

Сахалинский государственный университет

В. Г. ЛАЗАРЕВА

МАТЕМАТИКА:
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Учебно-методическое пособие

Южно-Сахалинск

2011

УДК 517 (076)
ББК 22.16я73
Л 17

*Печатается по решению учебно-методического совета
Сахалинского государственного университета, 2011 г.*

Л 17 Лазарева, В. Г. Математика: неопределенный интеграл: учебно-методическое пособие / В. Г. Лазарева. – Южно-Сахалинск: СахГУ, 2011. – 52 с.

ISBN 9-785-88811-357-8

Учебно-методическое пособие разработано в соответствии с ФГОС, рекомендовано для практических занятий и самостоятельной работы студентов технических специальностей по теме «Неопределенный интеграл».

Изложение материала произведено пошагово. Вначале даются краткие теоретические сведения, далее приведены образцы пошагового решения примеров и их объяснение. Предложены варианты контрольной работы, а также необходимые таблицы для решения.

Цель пособия – дать студентам необходимые теоретические знания и математический аппарат, помогающий анализировать, моделировать и решать прикладные инженерные задачи.

Рецензент: *Мамчистова Е. И.*, кандидат технических наук

УДК 517 (076)
ББК 22.16я73

Учебное издание

ЛАЗАРЕВА Валентина Георгиевна

**МАТЕМАТИКА:
неопределенный интеграл**

Верстка *Е. Ю. Иосько*
Корректор *М. Ф. Шатохина*

Подписано в печать 30.06.2011. Бумага «SvetoCopy»
Гарнитура «Times New Roman». Формат 60х84¹/₁₆
Тираж 500 экз. Объем 3,25 усл. п. л. Заказ № 535-11

Издательство Сахалинского государственного университета
963008, Южно-Сахалинск, ул. Ленина, 290, каб. 32
Тел. (4242) 45-23-16. Факс (4242) 45-23-17
E-mail: polygraph@sakhgu.sakhalin.ru



© Сахалинский государственный
университет, 2011
© Лазарева В. Г., 2011

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
1. Неопределенный интеграл и первообразная	5
1.1. Определения	5
1.2. Свойства неопределенных интегралов	6
1.3. Таблица основных неопределенных интегралов	6
2. Основные методы вычисления неопределенного интеграла	10
2.1. Метод непосредственного интегрирования в неопределенном интеграле	10
2.2. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной) в неопределенном интеграле	12
2.3. Метод интегрирования по частям неопределенного интеграла.....	14
3. Интегрирование некоторых классов элементарных функций	18
3.1. Интегрирование дробей, содержащих квадратный трехчлен	18
3.2. Интегрирование рациональных функций в неопределенном интеграле.....	22
3.3. Интегрирование иррациональных функций.....	30
3.4. Интегрирование тригонометрических функций.....	35
4. «Неберущиеся» интегралы	42
Заключение	43
Интегралы для контрольных заданий.....	44
Список литературы.....	52

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие по математике «Неопределенный интеграл» предназначено для студентов технических специальностей.

Цель изучения темы – овладение студентами необходимыми теоретическими знаниями и математическим аппаратом, помогающим анализировать, моделировать и решать прикладные инженерные задачи.

Изложение темы «Неопределенный интеграл» произведено пошагово. Вначале студент изучает теоретическую часть, помещенную в начале глав и параграфов, далее разбирает решение примеров и их объяснение и только потом приступает к самостоятельному решению задач. Такая структура методического указания позволяет быстрее включить студента в активную деятельность по овладению данным материалом.

Учебно-методическое пособие содержит краткие теоретические сведения, образцы решения задач по теме, варианты контрольной работы для студентов, а также необходимые таблицы для решения.

В результате изучения темы у студентов развивается логическое и алгоритмическое мышление, студенты овладевают методами исследования и решения математических задач, вырабатывается умение самостоятельно расширять свои математические знания и проводить математический анализ прикладных инженерных задач.

1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ПЕРВООБРАЗНАЯ

1.1. Определения

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если в любой точке этого интервала функция $F(x)$ дифференцируема и имеет производную $F'(x)$, равную $f(x)$.

$$\text{Т. е. } F'=f(x) \text{ или } d(F(x))=f(x)dx.$$

Замечание. Любая первообразная $F(x)$ для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$ непрерывна на этом интервале.

ПРИМЕР 1. Функция $F(x)=x^5$ является первообразной для функции $f(x)=\frac{x^6}{6}$.

ПРИМЕР 2. Функция $F(x)=\arcsin(x)$ является первообразной для функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Теорема. Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, то множество всех первообразных для функции $f(x)$ задается формулой $F(x)+C$, где C – постоянное число.

Определение. Совокупность всех первообразных функций для данной функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ на этом интервале и обозначается $\int f(x)dx$.

$f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, $\int$ – знак неопределенного интеграла.

Знак $\int$ называется знаком неопределенного интеграла, так как действие, обратное дифференцированию, многозначно, т. е. сопровождается неопределенностью.

Определение. Вычисление неопределенного интеграла от заданной функции называется *интегрированием*.

1.2. Свойства неопределенных интегралов

$$1^0) \left(\int f(x) dx \right)' = f(x);$$

$$2^0) d\left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx;$$

$$3^0) \int dF(x) = F(x) + C;$$

$$4^0) \int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx;$$

$$5^0) \int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx;$$

$$6^0) \text{ если } \int f(x) dx = F(x) + C \text{ и } u = \varphi(x), \text{ то } \int f(u) du = F(u) + C;$$

$$7^0) \int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C, \quad a \neq 0.$$

Функции $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$, $f(u)$ – непрерывные дифференцируемые функции, C, a, b, k – константы, x, u – переменные интегрирования. Свойства 1–7 следуют из определения неопределенного интеграла.

1.3. Таблица основных неопределенных интегралов

$$1) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1;$$

$$2) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$3) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0;$$

$$4) \int \sin(x)dx = -\cos(x) + C;$$

$$5) \int \cos(x)dx = \sin(x) + C;$$

$$6) \int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \operatorname{tg}(x) + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$7) \int \frac{dx}{\sin^2(x)} = -\operatorname{ctg}(x) + C, \quad x \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$8) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C = -\arccos\left(\frac{x}{a}\right) + C_1, \quad a > 0;$$

$$9) \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C = -\operatorname{arcctg}(x) + C_1, \quad a \neq 0;$$

$$10) \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, \quad a \neq 0;$$

$$11) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C, \quad a \neq 0;$$

$$12) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C, \quad a \neq 0;$$

$$13) \int sh(x)dx = ch(x) + C;$$

$$14) \int ch(x)dx = sh(x) + C;$$

$$15) \int \frac{dx}{ch^2(x)} = th(x) + C;$$

$$16) \int \frac{dx}{sh^2(x)} = -cth(x) + C, \quad x \neq 0.$$

C – константа интегрирования.

ПРИМЕР 3. Вычислить интеграл $\int (6x^2 + 8x + 3)dx$.

Решение:

1. Данный интеграл суммы представить в виде суммы интегралов (см. свойство 5)

$$\int (6x^2 + 8x + 3)dx = \int 6x^2 dx + \int 8x dx + \int 3 dx.$$

2. В каждом интеграле вынести за знак интеграла множитель-константу (см. свойство 4)

$$\int 6x^2 dx + \int 8x dx + \int 3 dx = 6 \int x^2 dx + 8 \int x dx + 3 \int dx.$$

3. Для вычисления полученных интегралов использовать табличный интеграл 1

$$\int 6x^2 dx + \int 8x dx + \int 3 dx = 6 \int x^2 dx + 8 \int x dx + 3 \int dx = 6 \frac{x^3}{3} + 8 \frac{x^2}{2} + 3x + C = 2x^3 + 4x^2 + 3x + C;$$

Ответ: $\int (6x^2 + 8x + 3)dx = 2x^3 + 4x^2 + 3x + C.$

ПРИМЕР 4. Вычислить интеграл $\int \frac{x^4 - 4x + 5}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$

Решение:

1. Подынтегральную функцию разложить на три более простые функции $\frac{x^4 - 4x + 5}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{x^4}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4x}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}.$

2. Преобразовать дроби, записав их в степенные функции $\frac{x^4}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4x}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} = x^{\frac{10}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}} + 5x^{\frac{-2}{3}}.$

3. Интеграл суммы (разности) представить в виде суммы (разности) интегралов (см. свойство 5)

$$\int \left(x^{\frac{10}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}} + 5x^{\frac{-2}{3}} \right) dx = \int x^{\frac{10}{3}} dx - \int 4x^{\frac{1}{3}} dx + \int 5x^{\frac{-2}{3}} dx.$$

4. Вынести за знак интеграла множитель-константу (см. свойство 4)

$$\int x^{\frac{10}{3}} dx - \int 4x^{\frac{1}{3}} dx + \int 5x^{\frac{-2}{3}} dx = \int x^{\frac{10}{3}} dx - 4 \int x^{\frac{1}{3}} dx + 5 \int x^{\frac{-2}{3}} dx.$$

5. Для вычисления полученных интегралов использовать табличный интеграл 1

$$\int x^{\frac{10}{3}} dx - 4 \int x^{\frac{1}{3}} dx + 5 \int x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{13}{3}}}{\frac{13}{3}} - 4 \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + 5 \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = \frac{3}{13} \sqrt[3]{x^{13}} - 3 \sqrt[3]{x^4} + 15 \sqrt[3]{x} + C.$$

Ответ: $\int \frac{x^4 - 4x + 5}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \frac{3}{13} \sqrt[3]{x^{13}} - 3 \sqrt[3]{x^4} + 15 \sqrt[3]{x} + C.$

ПРИМЕР 5. Вычислить интеграл $\int (4 \cos(x+2) + 3 \sin(2x)) dx.$

Решение:

1. Интеграл суммы представить в виде суммы интегралов (см. свойство 5)

$$\int (4 \cos(x+2) + 3 \sin(2x)) dx = \int 4 \cos(x+2) dx + \int 3 \sin(2x) dx.$$

2. В каждом интеграле вынести за знак интеграла множитель-константу (см. свойство 4)

$$\int 4 \cos(x+2) dx + \int 3 \sin(2x) dx = 4 \int \cos(x+2) dx + 3 \int \sin(2x) dx.$$

3. Для вычисления полученных интегралов использовать свойство 7 и таблицу интегралов

$$4 \int \cos(x+2) dx + 3 \int \sin(2x) dx = 4 \sin(x+2) + 3 \frac{-\cos(2x)}{2} + C = 4 \sin(x+2) - \frac{3}{2} \cos(2x) + C.$$

Ответ: $\int (4 \cos(x+2) + 3 \sin(2x)) dx = 4 \sin(x+2) - \frac{3}{2} \cos(2x) + C.$

2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

2.1. Метод непосредственного интегрирования в неопределенном интеграле

Определение. Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции или выражения и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется *непосредственным интегрированием*.

