qquad f = 10\ \text{Н}.$$

8-6. Вертикально расположенная капиллярная трубка длиной ℓ = 200 мм с запаянным верхним концом приведена в соприкосновение своим нижним концом с поверхностью воды. На какую высоту поднимется вода в трубке, если ее радиус $R_0 = 2 \cdot 10^{-4}$ м? Атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па. Считать, что вода полностью смачивает трубку.

Решение:

Здесь нельзя применить формулу $h = \dfrac{2\alpha}{r\rho g}$, определяющую высоту поднятия жидкости в капилляре при полном смачивании, так как эта формула справедлива лишь для открытой с обоих концов трубки.

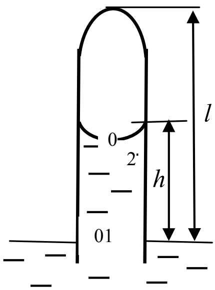

Рис. 49

Для решения задачи рассмотрим столбик воды, находящийся в равновесии в капилляре, после того, как он уже поднялся под действием сил поверхностного натяжения. Согласно условию равновесия разность давлений у его концов равна гидростатическому давлению, производимому столбиком жидкости высотой h на его основание, то есть:

$$P_1 - P_2 = \rho g h, \qquad (1)$$

где P_1 и P_2 – давления внизу и вверху столба соответственно. Найдем величины P_1 и P_2. Давление внизу столба (точка 1 на рис. 49) равно давлению в воде у ее открытой поверхности, то есть атмосферному давлению: $P_1 = P_0$ (2),

так как в противном случае жидкость у нижнего края трубки не была бы в равновесии.

Поскольку столб воды ограничен сверху изогнутой поверхностью, давление P_2 вверху (точка 2) отличается от давления $P_в$ воздуха в трубке на величину $P_{пов}$, определяемую по формуле Лапласа, то есть:

$$P_2 = P_в + P_{пов}. \qquad (3)$$

При расчете давления $P_{пов}$ учтем, что мениск в узком капилляре имеет форму полусферы ($R_1 = R_2 = R$), тогда:

$$P_{пов} = \frac{2\alpha}{R}, \qquad (4)$$

где $|R| = R_0$. Так как данный мениск вогнутый, то $P_{пов} < 0$. Значит, следует считать $R = -R_0$ и

$$P_{пов} = -\frac{2\alpha}{R_0}. \qquad (5)$$

Давление воздуха в трубке можно выразить через данные величины P_0, ℓ, h при помощи закона Бойля-Мариотта. Воздушный столб высотой (ℓ – h) при давлении $P_в$ имел при атмосферном давлении P_0 высоту ℓ. Поскольку объем столба пропорционален его длине, то можем записать:

$$P_в(\ell - h) = P_0\ell; \qquad P_в = P_0\ell/(\ell - h). \qquad (6)$$

Подставим в (1) значения P_1 и P_2 по (2) и (3), учитывая соотношения (5) и (6):

$$P_0 - (P_0\frac{\ell}{\ell - h} - \frac{2\alpha}{R}) = \rho gh. \qquad (7)$$

Решив квадратное уравнение (7) относительно h, получим:

h_1 = 11 м; h_2 = 0,014 м.

Поскольку должно выполняться неравенство $h < \ell$, то $h = h_2$ = 0,014 м.

8-7. На полированную стеклянную пластинку капнули 0,01 г воды и наложили сверху вторую такую же пластинку. Вода растеклась между пластинками по площади круга радиуса R = 30 см, не дойдя до ее краев. С какой силой надо растягивать обе пластинки, чтобы их разъединить? Считать, что вода полностью смачивает стекло.

Решение:

Выясним, почему возникает сила притяжения между пластинками. При наложении пластинок свободная поверхность воды вследствие полного смачивания образует вогнутый мениск, диаметральное сечение которого изображено на рис. 50 в виде двух полуокружностей.