При сведении решаемого интеграла к табличному интегралу используется инвариантность формул интегрирования. То есть подынтегральное выражение преобразуется таким образом, чтобы под знаком дифференциала находилась та же функция, что и в основной подынтегральной функции.

ПРИМЕР 1. Вычислить интеграл $\int \cos(x) \cdot \sin(x) dx$.

Решение:

1. Внести под знак дифференциала $\cos(x)$ и воспользоваться свойством 6

$$\int \cos(x) \cdot \sin(x) dx = \{\cos(x) dx = d(\sin(x))\} = \int \sin(x) d(\sin(x)).$$

2. Сделать замену $\sin(x) = t$

$$\int \sin(x) d(\sin(x)) = \left\{ \begin{array}{l} \sin(x) = t \\ d(\sin(x)) = dt \end{array} \right\} = \int t dt.$$

3. Для вычисления полученного интеграла использовать табличный интеграл 1

$$\int t dt = \frac{t^2}{2} + C.$$

4. Вернуться к исходной переменной x

$$\frac{t^2}{2} = \frac{\sin^2(x)}{2} + C.$$

Ответ: $\int \cos(x) \cdot \sin(x) dx = \frac{\sin^2(x)}{2} + C.$

ПРИМЕР 2. Вычислить интеграл $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} dx.$

Решение:

1. В числителе внести под знак дифференциала x и использовать свойство 6

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} dx = \left\{ x dx = \frac{1}{2} d(x^2) \right\} = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{d(x^2)}{\sqrt{1+x^4}}.$$

2. В интеграле вынести за знак интеграла множитель-константу (см. свойство 4)

$$\int \frac{1}{2} \cdot \frac{d(x^2)}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1+x^4}}.$$

3. Сделать замену $x^2 = t$

$$\frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1+x^4}} = \left\{ \begin{matrix} x^2 = t \\ d(x^2) = dt \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}.$$

4. Для вычисления полученного интеграла использовать табличный интеграл 11

$$\frac{1}{2} \int \frac{d(t)}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{2} \ln|t + \sqrt{1+t^2}| + C.$$

5. Вернуться к исходной переменной x

$$\frac{1}{2} \ln|t + \sqrt{1+t^2}| + C = \frac{1}{2} \ln|x^2 + \sqrt{1+x^4}| + C.$$

Ответ: $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2 + \sqrt{1+x^4}| + C.$

2.2. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной) в неопределенном интеграле

Метод вычисления интегралов основан на введении новой переменной интегрирования, т. е. подстановки. Благодаря подстановке исходный интеграл упрощается и приводится к табличному интегралу.

Пусть необходимо вычислить интеграл $\int f(x)dx$. Если сделать подстановку $x = \varphi(t)$, следовательно, $dx = \varphi'(t)dt$, то формула интегрирования подстановкой примет вид: $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$, где $\varphi(t)$ – непрерывная, дифференцируемая функция. После вычисления неопределенного интеграла необходимо перейти к исходной переменной.

ПРИМЕР 3. Вычислить интеграл $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$.

Решение:

1. Сделать замену $\ln(x) = t$

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \ln(x) = t \\ d(\ln(x)) = \frac{dx}{x} \rightarrow \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right\} = \int t dt.$$

2. Для вычисления полученного интеграла использовать табличный интеграл 1

$$\int t dt = \frac{t^2}{2} + C.$$

3. Вернуться к исходной переменной x

$$\frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2|x|}{2} + C.$$

Ответ: $\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{\ln^2|x|}{2} + C.$

ПРИМЕР 4. Вычислить интеграл $\int x^2 \cos(x^3) dx$.

Решение:

1. Сделать замену $x^3 = t$

$$\int x^2 \cos(x^3) dx = \left\{ \begin{array}{l} x^3 = t \\ d(x^3) = 3x^2 dx \\ 3x^2 dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{1}{3} \cos(t) dt.$$

2. В интеграле вынести за знак интеграла множитель-константу (см. свойство 4)

$$\int \frac{1}{3} \cos(t) dt = \frac{1}{3} \int \cos(t) dt.$$

3. Для вычисления полученного интеграла использовать табличный интеграл 5

$$\frac{1}{3} \int \cos(t) dt = \frac{1}{3} \sin(t) + C.$$

4. Вернуться к исходной переменной

$$\frac{1}{3} \sin(t) + C = \frac{1}{3} \sin(x^3) + C.$$

Ответ: $\int x^2 \cos(x^3) dx = \frac{1}{3} \sin(x^3) + C$.

ПРИМЕР 5. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$.

Решение:

1. Сделать замену $\sqrt{x} = t$

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \rightarrow x = t^2 \\ d(x) = d(t^2) = 2t dt \end{array} \right\} = \int \frac{2t dt}{t^2 + t} = \int \frac{2 dt}{t + 1}.$$

2. Использовать свойства 4, 7

$$\int \frac{2 dt}{t + 1} = 2 \int \frac{dt}{t + 1} = 2 \int \frac{d(t + 1)}{t + 1} = 2 \ln|t + 1| + C.$$

3. Вернуться к исходной переменной x

$$2 \ln|t+1| + C = 2 \ln|\sqrt{x}+1| + C.$$

Ответ: $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = 2 \cdot \ln|\sqrt{x}+1| + C.$

2.3. Метод интегрирования по частям неопределенного интеграла

Пусть $u=u(x)$, $v=v(x)$ – непрерывные дифференцируемые функции, тогда формула интегрирования по частям имеет вид $\int u dv = u \cdot v - \int v du$.

1). Для интегралов вида: $\int P(x) \cdot e^{kx} dx$, $\int P(x) \cdot \sin(kx) dx$, $\int P(x) \cdot \cos(kx) dx$, где $P(x)$ – многочлен, k – константа $k \neq 0$, функция $u = P(x)$, а dv – оставшаяся часть сомножителя.

ПРИМЕР 6. Вычислить интеграл $\int x \cdot \cos(3x) dx$.

Решение:

1. Пусть $u=x$, тогда $dv = \cos(3x) dx$.

2. Вычислить du , v : $du = dx$, $v = \frac{1}{3} \sin(3x)$.

3. Применить формулу интегрирования по частям

$$\begin{aligned} \int x \cdot \cos(3x) dx &= \left\{ \begin{array}{l} u=x \quad dv=\cos(3x)dx \\ du=dx \quad v=\frac{1}{3}\sin(3x) \end{array} \right\} = x \cdot \frac{1}{3} \sin(3x) - \int \frac{1}{3} \sin(3x) dx + C = \\ &= \frac{x \cdot \sin(3x)}{3} + \frac{\cos(3x)}{9} + C_1. \end{aligned}$$

Ответ: $\int x \cdot \cos(3x) dx = \frac{x \cdot \sin(3x)}{3} + \frac{\cos(3x)}{9} + C_1.$

2). Для интегралов вида: $\int P(x) \cdot \ln(kx) dx$, $\int P(x) \cdot \arcsin(kx) dx$, $\int P(x) \cdot \arccos(kx) dx$, $\int P(x) \cdot \arctg(kx) dx$, $\int P(x) \cdot \operatorname{arccctg}(kx) dx$, где $P(x)$ – многочлен, k – константа, $k \neq 0$. Выражение $P(x)dx = dv$, а u – остальная часть сомножителя.

ПРИМЕР 7. Вычислить интеграл $\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$.

Решение:

1. Пусть $u = \ln(x)$, тогда $dv = \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

2. Вычислить du , v : $du = \frac{dx}{x}$, $v = 2\sqrt{x}$.

3. Применить формулу интегрирования по частям

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx &= \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln(x) & dv = x^{-\frac{1}{2}} dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = 2\sqrt{x} \end{array} \right\} = 2\sqrt{x} \cdot \ln(x) - \int 2\sqrt{x} \cdot \frac{dx}{x} + C = \\ &= 2\sqrt{x} \cdot \ln(x) - 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx + C = 2\sqrt{x} \cdot \ln(x) - 4\sqrt{x} + C_1. \end{aligned}$$

Ответ: $\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \cdot \ln(x) - 4\sqrt{x} + C_1$.

3). Для интегралов вида: $\int a^{kx} \cdot \sin(\alpha x) dx$, $\int a^{kx} \cdot \cos(\alpha x) dx$, где k , α , a – константы (α , k , $a \neq 0$), функция $u = a^{kx}$, а dv – остальная часть сомножителя. При интегрировании по частям дважды интеграл сводится сам к себе.

ПРИМЕР 8. Вычислить интеграл $\int e^{2x} \cdot \cos(3x) dx$.

Решение:

1. Пусть $u = e^{2x}$, тогда $dv = \cos(3x) dx$.

2. Вычислить du , v : $du = 2 \cdot e^{2x} dx$, $v = \frac{1}{3} \cdot \sin(3x)$.