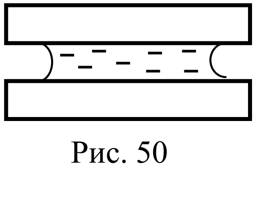

Рис. 50

Следовательно, давление в жидкости, заключенной между пластинками, меньше атмосферного на величину Лапласовского давления $\Delta P_{пов}$. Под избытком внешнего давления пластины сближаются, вода растекается между ними все более тонким слоем. Этот процесс прекратится, когда жидкость дойдет до краев пластин, после чего мениск распрямится, а поверхностное давление и сила притяжения между пластинами исчезнут, или когда дальнейшее сближение пластин станет невозможным из-за того, что они начнут соприкасаться друг с другом в некоторых точках вследствие неровностей их поверхности. Именно последний случай имеет место в задаче.

Сила притяжения между пластинами равна избыточному внешнему давлению $\Delta P_{пов}$, умноженному на площадь одной пластины, то есть:

$$F = \Delta P_{пов} \cdot S = \Delta P_{пов} \cdot \pi R^2, \tag{1}$$

где R – радиус круга растекания жидкости.

Чтобы по формуле Лапласа определить величину $\Delta P_{пов}$, рассмотрим два взаимно перпендикулярных нормальных сечения поверхности жидкости.

Одно из них изображено на рис. 51, плоскость второго сечения параллельна пластинам и находится посредине между ними. Радиус кривизны R_1 первого сечения равен половине расстояния между пластинами, радиус кривизны R_2 второго сечения есть радиус круга растекания жидкости, данный в условии. Поскольку при этом выполняется неравенство $R_1 \ll R_2$, то в формуле Лапласа $\Delta P_{пов} = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ можно пренебречь величиной $\frac{1}{R_2}$, то есть кривизной второго сечения, и рассматривать мениск приближения как вогнутую цилиндрическую поверхность. Таким образом, получим:

$$\Delta P_{пов} = \frac{\alpha}{R_1} = \frac{2\alpha}{d}, \tag{2}$$

где d – расстояние между пластинами. Его найдем, разделив объем воды на площадь ее растекания:

$$d = \frac{V}{S} = \frac{m}{\rho \pi R^2}, \tag{3}$$

где m – масса воды, ρ – ее плотность.

Подставив в (1) значение $\Delta P_{пов}$ из (2) с учетом (3), определим силу притяжения между пластинами:

$F = 2\pi^2 R^4 \alpha\rho/m$; F = 0,12 кН.

8-8. Какую работу надо совершить против сил поверхностного натяжения, чтобы выдуть мыльный пузырь радиусом 0,05 м? Чему равно избыточное давление внутри пузыря? [2,5 мДж; 3,2 Па].

8-9. Определить радиус пузырька воздуха, находящегося непосредственно под поверхностью воды, если плотность воздуха в пузырьке 260 кг/м^3, а коэффициент поверхностного натяжения $72 \cdot 10^{-3}$ Н/м, атмосферное давление 10^5 Па, температура 17°С. [$0,66 \cdot 10^{-8}$ м].

8-10. Капиллярная трубка с внутренним диаметром $4 \cdot 10^{-4}$ м наполнена водой. Часть воды нависла внизу в виде капельки, которую можно принять за часть сферы радиусом $2 \cdot 10^{-3}$ м. Определить высоту столбика воды в трубке. [0,081 м].

8-11. Из вертикальной трубки радиусом 10^{-3}м вытекают капли спирта. Найти радиус капли в момент отрыва. Каплю считать сферической. Для спирта коэффициент поверхностного натяжения $2,2 \cdot 10^{-3}$ Н/м, плотность 790 кг/м^3.

Указание: Диаметр шейки капли считать равным диаметру капилляра. [$1,29 \cdot 10^{-3}$м].

8-12. Найти разность уровней ртути в двух сообщающихся стеклянных капиллярах с диаметрами $8 \cdot 10^{-4}$м и $1,5 \cdot 10^{-3}$м. Для ртути коэффициент поверхностного натяжения $4,9 \cdot 10^{-2}$ ^{2}Н/м, краевой угол 138°. [$6,4 \cdot 10^{-3}$м].

8-13. Определить, насколько давление внутри мыльного пузыря больше внешнего давления, если радиус его 10^{-2} м; коэффициент поверхностного натяжения $45 \cdot 10^{-3}$ Н/м. Какова свободная поверхностная энергия мыльного пузыря? [9 Па; $5{,}65 \cdot 10^{-5}$ Дж].