3. Применить формулу интегрирования по частям

$$\int e^{2x} \cdot \cos(3x) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x} \quad dv = \cos(3x) dx \\ du = 2e^{2x} dx \quad v = \frac{1}{3} \sin(3x) \end{array} \right\} = e^{2x} \cdot \frac{\sin(3x)}{3} - \int \frac{1}{3} \sin(3x) \cdot 2e^{2x} dx + \\ + C = \frac{e^{2x} \cdot \sin(3x)}{3} - \frac{2}{3} \int e^{2x} \cdot \sin(3x) dx + C.$$

4. Применить формулу интегрирования по частям повторно

$$\frac{e^{2x} \cdot \sin(3x)}{3} - \frac{2}{3} \int e^{2x} \cdot \sin(3x) dx + C = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x} \quad dv = \sin(3x) dx \\ du = 2e^{2x} dx \quad v = -\frac{1}{3} \cdot \cos(3x) \end{array} \right\} = \\ = \frac{e^{2x} \cdot \sin(3x)}{3} - \frac{2}{3} \left(-e^{2x} \frac{\cos(3x)}{3} - \int -\frac{\cos(3x)}{3} \cdot 2e^{2x} dx \right) + C_1 = \frac{e^{2x} \cdot \sin(3x)}{3} + \\ + \frac{2}{9} e^{2x} \cos(3x) - \frac{4}{9} \int e^{2x} \cos(3x) dx + C_1.$$

5. С правой стороны получен исходный интеграл с множителем-константой. Перенести его в левую часть и привести подобные слагаемые

$$\int e^{2x} \cos(3x) dx + \frac{4}{9} \int e^{2x} \cos(3x) dx = \frac{e^{2x} \cdot \sin(3x)}{3} + \frac{2}{9} e^{2x} \cos(3x) + C_1; \\ \frac{13}{9} \int e^{2x} \cos(3x) dx = \frac{e^{2x} \cdot \sin(3x)}{3} + \frac{2}{9} e^{2x} \cos(3x) + C_1.$$

6. Вычислить исходный интеграл

$$\int e^{2x} \cos(3x) dx = \frac{9}{13} \left(\frac{e^{2x} \cdot \sin(3x)}{3} + \frac{2}{9} e^{2x} \cos(3x) + C_1 \right) = \frac{e^{2x}}{13} [3 \sin(3x) + 2 \cos(3x)] + C_2.$$

Ответ: $\int e^{2x} \cos(3x) dx = \frac{e^{2x}}{13} (3 \sin(3x) + 2 \cos(3x)) + C_2.$

4) Для интегралов вида: $\int \cos(\ln(kx)) dx$, $\int \sin(\ln(kx)) dx$, где k – константа ($k \neq 0$), $dv = dx$, а u – оставшая часть сомножителя. При интегрировании по частям дважды интеграл сводится сам к себе.

ПРИМЕР 9. Вычислить интеграл $\int \cos(\ln(7x)) dx$.

Решение:

1. Пусть $u = \cos(\ln(7x))$, тогда $dv = dx$.

2. Вычислить du , v : $du = -\frac{\sin(\ln(7x))}{x} dx$, $v = x$.

3. Применить формулу интегрирования по частям

$$\int \cos(\ln(7x)) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \cos(\ln(7x)) \\ du = -\frac{\sin(\ln(7x))}{x} dx \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = dx \\ v = x \end{array} \right\} = x \cdot \cos(\ln(7x)) + \\ + \int x \cdot \frac{\sin(\ln(7x))}{x} dx + C = x \cdot \cos(\ln(7x)) + \int \sin(\ln(7x)) dx + C.$$

4. Применить формулу интегрирования по частям повторно

$$x \cdot \cos(\ln(7x)) + \int \sin(\ln(7x)) dx + C = \left\{ \begin{array}{l} u = \sin(\ln(7x)) \\ du = \frac{\cos(\ln(7x))}{x} dx \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = dx \\ v = x \end{array} \right\} = \\ = x \cdot \cos(\ln(7x)) + x \cdot \sin(\ln(7x)) - \int x \cdot \frac{\cos(\ln(7x))}{x} dx + C_1 = x \cdot \cos(\ln(7x)) + \\ + x \cdot \sin(\ln(7x)) - \int \cos(\ln(7x)) dx + C_1.$$

5. С правой стороны получен исходный интеграл. Перенести его в левую часть и привести подобные слагаемые

$$\int \cos(\ln(7x)) dx = x \cdot \cos(\ln(7x)) + x \cdot \sin(\ln(7x)) - \int \cos(\ln(7x)) dx + C_1; \\ 2 \int \cos(\ln(7x)) dx = x \cdot \cos(\ln(7x)) + x \cdot \sin(\ln(7x)) + C_1.$$

6. Вычислить исходный интеграл

$$\int \cos(\ln(7x)) dx = \frac{x}{2} \cdot (\cos(\ln(7x)) + \sin(\ln(7x))) + C_2.$$

Ответ: $\int \cos(\ln(7x)) dx = \frac{x}{2} \cdot (\cos(\ln(7x)) + \sin(\ln(7x))) + C_2.$

3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

3.1. Интегрирование дробей, содержащих квадратный трехчлен

Интеграл $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$, где $b^2 - 4ac < 0$, a, b, c – константы, x – переменная, решается методом интегрирования подстановкой.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} &= \int \frac{dx}{a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right]} = \left\{ \begin{array}{l} x + \frac{b}{2a} = t \quad dx = dt \\ \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = q^2 \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{a} \cdot \int \frac{dt}{t^2 + q^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{q} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{q} \right) + C = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} \right) + C. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 1. Вычислить интеграл $\int \frac{1}{2x^2 + 3x + 4} dx$.

Решение:

1. Выделить в знаменателе полный квадрат

$$2x^2 + 3x + 4 = 2 \cdot \left(x^2 + x \cdot \frac{3}{2} + \frac{4}{2} \right) = 2 \cdot \left(\left(x + \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{23}{16} \right).$$

2. Вычислить интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2x^2 + 3x + 4} dx &= \int \frac{1}{2 \cdot \left(\left(x + \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{23}{16} \right)} dx = \left\{ \begin{array}{l} x + \frac{3}{4} = t \\ dx = dt \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{t^2 + \frac{23}{16}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{23}{16}}} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{\sqrt{\frac{23}{16}}} \right) + C = \frac{2}{\sqrt{23}} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{4t}{\sqrt{23}} \right) + C = \frac{2\sqrt{23}}{23} \operatorname{arctg} \left(\frac{4\sqrt{23}}{23} t \right) + \end{aligned}$$

$$+ C = \frac{2\sqrt{23}}{23} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{23}(4x+3)}{23}\right) + C.$$

Ответ: $\int \frac{1}{2x^2 + 3x + 4} dx = \frac{2\sqrt{23}}{23} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{23}(4x+3)}{23}\right) + C.$

Интеграл $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$, где $b^2 - 4ac > 0$, a , b , c – константы, x – пе-

ременная, решается методом интегрирования подстановкой.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} &= \int \frac{dx}{a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \right) \right]} = \left\{ \begin{array}{l} x + \frac{b}{2a} = t \quad dx = dt \\ -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = q^2 \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{a} \cdot \int \frac{dt}{t^2 - q^2} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{2q} \operatorname{Ln} \left| \frac{q+t}{q-t} \right| + C = -\frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{b^2 - 4ac} + 2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac} - 2ax - b} \right| + C. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2. Вычислить интеграл $\int \frac{1}{3x^2 + 2x - 1} dx.$

Решение:

1. Выделить в знаменателе полный квадрат

$$3x^2 + 2x - 1 = 3 \cdot \left(x^2 + \frac{2x}{3} - \frac{1}{3} \right) = 3 \cdot \left(\left(x + \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{4}{9} \right).$$

2. Вычислить интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{3x^2 + 2x - 1} dx &= \int \frac{1}{3 \cdot \left(\left(x + \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{4}{9} \right)} dx = -\frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{-\left(x + \frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} x + \frac{1}{3} = t \\ dx = dt \end{array} \right\} = \\ &= -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{\left(\frac{2}{3} \right)^2 - t^2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{2}{3}} \cdot \ln \left| \frac{\frac{2}{3} + t}{\frac{2}{3} - t} \right| + C = -\frac{1}{4} \cdot \ln \left| \frac{2 + 3t}{2 - 3t} \right| + C = -\frac{1}{4} \cdot \ln \left| \frac{2 + 3x + 1}{2 - 3x - 1} \right| + C = \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \ln \left| \frac{3x + 3}{1 - 3x} \right| + C. \end{aligned}$$

Ответ: $\int \frac{1}{3x^2 + 2x - 1} dx = -\frac{1}{4} \cdot \ln \left| \frac{3x+3}{1-3x} \right| + C.$

Интеграл $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} dx$, где $b^2 - 4ac < 0$, M , N , a , b , c – констан-

ты, x – переменная, решается методом интегрирования подстановкой, а после раскладывается на сумму двух интегралов.

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} dx &= \int \frac{Mx+N}{a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right]} dx = \left\{ \begin{array}{l} x + \frac{b}{2a} = t \quad x = t - \frac{b}{2a} \\ dx = dt \quad q^2 = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{a} \cdot \int \frac{M \cdot \left(t - \frac{b}{2a} \right) + N}{t^2 + q^2} dt = \frac{M}{a} \cdot \int \frac{tdt}{t^2 + q^2} + \frac{\left(N - \frac{Mb}{2a} \right)}{a} \cdot \int \frac{dt}{t^2 + q^2} = \frac{M}{2a} \cdot \int \frac{d(t^2 + q^2)}{t^2 + q^2} + \\ &+ \frac{2aN - Mb}{2a^2} \cdot \int \frac{dt}{t^2 + q^2} = \frac{M}{2a} \cdot \ln |ax^2 + bx + c| + \frac{2aN - Mb}{a\sqrt{4ac - b^2}} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} \right) + C. \end{aligned}$$

Интеграл $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} dx$, где $b^2 - 4ac > 0$, M , N , a , b , c – констан-

ты, x – переменная, решается методом интегрирования подстановкой, а после раскладывается на сумму двух интегралов.

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} dx &= \int \frac{Mx+N}{a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \right) \right]} dx = \left\{ \begin{array}{l} x + \frac{b}{2a} = t \quad x = t - \frac{b}{2a} \\ dx = dt \quad q^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{a} \cdot \int \frac{M \cdot \left(t - \frac{b}{2a} \right) + N}{t^2 - q^2} dt = \frac{M}{a} \cdot \int \frac{tdt}{t^2 - q^2} + \left(\frac{N}{a} - \frac{Mb}{2a^2} \right) \cdot \int \frac{dt}{t^2 - q^2} = \frac{M}{2a} \cdot \int \frac{d(t^2 - q^2)}{t^2 - q^2} + \\ &+ \frac{2aN - Mb}{2a^2} \cdot \int \frac{dt}{t^2 - q^2} = \frac{M}{2a} \cdot \ln |ax^2 + bx + c| - \frac{2aN - Mb}{2a^2} \cdot \frac{1}{2q} \cdot \ln \left| \frac{q+t}{q-t} \right| + C = \\ &= \frac{M}{2a} \cdot \ln |ax^2 + bx + c| + \frac{Mb - 2aN}{2a \cdot \sqrt{b^2 - 4ac}} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{b^2 - 4ac} + 2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac} - 2ax - b} \right| + C. \end{aligned}$$

Интеграл $\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n} dx$, где $b^2 - 4ac < 0$. M , N , a , b , c , n –

константы, x – переменная, $n \geq 2$ решается методом интегрирования подстановкой, а после раскладывается на разность двух интегралов.

Выделить в знаменателе полный квадрат

$$(ax^2 + bx + c) = a \cdot \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right) \text{ и сделать подстановку } t = x + \frac{b}{2a}.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{(ax^2 + bx + c)^n} dx &= \frac{1}{a^n} \cdot \int \frac{Mx + N}{\left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right)^n} dt = \left\{ \begin{array}{l} t = x + \frac{b}{2a} \rightarrow x = t - \frac{b}{2a} \\ \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = q^2 \quad dx = dt \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{a^n} \int \frac{M \cdot \left(t - \frac{b}{2a} \right) + N}{(t^2 + q^2)^n} dt = \frac{1}{a^n} \cdot \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mb}{2a} \right)}{(t^2 + q^2)^n} dt = \frac{M}{a^n} \int \frac{t}{(t^2 + q^2)^n} dt - \\ &\quad - \frac{2aN - Mb}{2a^{n+1}} \int \frac{1}{(t^2 + q^2)^n} dt; \end{aligned}$$

вычислить поочередно оба интеграла

$$\int \frac{t}{(t^2 + q^2)^n} dt = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{d(t^2 + q^2)}{(t^2 + q^2)^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(t^2 + q^2)^{-n+1}}{(-n+1)} + C;$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(t^2 + q^2)^n} dt &= \frac{1}{q^2} \cdot \int \frac{(t^2 + q^2) - t^2}{(t^2 + q^2)^n} dt = \frac{1}{q^2} \cdot \int \frac{(t^2 + q^2)}{(t^2 + q^2)^n} dt - \frac{1}{q^2} \cdot \int \frac{t^2}{(t^2 + q^2)^n} dt = \\ &= \frac{1}{q^2} \cdot \int \frac{1}{(t^2 + q^2)^{n-1}} dt - \frac{1}{q^2} \cdot \int \frac{t^2}{(t^2 + q^2)^n} dt; \end{aligned}$$

второй полученный интеграл проинтегрировать по частям

$$\begin{aligned} \frac{1}{q^2} \int \frac{1}{(t^2 + q^2)^{n-1}} dt - \frac{1}{q^2} \cdot \int \frac{t^2}{(t^2 + q^2)^n} dt &= \frac{1}{q^2} \int \frac{1}{(t^2 + q^2)^{n-1}} dt - \frac{t \cdot (t^2 + q^2)^{-n+1}}{q^2 2(-n+1)} + \\ + \frac{1}{q^2 2(1-n)} \int \frac{1}{(t^2 + q^2)^{n-1}} dt &= \frac{3-2n}{2q^2(1-n)} \int \frac{1}{(t^2 + q^2)^{n-1}} dt - \frac{t}{q^2 2(-n+1) \cdot (t^2 + q^2)^{n-1}} + C, \end{aligned}$$

таким образом, интеграл $\int \frac{t}{(t^2 + q^2)^n} dt$ выражается через интеграл

$$\int \frac{t}{(t^2 + q^2)^{n-1}} dt.$$

3.2. Интегрирование рациональных функций в неопределенном интеграле

Определение. Функция вида $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, где n – натуральное число, a_i ($i = \overline{0, n}$) – постоянные коэффициенты, называется многочленом или *целой рациональной функцией*.

Определение. Число n называется *степенью многочлена*.

Определение. *Дробно-рациональной* называется функция вида $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m}$, где $P_n(x)$ – многочлен n -ой степени, $Q_m(x)$ – многочлен m -ой степени, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$.

Интегрирование дробно-рациональных дробей сводится к трем этапам:

1) определить, является дробно-рациональная дробь правильной ($n < m$) или неправильной ($n \geq m$). Если дробь неправильная, то необходимо выделить целую часть и сумму многочленов;

2) разложить знаменатель правильной рациональной дроби на множители и представить ее в виде суммы простейших рациональных дробей;

3) проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

Простейшие дроби – это дроби вида $\frac{A}{(x-a)}; \frac{A}{(x-a)^k}$ ($k \geq 2, k \in N$);

$\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)}; \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$ ($n \geq 2$), где A, a, M, N, b, c – действительные числа.

Разложение правильной рациональной дроби на простейшие.

Если многочлен $Q_m(x)$ в знаменателе имеет m различных действи-

тельных корней $x_1 = b_1, x_2 = b_2, \dots, x_m = b_m$, тогда

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(x-b_1) \cdot (x-b_2) \cdot \dots \cdot (x-b_m)} = \frac{A}{x-b_1} + \frac{B}{x-b_2} + \frac{C}{x-b_3} + \dots + \frac{Z}{x-b_m}, \text{ где } A,$$

$B, C, \dots, Z$ – неопределенные коэффициенты. Для нахождения неопределенных коэффициентов применяется метод сравнения.

Если многочлен $Q_m(x)$ в знаменателе имеет кратные действительные корни $x_1 = x_2 = \dots = x_k = b_1, x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_l = b_2, \dots, x_{m-j} = \dots = x_{m-2} = x_{m-1} = b_i$,

тогда

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(x-b_1)^k \cdot \dots \cdot (x-b_i)^j} = \frac{A_1}{(x-b_1)} + \frac{A_2}{(x-b_1)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-b_1)^k} + \frac{B_1}{(x-b_2)} +$$

$$\frac{B_2}{(x-b_2)^2} + \dots + \frac{B_{l-k}}{(x-b_2)^{l-k}} + \dots + \frac{K_1}{(x-b_i)} + \dots + \frac{K_j}{(x-b_i)^j}, \text{ где } A_1, A_2, \dots, A_k, B_1, B_2,$$

$B_{l-k}, K_1, \dots, K_j$ – неопределенные коэффициенты, которые вычисляются методом сравнения.

Если многочлен $Q_m(x)$ в знаменателе имеет m различных комплексных корней, тогда

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(a_0x^2 + a_1x + a_2) \cdot (b_0x^2 + b_1x + b_2) \cdot \dots \cdot (c_0x^2 + c_1x + c_2)} = \frac{A_1x + A_2}{(a_0x^2 + a_1x + a_2)} +$$

$$+ \frac{B_1x + B_2}{(b_0x^2 + b_1x + b_2)} + \dots + \frac{C_1x + C_2}{(c_0x^2 + c_1x + c_2)}.$$

Коэффициенты $A_1, A_2, B_1, B_2, \dots, C_1, C_2$ – неопределенные коэффициенты, которые вычисляют, используя метод сравнения.

Если многочлен $Q_m(x)$ в знаменателе имеет m кратных комплексных корней, тогда

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(a_0x^2 + a_1x + a_2)^k \cdot (b_0x^2 + b_1x + b_2)^l \cdot \dots \cdot (c_0x^2 + c_1x + c_2)^j} = \frac{A_1x + A_2}{(a_0x^2 + a_1x + a_2)} +$$

$$\frac{A_3x + A_4}{(a_0x^2 + a_1x + a_2)^2} + \dots + \frac{A_{2k-1}x + A_{2k}}{(a_0x^2 + a_1x + a_2)^k} + \dots + \frac{C_1x + C_2}{(c_0x^2 + c_1x + c_2)} +$$

$$+ \frac{C_3x + C_4}{(c_0x^2 + c_1x + c_2)^2} + \dots + \frac{C_{2j-1}x + C_{2j}}{(c_0x^2 + c_1x + c_2)^j},$$

где $k + l + \dots + j = m$, коэффициенты $A_1, \dots, A_{2k}, \dots, C_1, \dots, C_{2j}$ – неопределенные коэффициенты, вычисляются методом сравнения.

Суть метода сравнения: правую часть равенства привести к общему знаменателю и сгруппировать слагаемые в числителе по переменной x при одинаковых степенях. Далее приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях правой и левой части равенства, в конце записать равенства в систему, решить ее и найти неопределенные коэффициенты.

ПРИМЕР 3. Определить, является ли рациональная дробь $\frac{x^5 + x^3 + 1}{x^3 - 2x}$ правильной или неправильной. Если дробь правильная рациональная, то выделить в ней целую часть, правильную рациональную дробь и разложить ее на простейшие дроби.

Решение:

1. Определить, является ли рациональная дробь правильной или неправильной. Так как $n \geq m$ (степень переменной в числителе больше, чем степень переменной в знаменателе ($5 > 3$)), то дробь является неправильной.

2. Выделить целую часть и правильную дробь

$$\frac{x^5 + x^3 + 1}{x^3 - 2x} = x^2 + 3 + \frac{1 + 6x}{x^3 - 2x}.$$

$$\begin{array}{r} -x^5 + x^3 + 1 \overline{) x^3 - 2x} \\ x^5 - 2x^3 \\ \hline 3x^3 + 1 \\ -3x^3 - 6x \\ \hline 1 + 6x \end{array}$$

$x^2 + 3$ – целая часть; $\frac{1 + 6x}{x^3 - 2x}$ – правильная дробь.

3. Разложить правильную дробь $\frac{1 + 6x}{x^3 - 2x}$ на простейшие дроби

$$\frac{1 + 6x}{x^3 - 2x} = \frac{1 + 6x}{x \cdot (x^2 - 2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + D}{x^2 - 2} = \frac{Ax^2 - 2A + Bx^2 + Dx}{x \cdot (x^2 - 2)} = \frac{x^2 \cdot (A + B) + x \cdot D - 2A}{x \cdot (x^2 - 2)}.$$

Дробь $\frac{A}{x}$ имеет действительный корень, дробь $\frac{Bx+D}{x^2-2}$ имеет комплексные корни.