8-14. Запаянную с одного конца барометрическую стеклянную трубку заполнили ртутью и открытый конец погрузили в чашку со ртутью. На какой высоте установится ртуть в трубке, если атмосферное давление 10^5 Па, диаметр канала $2 \cdot 10^{-3}$ м? Для ртути коэффициент поверхностного натяжения $4{,}9 \cdot 10^{-2}$Н/м, краевой угол 138°, плотность $13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3. [0,754 м].

8-15. Стеклянная капиллярная трубка диаметром внутреннего канала $2 \cdot 10^{-4}$м, длиной 0,2 м опускается в вертикальном положении в воду. Верхний конец трубки запаян. Какой отрезок трубки должен находиться под водой, чтобы уровень воды в капилляре и вне его был одинаков? Давление воздуха $9{,}87 \cdot 10^4$ Па. [$2{,}8 \cdot 10^{-3}$ м].

8-16. Капля ртути массой 0,001 кг разбивается на 100 одинаковых капель. Определить изменение свободной энергии поверхностного слоя ртути, если коэффициент поверхностного натяжения ртути 0,465 Н/м, плотность $13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3. [$1{,}44 \cdot 10^{-4}$Дж].

8-17. Определить вес воды, поднятой между двумя параллельными стеклянными пластинками, опущенными своими краями в воду. Пластины установлены на расстоянии 10^{-3} м друг от друга. Вода нагрета так, что ее коэффициент поверхностного натяжения равен $6{,}9 \cdot 10^{-3}$ Н/м, ширина пластинок 0,05 м. [$6{,}9 \cdot 10^{-3}$ Н].

8-18. Определить изменение свободной энергии мыльного пузыря, если при его раздувании диаметр возрастает от

$3 \cdot 10^{-2}$ м до $30 \cdot 10^{-2}$ м. Коэффициент поверхностного натяжения равен $30 \cdot 10^{-3}$ Н/м. [0,0168 Дж].

8-19. Капля ртути массой 1,36 г введена между горизонтальными параллельными стеклянными пластинами. Какую силу следует приложить для того, чтобы расплющить каплю до толщины 0,1 мм? Считать, что ртуть абсолютно не смачивает стекло. [10 Н].

8-20. Горизонтальный капилляр с внутренним диаметром 2 мм и внешним 4 мм наполнен глицерином. Длина столба глицерина в капилляре 4 см. После того как капилляр поставили вертикально, из него вылилось 77 мг жидкости. Считая смачивание полным, определите коэффициент поверхностного натяжения. [$6{,}0 \cdot 10^{-2}$ Н/м].

8-21. В спирт опущена на ничтожную глубину трубка с диаметром внутреннего канала 0,5 мм. Каков вес вошедшего в нее спирта? Как изменится высота поднятия жидкости в трубке, если ее поднимать вместе с сосудом вверх с ускорением g? Если опускать вниз с ускорением 0,5 g? [$3{,}46 \cdot 10^{-5}$ Н; уменьшится вдвое; увеличится вдвое].

8-22. В стеклянную трубку с внутренним диаметром 2 см вставлена стеклянная палочка диаметром 1,8 см так, что просвет в канале везде одинаков. Нижний конец трубки с палочкой поместили в сосуд с водой. Определите высоту поднятия воды в канале. [5,95 см].

8-23. Какую силу нужно приложить к горизонтальному алюминиевому кольцу высотой 10 мм, внутренним диаметром 50 мм и внешним диаметром 52 мм, чтобы оторвать его от поверхности воды? Какую часть от найденной силы составляют силы поверхностного натяжения? [$63{,}5 \cdot 10^{-3}$ Н; 37 %].

8-24. Кольцо внутренним диаметром 25 мм и внешним диаметром 26 мм подвешено на пружине с коэффициентом деформации 0,98 Н/м и соприкасается с поверхностью жидкости. При опускании поверхности кольцо оторвалось от нее при растяжении пружины на 5,3 мм. Найти коэффициент поверхностного натяжения жидкости. [$32,4\cdot10^{-3}$ Н/м].