4. Вычислить неопределенные коэффициенты A, B, D , применяя метод сравнения

$$\begin{matrix} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{matrix} \left| \begin{cases} 0 = A + B \\ 6 = D \\ 1 = -2A \end{cases} \right. \quad \text{следовательно,} \quad \begin{cases} A = -1/2 \\ B = 1/2 \\ D = 6. \end{cases}$$

Записать правильную дробь через известные коэффициенты

$$\frac{1+6x}{x^3-2x} = \frac{1+6x}{x \cdot (x^2-2)} = -\frac{1}{2x} + \frac{\frac{1}{2}x+6}{x^2-2} = -\frac{1}{2x} + \frac{x+12}{2 \cdot (x^2-2)}.$$

Ответ: Рациональная дробь $\frac{x^5+x^3+1}{x^3-2x}$ является правильной, ее можно разложить на целую часть $-x^2+3$ и правильную дробь $-\frac{1+6x}{x^3-2x}$. Правильную дробь можно разложить на сумму простейших дробей $-\frac{1}{2x}$ (дробь имеет действительный корень) и $\frac{x+12}{2 \cdot (x^2-2)}$ (дробь имеет комплексные корни).

ПРИМЕР 4. Вычислить интеграл $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} dx$.

Решение:

1. Определить, является ли рациональная дробь $\frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}$ правильной или неправильной. Так как $n \geq m$ ($3=3$), то рациональная дробь неправильная.

2. Выделить целую часть и правильную дробь

$$-\frac{5x^3+2}{5x^3-25x^2+20x+2} \mid \frac{x^3-5x^2+4x}{5} \quad \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} = 5 + \frac{25x^2-20x+2}{x^3-5x^2+4x}.$$

3. Разложить правильную дробь на простейшие дроби. Многочлен в знаменателе имеет три различных действительных корня $x^3 - 5x^2 + 4x = x \cdot (x^2 - 5x + 4) = x \cdot (x-1) \cdot (x-4)$, следовательно,

$$\frac{25x^2-20x+2}{x^3-5x^2+4x} = \frac{25x^2-20x+2}{x \cdot (x-1) \cdot (x-4)}.$$

Записать правильную дробь через неопределенные коэффициенты и применить метод сравнения

$$\frac{25x^2-20x+2}{x \cdot (x-1) \cdot (x-4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-4)} = \frac{x^2 \cdot (A+B+C) + x \cdot (-5A-4B-C) + 4A}{x \cdot (x-1) \cdot (x-4)}.$$

$$\begin{matrix} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} 25 = A+B+C \\ -20 = -5A-4B-C \\ 2 = 4A \end{array} \right. \quad \text{Следовательно,} \quad \left\{ \begin{array}{l} A = 1/2 \\ B = -7/3 \\ C = 161/6 \end{array} \right.$$

Записать правильную дробь через известные коэффициенты

$$\frac{25x^2-20x+2}{x \cdot (x-1) \cdot (x-4)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{(x-1)} + \frac{161}{6} \cdot \frac{1}{(x-4)} = \frac{1}{2 \cdot x} - \frac{7}{3 \cdot (x-1)} + \frac{161}{6 \cdot (x-4)}.$$

4. Вычислить интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} dx &= \int \left(5 + \frac{1}{2x} - \frac{7}{3 \cdot (x-1)} + \frac{161}{6 \cdot (x-4)} \right) dx = \int 5dx + \int \frac{1}{2 \cdot x} dx - \\ &- \int \frac{7}{3 \cdot (x-1)} dx + \int \frac{161}{6 \cdot (x-4)} dx = 5 \int dx + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x} dx - \frac{7}{3} \cdot \int \frac{1}{(x-1)} dx + \frac{161}{6} \cdot \int \frac{1}{(x-4)} dx = \\ &= 5 \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx - \frac{7}{3} \cdot \int \frac{d(x-1)}{(x-1)} dx + \frac{161}{6} \cdot \int \frac{d(x-4)}{(x-4)} dx = 5x + \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{7}{3} \ln|x-1| + \\ &+ \frac{161}{6} \ln|x-4| + C. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} dx = 5x + \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{7}{3} \ln|x-1| + \frac{161}{6} \ln|x-4| + C.$$

ПРИМЕР 5. Вычислить интеграл $\int \frac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2 \cdot (x+1)^2} dx$.

Решение:

1. Определить, является ли рациональная дробь $\frac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2 \cdot (x+1)^2}$ правильной или неправильной. Так как $n < m$ ($2 < 4$), то рациональная дробь правильная. Многочлен в знаменателе имеет четыре действительных корня ($x_1 = x_2 = 3$; $x_3 = x_4 = -1$).

2. Разложить правильную дробь на простейшие дроби, записать ее через неопределенные коэффициенты и вычислить коэффициенты, применяя метод сравнения $\frac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2 \cdot (x+1)^2} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{(x+1)} + \frac{D}{(x+1)^2} =$
 $= \frac{x^3 \cdot (A+C) + x^2 \cdot (-A+B-5C+D) + x \cdot (-5A+2B+3C-6D) + (-3A+B+9C+9D)}{(x-3)^2 \cdot (x+1)^2}$

$$\begin{matrix} x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} 0 = A + C \\ 5 = -A + B - 5C + D \\ 6 = -5A + 2B + 3C - 6D \\ 9 = -3A + B + 9C + 9D \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A = 0 \\ B = 9/2 \\ C = 0 \\ D = 1/2 \end{array} \right.$$

Записать правильную дробь через известные коэффициенты

$$\begin{aligned} \frac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2 \cdot (x+1)^2} &= 0 \cdot \frac{1}{(x-3)} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{(x-3)^2} + 0 \cdot \frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{9}{2 \cdot (x-3)^2} + \frac{1}{2 \cdot (x+1)^2}. \end{aligned}$$

3. Вычислить интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2 \cdot (x+1)^2} dx &= \int \left(\frac{9}{2 \cdot (x-3)^2} + \frac{1}{2 \cdot (x+1)^2} \right) dx = \int \frac{9}{2 \cdot (x-3)^2} dx + \int \frac{1}{2 \cdot (x+1)^2} dx = \\ &= \frac{9}{2} \int \frac{dx}{(x-3)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{9}{2} \int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} = -\frac{9}{2 \cdot (x-3)} - \frac{1}{2 \cdot (x+1)} + C. \end{aligned}$$

Ответ: $\int \frac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2 \cdot (x+1)^2} dx = -\frac{9}{2 \cdot (x-3)} - \frac{1}{2 \cdot (x+1)} + C.$

ПРИМЕР 6. Вычислить интеграл $\int \frac{6x-7}{x^2+4x+13} dx$.

Решение:

1. Определить, является ли рациональная дробь $\frac{6x-7}{x^2+4x+13}$ правильной или неправильной. Так как $n < m$ ($1 < 2$), то рациональная дробь правильная. Многочлен в знаменателе имеет комплексные корни. Выделить в знаменателе полный квадрат $x^2 + 4x + 13 = (x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2) + 9 = (x+2)^2 + 3^2$.

2. Вычислить интеграл, применяя метод интегрирования замены переменной $x+2=t$

$$\int \frac{6x-7}{x^2+4x+13} dx = \int \frac{6x-7}{(x+2)^2+3^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} x+2=t \rightarrow x=t-2 \\ dx=dt \end{array} \right\} = \int \frac{6 \cdot (t-2) - 7}{t^2+3^2} dt = \int \frac{6t-19}{t^2+3^2} dt;$$

полученный интеграл разности разложить на разность интегралов

$$\int \frac{6t-19}{t^2+3^2} dt = \int \frac{6t}{t^2+3^2} dt - \int \frac{19}{t^2+3^2} dt = 6 \cdot \int \frac{t}{t^2+3^2} dt - 19 \int \frac{1}{t^2+3^2} dt;$$

в первом интеграле внести под знак дифференциала t

$$\begin{aligned} 6 \cdot \int \frac{t}{t^2+3^2} dt - 19 \cdot \int \frac{1}{t^2+3^2} dt &= \frac{6}{2} \cdot \int \frac{d(t^2+3^2)}{t^2+3^2} - 19 \cdot \int \frac{1}{t^2+3^2} dt = \\ &= 3 \cdot \int \frac{d(t^2+3^2)}{t^2+3^2} - 19 \cdot \int \frac{1}{t^2+3^2} dt; \end{aligned}$$

полученные интегралы являются табличными, вычислить их и перейти к исходной переменной

$$\begin{aligned} 3 \cdot \int \frac{d(t^2+3^2)}{t^2+3^2} - 19 \int \frac{1}{t^2+3^2} dt &= 3 \ln|t^2+3^2| - 19 \cdot \frac{1}{3} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{3}\right) + C = \\ &= 3 \cdot \ln|x^2+4x+13| - \frac{19}{3} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{3}\right) + C. \end{aligned}$$

Ответ: $\int \frac{6x-7}{x^2+4x+13} dx = 3 \ln|x^2+4x+13| - \frac{19}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{3}\right) + C.$

ПРИМЕР 7. Вычислить интеграл $\int \frac{3x-2}{(x^2+6x+10)^2} dx$.

Решение:

1. Определить, является ли рациональная дробь $\frac{3x-2}{(x^2+6x+10)^2}$ правильной или неправильной. Так как $n < m$ ($1 < 4$), то рациональная дробь правильная. Многочлен в знаменателе имеет кратные комплексные корни, его можно записать в виде $(x^2+6x+10)^2 = ((x^2+2 \cdot x \cdot 3+3^2)+1)^2 = ((x+3)^2+1)^2$.

2. Вычислить интеграл. Интеграл решить методом интегрирования подстановкой $x+3=y$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-2}{(x^2+6x+10)^2} dx &= \int \frac{3x-2}{((x+3)^2+1)^2} dx = \left. \begin{matrix} x+3=y \rightarrow x=y-3 \\ dx=dy \end{matrix} \right\} = \int \frac{3 \cdot (y-3)-2}{(y^2+1)^2} dy = \\ &= \int \frac{3y-11}{(y^2+1)^2} dy = \int \left(\frac{3y}{(y^2+1)^2} - \frac{11}{(y^2+1)^2} \right) dy; \end{aligned}$$

интеграл разности разложить на разность интегралов

$$\int \left(\frac{3y}{(y^2+1)^2} - \frac{11}{(y^2+1)^2} \right) dy = 3 \int \frac{y}{(y^2+1)^2} dy - 11 \int \frac{1}{(y^2+1)^2} dy;$$

в первом интеграле преобразовать подынтегральное выражение таким образом, чтобы под знаком дифференциала находилась та же функция, что и в основной подынтегральной функции. Во втором интеграле к числителю прибавить и отнять y^2

$$\begin{aligned} 3 \int \frac{y}{(y^2+1)^2} dy - 11 \int \frac{1}{(y^2+1)^2} dy &= \frac{3}{2} \int \frac{d(y^2+1)}{(y^2+1)^2} - 11 \int \frac{(y^2+1)-y^2}{(y^2+1)^2} dy = \frac{-3}{2 \cdot (y^2+1)} - \\ - 11 \int \frac{dy}{(y^2+1)} + 11 \int \frac{y^2}{(y^2+1)^2} dy + C &= -\frac{3}{2 \cdot (y^2+1)} - 11 \operatorname{arctg}(y) + 11 \int \frac{y^2}{(y^2+1)^2} dy + C; \end{aligned}$$

интеграл $\int \frac{y^2 dy}{(y^2+1)^2}$ вычислить методом интегрирования по частям

$$11 \int \frac{y^2}{(y^2+1)^2} dy = \left\{ \begin{matrix} y=u & dv = \frac{y}{(y^2+1)^2} dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{d(y^2+1)}{(y^2+1)^2} & v = -\frac{1}{2 \cdot (y^2+1)} \end{matrix} \right\} =$$

$$= -\frac{11y}{2 \cdot (y^2 + 1)} + \int \frac{11}{2 \cdot (y^2 + 1)} dy + C_1 = -\frac{11y}{2 \cdot (y^2 + 1)} + \frac{11}{2} \arctg(y) + C_2;$$

подставить результаты вычисления в исходный интеграл

$$-\frac{3}{2 \cdot (y^2 + 1)} - 11 \arctg(y) + -\frac{11y}{2 \cdot (y^2 + 1)} + \frac{11}{2} \arctg(y) + C_3 = -\frac{3 + 11y}{2 \cdot (y^2 + 1)} - \frac{11}{2} \cdot \arctg(y) + C_3;$$

перейти к исходной переменной x

$$-\frac{3 + 11y}{2 \cdot (y^2 + 1)} - \frac{11}{2} \cdot \arctg(y) + C_2 = -\frac{11x + 36}{2 \cdot (x^2 + 6x + 10)^2} - \frac{11}{2} \arctg(x + 3) + C_2;$$

$$\text{Ответ: } \int \frac{3x - 2}{(x^2 + 6x + 10)^2} dx = -\frac{11x + 36}{2 \cdot (x^2 + 6x + 10)^2} - \frac{11}{2} \arctg(x + 3) + C_2.$$

3.3. Интегрирование иррациональных функций

Определение. Иррациональной называют функцию вида

$$R\left(x, \sqrt[n]{\left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)}\right), \text{ где } a, b, c, d, n - \text{константы, } ad - bc \neq 0, n \in N.$$

Интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)}, \sqrt[m]{\left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)}, \dots\right) dx$ решается методом

интегрирования подстановкой $t = \sqrt[k]{\left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)}$, где k – наименьшее общее кратное показателей корней.

ПРИМЕР 8. Вычислить интеграл $\int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}} dx$.

Решение:

1. Подынтегральная функция является иррациональной функцией.

Сделать подстановку $t = \sqrt[6]{x}$ (6 – наименьшее общее кратное чисел 1, 3, 2).

2. Вычислить интеграл методом интегрирования подстановкой

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt[6]{x} \rightarrow t^6 = x \\ 6t^5 dt = dx \end{array} \right\} = \int \frac{t^3}{t^6 - t^4} \cdot 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^4}{t^2 - 1} dt.$$

3. Дробь является неправильной, выделить целую часть и многочлен

$$\frac{t^4}{t^2 - 1} = t^2 + 1 + \frac{1}{t^2 - 1}.$$

4. Вычислить интеграл полученной подынтегральной функции

$$6 \int \frac{t^4}{t^2 - 1} dt = 6 \int \left(t^2 + 1 + \frac{1}{t^2 - 1} \right) dt = 6 \int t^2 dt + 6 \int dt + 6 \int \frac{dt}{t^2 - 1} = 2t^3 + 6t - 3 \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C;$$

перейти к исходной переменной x

$$2t^3 + 6t - 3 \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} - 3 \ln \left| \frac{1+\sqrt[6]{x}}{1-\sqrt[6]{x}} \right| + C.$$

Ответ: $\int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}} dx = 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} - 3 \ln \left| \frac{1+\sqrt[6]{x}}{1-\sqrt[6]{x}} \right| + C.$

Интеграл вида $\int x^m \cdot (a + bx^n)^p dx$, где подынтегральная функция представляет собой дифференциальный бином, в котором m , n , p – рациональные числа, берется в случаях:

1) p – целое число. Интеграл вычисляется методом подстановки.

Подстановка $x = t^k$, где k – общий знаменатель дробей m , n .

ПРИМЕР 9. Вычислить интеграл $\int \sqrt{x} \cdot (1 + \sqrt{x})^3 dx = \int x^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + x^{\frac{1}{2}} \right)^3 dx.$

Решение:

1. В дифференциальном бинOME $m=0,5$, $n=0,5$, $p=3$ – первый случай.

2. Сделать подстановку $x = t^2$.

3. Вычислить интеграл методом интегрирования подстановкой

$$\int \sqrt{x} \cdot (1 + \sqrt{x})^3 dx = \left\{ x = t^2 \quad dx = 2t dt \quad x^{\frac{1}{2}} = t \right\} = \int t \cdot (1 + t)^3 \cdot 2t dt =$$

$$= 2 \int t^2 \cdot (1 + 3t + 3t^2 + t^3) dt = 2 \int (t^2 + 3t^3 + 3t^4 + t^5) dt = \frac{2}{3} t^3 + \frac{3}{2} t^4 + \frac{6}{5} t^5 + \frac{1}{3} t^6 + C;$$

перейти к исходной переменной x

$$\frac{2}{3} t^3 + \frac{3}{2} t^4 + \frac{6}{5} t^5 + \frac{1}{3} t^6 + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} x^2 + \frac{6}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3} x^3 + C.$$

Ответ: $\int \sqrt{x} \cdot (1 + \sqrt{x})^3 dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} x^2 + \frac{6}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3} x^3 + C.$

2) $\frac{m+1}{n}$ – целое число. Интеграл вычисляется методом подстановки.

Подстановка $a + bx^n = t^k$, где k – знаменатель числа p .

ПРИМЕР 10. Вычислить интеграл $\int x^5 \cdot \sqrt[3]{(1+x^3)^2} dx = \int x^5 \cdot (1+x^3)^{\frac{2}{3}} dx$.

Решение:

1. В дифференциальном бинOME $m=5$, $n=3$, $p=\frac{2}{3}$, следовательно,

$$\frac{m+1}{n} = 2 - \text{второй случай } (k=3).$$

2. Сделать подстановку $t^3 = 1 + x^3$.

3. Вычислить интеграл методом интегрирования подстановкой

$$\int x^5 \cdot \sqrt[3]{(1+x^3)^2} dx = \left\{ t^3 = 1 + x^3 \quad x = (t^3 - 1)^{\frac{1}{3}} \quad dx = t^2 \cdot (t^3 - 1)^{-\frac{2}{3}} dt \right\} =$$

$$= \int (t^3 - 1)^{\frac{5}{3}} \cdot t^{\frac{2}{3}} \cdot t^2 \cdot (t^3 - 1)^{-\frac{2}{3}} dt = \int t^4 \cdot (t^3 - 1) dt = \int (t^7 - t^4) dt = \frac{t^8}{8} - \frac{t^5}{5} + C;$$

перейти к исходной переменной x $\frac{t^8}{8} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{(1+x^3)^{\frac{8}{3}}}{8} - \frac{(1+x^3)^{\frac{5}{3}}}{5} + C.$

Ответ: $\int x^5 \cdot \sqrt[3]{(1+x^3)^2} dx = \frac{(1+x^3)^{\frac{8}{3}}}{8} - \frac{(1+x^3)^{\frac{5}{3}}}{5} + C.$

3) $\frac{m+1}{n} + p$ – целое число. Интеграл вычисляется методом подста-

новки. Подстановка $ax^{-n} + b = t^k$, где k – знаменатель числа p .

ПРИМЕР 11. Вычислить интеграл $\int \frac{1}{x^4 \cdot \sqrt{1+x^2}} dx = \int x^{-4} \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$.

Решение:

1. В дифференциальном бинOME $m = -4$, $n = 2$, $p = -1/2$, следовательно, $\frac{m+1}{n} + p = \frac{-4+1}{2} - \frac{1}{2} = -2$ – третий случай.

2. Сделать подстановку $t^2 = x^{-2} + 1$, следовательно, $x = (t^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$,
 $dx = -\frac{t}{(t^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} dt$.

3. Вычислить интеграл методом интегрирования подстановкой

$$\int x^{-4} \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \left\{ t^2 = x^{-2} + 1 \quad dx = -\frac{t}{(t^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} dt \right\} = -\int (t^2 - 1)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{t^2 - 1} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{t}{(t^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} dt = -\int (t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{t^2 - 1}{t^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot t dt = -\int (t^2 - 1) dt = t - \frac{t^3}{3} + C = t - \frac{t^3}{3} + C;$$

перейти к исходной переменной x

$$t - \frac{t^3}{3} + C = \sqrt{x^{-2} + 1} - \frac{\sqrt{(x^{-2} + 1)^3}}{3} + C = \frac{(2x^2 - 1) \cdot \sqrt{1+x^2}}{3x^3} + C.$$

Ответ: $\int \frac{1}{x^4 \cdot \sqrt{1+x^2}} dx = \frac{(2x^2 - 1) \cdot \sqrt{1+x^2}}{3x^3} + C.$

Интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$, где a, b, c – константы, можно вычислить двумя способами.