8-25. Спирт по каплям вытекает из сосуда через вертикальную трубку внутренним диаметром 2 мм. Считая, что капли отрываются через 1 с одна после другой, найти, через сколько времени вытечет 10 г спирта. Считать диаметр шейки капли в момент отрыва равным внутреннему диаметру трубки. [13 мин.].

8-26. При плавлении нижнего конца вертикально подвешенной свинцовой проволоки диаметром 1 мм образовалось 20 капель свинца. На сколько укоротилась проволока? Коэффициент поверхностного натяжения жидкого свинца 0,47 Н/м. Диаметр шейки капли в момент отрыва считать равным диаметру проволоки. [34 см].

8-27. На сколько нагреется капля ртути, полученная от слияния двух капель радиусом 1 мм каждая? [$1,65\cdot10^{-4}$К].

8-28. Какую работу против сил поверхностного натяжения надо совершить, чтобы увеличить вдвое объем мыльного пузыря радиусом 1 см? Коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора принять равным $43\cdot10^{-3}$ Н/м. [$6,4\cdot10^{-5}$ Дж].

8-29. Определить давление воздуха (в мм рт. ст.) в воздушном пузырьке диаметром 0,01 мм, находящемся на глубине 20 см под поверхностью воды. Внешнее давление 765 мм рт. ст. [999 мм рт. ст.].

8-30. Во сколько раз плотность воздуха в пузырьке, находящемся на глубине 5 м под водой, больше плотности воздуха при атмосферном давлении (при той же температуре)? Радиус пузырька $5 \cdot 10^{-4}$ мм. [4,4 раза].

8-31. Насекомое водомерка бегает по поверхности воды. Найти вес водомерки, если известно, что под каждой из шести лапок насекомого образуется ямка, равная полусфере с радиусом 0,1 мм. [$27{,}5 \cdot 10^{-5}$Н].

8-32. Между двумя вертикальными плоско-параллельными стеклянными пластинками, находящимися на расстоянии 0,25 мм друг от друга, налита жидкость. Найти плотность жидкости, если известно, что высота поднятия жидкости между пластинками равна 3,1 см ($\alpha = 30 \cdot 10^{-3}$ Н/м). Смачивание полное. [790 кг/м^3].

Литература

1. Ансельм, А. И. Основы статистической физики и термодинамики / А. И. Ансельм. – СПб.: Лань, 2007. – 448 с.
2. Иродов, И. Е. Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. – СПб.: Лань, 2007. – 416 с.
3. Кикоин, А. К. Молекулярная физика / А. К. Кикоин, И. К. Кикоин. – СПб.: Лань, 2007. – 484 с.
4. Савельев, И. В. Курс общей физики. – Т. 1 / И. В. Савельев. – СПб.: Лань, 2007. – 416 с.
5. Тюрин, Ю. И. Физика (Молекулярная физика. Термодинамика) / Ю. И. Тюрин, И. П. Чернов, Ю. Ю. Крючков. – СПб.: Лань, 2008. – 256 с.
6. Фиргант, Е. В. Руководство к решению задач по курсу общей физики / Е. В. Фиргант. – СПб.: Лань, 2009. – 348 с.
7. Чертов, А. Г. Задачи по физике / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – М.: Физматлит, 2003. – 496 с.

Учебное издание

ПРАКТИКУМ ПО КУРСУ ФИЗИКИ

Молекулярная физика. Основы термодинамики

Составитель
СОРОКО Галина Алексеевна

Корректор М. Ф. Шатохина
Верстка Т. В. Филипенко, Е. Ю. Иосько

Подписано в печать 01.04.2011. Бумага «SvetoCopy»
Гарнитура «Times New Roman». Формат 60x84 $^{1}/_{16}$
Тираж 500. Объем 9,5 усл. п. л. Заказ № 901-10

Издательство Сахалинского государственного университета
693007, Южно-Сахалинск, ул. Ленина, 290, каб. 32
Тел. (4242) 45-23-16, факс (4242) 45-23-17
E-mail: polygraph@sakhgu.sakhalin.ru