Первый способ:

1) квадратное уравнение имеет вещественные корни x_1 и x_2 ($x_1 \neq x_2$) и $a > 0$. Интеграл вычисляется методом подстановки. Для этого необходимо преобразовать квадратное уравнение $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)} =$

$= |x - x_1| \cdot \sqrt{a \frac{x - x_2}{x - x_1}}$ и сделать подстановку $t = \sqrt{a \frac{(x - x_2)}{(x - x_1)}}$, следовательно,

$$x = \frac{x_1 t^2 - a x_2}{t^2 - a};$$

2) квадратное уравнение имеет вещественные корни $x_1 = x_2$. Подынтегральное выражение преобразуется в рациональную функцию $\sqrt{ax^2 + bx + c} = |x - x_1| \cdot \sqrt{a}$;

3) квадратное уравнение не имеет вещественных корней $a > 0$. Интеграл вычисляется методом подстановки $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}$, следовательно, $x = \frac{t^2 - c}{b \mp 2t\sqrt{a}}$.

ПРИМЕР 12. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

Решение:

1. Квадратный трехчлен $x^2 + x + 1$ вещественных корней не имеет, $a > 0$, $c > 0$.

2. Сделать подстановку $\sqrt{x^2 + x + 1} = t - x$.

3. Вычислить интеграл методом интегрирования подстановкой

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}} &= \left\{ \sqrt{x^2 + x + 1} = t - x \quad x = \frac{t^2 + 1}{2t + 1} \quad dx = \frac{2(t^2 + t + 1)}{(2t + 1)^2} dt \right\} = \\ &= \int \frac{2t + 1}{t^2 - 1} \cdot \frac{2t + 1}{t^2 + t + 1} \cdot \frac{2(t^2 + t + 1)}{(2t + 1)^2} dt = 2 \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \text{Ln} \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| + C = \text{Ln} \left| \frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x + \sqrt{x^2 + x + 1} + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

Ответ: $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}} = \text{Ln} \left| \frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x + \sqrt{x^2 + x + 1} + 1} \right| + C.$

4) квадратное уравнение не имеет вещественных корней, $a < 0$, $c > 0$. Интеграл вычисляется методом подстановки $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$, следовательно, $x = \frac{b \mp 2\sqrt{ct}}{t^2 - a}$.

Второй способ вычисления интегралов вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$, где a, b, c – константы, рассмотрен ниже.

3.4. Интегрирование тригонометрических функций

Для неопределенных интегралов типа $\int R(\sin(x); \cos(x)) dx$ применяется метод универсальной тригонометрической подстановки. Универсальная тригонометрическая подстановка – $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ ($-\pi < x < \pi$), следовательно,

$$x = 2\operatorname{arctg}(t), \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

$$\text{В этом случае } \sin(x) = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Пример 13. Вычислить интеграл $\int \frac{1}{3 + \sin(x) + \cos(x)} dx$.

Решение:

1. Сделать универсальную тригонометрическую подстановку $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, тогда $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$, $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

2. Вычислить интеграл методом интегрирования подстановкой

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{3 + \sin(x) + \cos(x)} dx &= \left\{ t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt \right\} = \int \frac{1}{3 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \\ &= \int \frac{1}{t^2 + t + 2} dt = \int \frac{1}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} dt = \int \frac{d(t+0.5)}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t+0.5}{\sqrt{7}/2}\right) + C. \end{aligned}$$

Перейти к исходной переменной x

$$\frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t+0.5}{\sqrt{7}/2}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1+2\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{7}}\right) + C.$$

Ответ: $\int \frac{1}{3 + \sin(x) + \cos(x)} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{1 + 2 \operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{7}} \right) + C.$

Для неопределенных интегралов типа $\int R(\sin^m(x); \cos^n(x)) dx$ применяется метод подстановки и понижения степени.

1) подстановка $\sin(x) = t$, если n – целое положительное нечетное число, m – целое положительное четное число, тогда $dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$, $\cos(x) = \sqrt{1-t^2}$.

ПРИМЕР 14. Вычислить интеграл $\int \sin^2(x) \cdot \cos^3(x) dx$.

Решение:

1. $m = 2$, $n = 3$ – первый случай. Сделать тригонометрическую подстановку $\sin(x) = t$, тогда $dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$, $\cos(x) = \sqrt{1-t^2}$.

2. Вычислить интеграл методом интегрирования подстановкой

$$\begin{aligned} \int \sin^2(x) \cdot \cos^3(x) dx &= \left\{ \sin(x) = t \quad dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad \cos(x) = \sqrt{1-t^2} \right\} = \\ &= \int t^2 \cdot (1-t^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int t^2 \cdot (1-t^2) dt = \int (t^2 - t^4) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C; \end{aligned}$$

перейти к исходной переменной x

$$\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3(x)}{3} - \frac{\sin^5(x)}{5} + C.$$

Ответ: $\int \sin^2(x) \cdot \cos^3(x) dx = \frac{\sin^3(x)}{3} - \frac{\sin^5(x)}{5} + C.$

2) подстановка $\cos(x) = t$, если m – целое положительное нечетное число, n – целое положительное четное число, тогда $dx = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$, $\sin(x) = \sqrt{1-t^2}$.

ПРИМЕР 15. Вычислить интеграл $\int \sin(x) \cdot \cos^2(x) dx$.

Решение:

1. $m = 1$, $n = 2$ – второй случай. Сделать тригонометрическую подстановку $\cos(x) = t$, тогда $dx = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$, $\sin(x) = \sqrt{1-t^2}$.

2. Вычислить интеграл методом интегрирования подстановкой

$$\begin{aligned} \int \sin(x) \cdot \cos^2(x) dx &= \left\{ \cos(x) = t; \quad dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}; \quad \sin(x) = \sqrt{1-t^2} \right\} = \\ &= \int -\sqrt{1-t^2} \cdot t^2 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + C; \end{aligned}$$

перейти к исходной переменной x $-\frac{t^3}{3} + C = -\frac{\cos^3(x)}{3} + C$.

Ответ: $\int \sin(x) \cdot \cos^2(x) dx = -\frac{\cos^3(x)}{3} + C$.

3) подстановка $\operatorname{tg}(x) = t$, если $m + n$ – целое четное отрицательное число, тогда $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$, $\sin(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

ПРИМЕР 16. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{\cos(x) \cdot \sin^3(x)} = \int \cos^{-1}(x) \cdot \sin^{-3}(x) dx.$$

Решение:

1. $m = -3$, $n = -1$, $m + n = -3 - 1 = -4$ – третий случай. Сделать тригонометрическую подстановку $\operatorname{tg}(x) = t$, тогда $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$, $\sin(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

2. Вычислить интеграл методом интегрирования подстановкой

$$\int \frac{dx}{\cos(x) \cdot \sin^3(x)} = \int \cos^{-1}(x) \cdot \sin^{-3}(x) dx = \left\{ \sin(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}; \right.$$

$$\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \Bigg\} = \int \sqrt{1+t^2} \cdot \frac{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}{t^3 \cdot (1+t^2)} dt = \int \frac{1+t^2}{t^3} dt = -\frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C;$$

перейти к исходной переменной x

$$-\frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C = -\frac{1}{2 \cdot \operatorname{tg}^2(x)} + \ln|\operatorname{tg}(x)| + C = -\frac{\operatorname{ctg}^2(x)}{2} + \ln|\operatorname{tg}(x)| + C.$$

Ответ: $\int \frac{dx}{\cos(x) \cdot \sin^3(x)} = -\frac{\operatorname{ctg}^2(x)}{2} + \ln|\operatorname{tg}(x)| + C.$

4) формулы понижения порядка $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2},$

$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2},$ если m, n – целые неотрицательные четные числа.

ПРИМЕР 17. Вычислить интеграл $\int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) dx.$

Решение:

1. $m = 2, n = 2$ – четвертый случай.

2. Преобразовать подынтегральную функцию, используя тригонометрические формулы

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot \sin^2(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \cos(2x)}{2} = \frac{1}{8} \cdot (1 - \cos(2x)).$$

3. Вычислить интеграл

$$\begin{aligned} \int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) dx &= \int \frac{1}{8} \cdot (1 - \cos(2x)) dx = \\ &= \frac{1}{8} \cdot \int (1 - \cos(2x)) dx = \frac{1}{8} \cdot \left(x - \frac{\sin(2x)}{2} \right) + C = \frac{x}{8} - \frac{\sin(2x)}{16} + C. \end{aligned}$$

Ответ: $\int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin(2x)}{16} + C.$

Для неопределенных интегралов типа $\int R(\sin(ax); \cos(bx)) dx,$
 $\int R(\cos(ax); \cos(bx)) dx, \int R(\sin(ax); \sin(bx)) dx$ подынтегральная функция преобразуется, используя тригонометрические формулы:

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))}{2}$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))}{2}$$

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))}{2}$$

ПРИМЕР 18. Вычислить интеграл $\int \sin(3x)\cos(2x)dx$.

Решение:

1. Преобразовать подынтегральную функцию, используя тригонометрические формулы

$$\sin(3x) \cdot \cos(2x) = \frac{(\sin(x) + \sin(5x))}{2}.$$

2. Вычислить интеграл

$$\begin{aligned} \int \sin(3x)\cos(2x)dx &= \frac{1}{2} \cdot \int (\sin(x) + \sin(5x))dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int \sin(x)dx + \int \sin(5x)dx \right) = \frac{1}{2} \left(-\cos(x) - \frac{\cos(5x)}{5} \right) + C = -\frac{1}{2} \left(\cos(x) + \frac{\cos(5x)}{5} \right) + C. \end{aligned}$$

$$\textbf{Ответ:} \int \sin(3x)\cos(2x)dx = -\frac{1}{2} \cdot \left(\cos(x) + \frac{\cos(5x)}{5} \right) + C.$$

Для неопределенного интеграла $\int R(\operatorname{tg}(x))dx$ используется подстановка $t = \operatorname{tg}(x)$, следовательно, $x = \operatorname{arctg}(x)$, $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$.

ПРИМЕР 19. Вычислить интеграл $\int \operatorname{tg}^3(x)dx$.

Решение:

1. Сделать тригонометрическую подстановку $t = \operatorname{tg}(x)$, тогда

$$dx = \frac{1}{1+t^2} dt.$$

2. Вычислить интеграл методом интегрирования подстановкой

$$\begin{aligned}\int tg^3(x)dx &= \left\{ t = tg(x) \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \right\} = \int \frac{t^3}{1+t^2} dt = \int \left(t - \frac{t}{t^2+1} \right) dt = \int t dt - \int \frac{t}{t^2+1} dt = \\ &= \int t dt - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \ln|t^2+1| + C ;\end{aligned}$$

перейти к исходной переменной x

$$\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \ln|t^2+1| + C = \frac{tg^2(x)}{2} - \frac{\ln|tg^2(t)+1|}{2} + C .$$

3. Преобразовать полученный результат $\frac{tg^2(x)}{2} - \frac{\ln|tg^2(t)+1|}{2} + C =$

$$\begin{aligned}&= \frac{tg^2(x)}{2} - \frac{\ln|(\sin^2(x) + \cos^2(x))/\cos^2(x)|}{2} + C = \frac{tg^2(x)}{2} - \frac{\ln|\cos^{-2}(x)|}{2} + C = \frac{tg^2(x)}{2} - \\ &- \frac{\ln|\cos^{-2}(x)|}{2} + C = \frac{tg^2(x)}{2} + \ln\left|\frac{1}{\cos^2(x)}\right|^{\frac{1}{2}} + C = \frac{tg^2(x)}{2} + \ln|\cos(x)| + C .\end{aligned}$$

Ответ: $\int tg^3(x)dx = \frac{tg^2(x)}{2} + \ln|\cos(x)| + C .$

Для неопределенного интеграла $\int R(ctg(x))dx$ используется подстановка $t = ctg(x)$, следовательно, $dx = -\frac{1}{1+t^2} dt$.

ПРИМЕР 20. Вычислить интеграл $\int ctg^3(x)dx$.

Решение:

1. Сделать тригонометрическую подстановку $t = ctg(x)$, тогда

$$dx = -\frac{1}{1+t^2} dt .$$

2. Вычислить интеграл методом интегрирования подстановкой

$$\begin{aligned}\int ctg^3(x)dx &= \left\{ t = ctg(x) \quad dx = -\frac{dt}{1+t^2} \right\} = \int -\frac{t^3}{1+t^2} dt = -\int \left(t - \frac{t}{t^2+1} \right) dt = \\ &= -\int t dt + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} = -\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \ln|t^2+1| + C ;\end{aligned}$$

перейти к исходной переменной x

$$-\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \ln|t^2 + 1| + C = -\frac{ctg^2(x)}{2} + \frac{\ln|ctg^2(t) + 1|}{2} + C.$$

3. Преобразовать полученный результат

$$\begin{aligned} -\frac{ctg^2(x)}{2} + \frac{\ln|ctg^2(t) + 1|}{2} + C &= -\frac{ctg^2(x)}{2} + \frac{\ln|(\cos^2(x) + \sin^2(x))/\sin^2(x)|}{2} + C = \\ &= -\frac{ctg^2(x)}{2} + \ln|(\sin^{-2}(x))^{\frac{1}{2}}| + C = -\frac{ctg^2(x)}{2} - \ln|\sin(x)| + C. \end{aligned}$$

Ответ: $\int ctg^3(x)dx = -\frac{ctg^2(x)}{2} - \ln|\sin(x)| + C.$

Второй способ вычисления интегралов вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$.

Интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$, где a, b, c – константы можно вычислить, используя тригонометрические подстановки. Необходимо выделить под радикалом полный квадрат и сделать подстановку, $t = x + \frac{b}{2a}$.

Получится один из следующих интегралов: $\int R(t, \sqrt{t^2 + m^2})dt$, $\int R(t, \sqrt{t^2 - m^2})dt$, $\int R(t, \sqrt{m^2 - t^2})dt$.

Интеграл вида $\int R(t, \sqrt{t^2 + m^2})dt$, где m – константа вычисляется, используя тригонометрическую подстановку $t = m \cdot tg(z)$ или $t = m \cdot ctg(z)$.

Интеграл вида $\int R(t, \sqrt{t^2 - m^2})dt$, где m – константа вычисляется, используя тригонометрическую подстановку $t = \frac{m}{\cos(z)}$ или $t = \frac{m}{\sin(z)}$.

Интеграл вида $\int R(t, \sqrt{m^2 - t^2})dt$, где m – константа вычисляется, используя тригонометрическую подстановку $t = m \cdot \cos(z)$ или $t = m \cdot \sin(z)$.

4. «НЕБЕРУЩИЕСЯ» ИНТЕГРАЛЫ

Если интеграл не выражается через элементарные функции, то такой интеграл является «неберущимся». Примеры «неберущихся» интегралов:

$$\int e^{-x^2} dx, \int \frac{dx}{\ln(x)}, \int \cos(x^2) dx, \int \sin(x^2) dx, \int \frac{\sin(x)}{x} dx, \int \frac{\cos(x)}{x} dx, \int \frac{e^x}{x} dx.$$

Для приближенного вычисления этих неопределенных интегралов с любой степенью точности используются бесконечные ряды. Если интеграл является определенным на концах отрезка, то для его вычисления используются приближенные формулы, с помощью которых определенный интеграл вычисляется с любой степенью точности. Приближенное вычисление «неберущихся» интегралов будет рассмотрено в дальнейших разделах курса высшей математики.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные методы интегрирования позволяют во многих случаях вычислить неопределенный интеграл. Интегрирование часто может быть выполнено не единственным способом, так как для нахождения первообразной нет четкого алгоритма. Не всегда выбранный путь интегрирования является рациональным. Результат и скорость решения интеграла зависит от знания искусственных приемов интегрирования, от опыта решения. Кроме того, не у каждой элементарной функции существует первообразная, являющаяся элементарной функцией. Для того чтобы проверить, правильно ли вычислили интеграл, необходимо продифференцировать свой результат решения и получить исходную подынтегральную функцию.

ИНТЕГРАЛЫ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Вычислить неопределенные интегралы.

Вариант 1

$$\int (x^2 + 3x^3 - 5 \cos(x)) dx;$$

$$\int \frac{3}{2 - (2x+1)^2} dx;$$

$$\int \frac{3x}{x^2 + 4} dx;$$

$$\int (x^2 - x + 3) \cdot \sin(6x) dx;$$

$$\int e^x \cdot \sin(-2x) dx;$$

$$\int \sin(x) \cdot \cos(2x) dx;$$

$$\int \frac{1}{\sin(x)} dx;$$

$$\int \operatorname{tg}(2x+1) dx;$$

$$\int \cos^2(3x) - \sin(x) dx;$$

$$\int \sin^3(x) \cdot \cos^2(x) dx;$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 3x + 5} dx;$$

$$\int \frac{x^2 + x - 3}{(x-1) \cdot (x-2)} dx;$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx;$$

$$\int \sqrt{x} \cdot (2+3x)^2 dx.$$

Вариант 2

$$\int \left(\frac{7}{x} + 3 \sin(x) \right) dx;$$

$$\int \frac{18}{sh^2(4x+1)} dx;$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{2-x^4}} dx;$$

$$\int x \cdot \arccos(7x) dx;$$

$$\int e^x \cdot \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx;$$

$$\int \sin(x) \cdot \sin(2x) dx;$$

$$\int \frac{1}{5 \cdot \cos(x) + 3} dx;$$

$$\int \operatorname{ctg}(3x+1) dx;$$

$$\int \frac{1}{\sin^5(x) \cdot \cos(x)} dx;$$

$$\int \sin^4(2x) \cdot \cos^5(2x) dx;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx;$$

$$\int \frac{x^2 + x - 1}{(x-1)^2 \cdot (x-2)} dx;$$

$$\int \frac{1}{(\sqrt[3]{x} + \sqrt{x})} dx;$$

$$\int \frac{\sqrt{2-\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x^3}} dx.$$

Вариант 3

$$\int \left(\frac{9}{\cos^2(x)} + 5x - 1 \right) dx;$$

$$\int (3x-15)^3 dx;$$

$$\int e^{(\cos(x))} \sin(x) dx;$$

$$\begin{array}{lll}
\int \operatorname{arctg}(x-1) dx; & \int \sin^2\left(\frac{\ln x}{2}\right) dx; & \int \cos(x) \cdot \cos(2x) dx; \\
\int \frac{1}{\sin(x) + \cos(x)} dx; & \int \operatorname{tg}^3(2x) dx; & \int \sin^2(4x) dx; \\
\int \sin^2(x) \cdot \cos(x) dx; & \int \frac{x-2}{x^2-x-2} dx; & \int \frac{x^3+2x^2-x}{(x^2+3x+1) \cdot (x^2-6x+7)} dx; \\
\int \frac{1}{\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{(x+1)^3}} dx; & \int x^{\frac{5}{2}} \cdot (2-4\sqrt{x})^2 dx. &
\end{array}$$

Вариант 4

$$\begin{array}{lll}
\int \left(\frac{13}{\sqrt{x^2+9}} - x^3 \right) dx; & \int e^{(8x+13)} dx; & \int x^{2.5} \sqrt{x^3-8} dx; \\
\int (2x+1) \cdot \sin(4x) dx; & \int \cos(\ln(1-4x)) dx; & \int \sin(-x) \cdot \cos(-2x) dx; \\
\int \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)} dx; & \int \operatorname{ctg}(3x+1) dx; & \int \frac{1}{\sin^2(x) \cdot \sin(2x)} dx; \\
\int \sin^4(2x) \cdot \cos^3(2x) dx; & \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx; & \int \frac{x^2+x-8}{(x^2+3x+4) \cdot (x-1)} dx; \\
\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1} dx; & \int \frac{\sqrt{x}}{(2-3x)^2} dx. &
\end{array}$$

Вариант 5

$$\begin{array}{lll}
\int \left(\frac{10}{\sqrt{x^2-1}} + 2x^2 \right) dx; & \int \frac{-3}{\cos^2(2x+2)} dx; & \int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx; \\
\int \arcsin(2-3x) dx; & \int 3^{(4x)} \cdot \sin(2x) dx; & \int \sin(-x) \cdot \sin(-2x) dx; \\
\int \frac{\sin(x)}{1-\sin(x)} dx; & \int \operatorname{tg}(3x) dx; & \int \cos^2(2x) dx; \\
\int \sin^3(x) \cdot \cos^4(x) dx; & \int \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}} dx; & \int \frac{7x+8}{(x+1) \cdot (x+2)} dx;
\end{array}$$

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}} dx;$$

$$\int x^{\frac{5}{2}} \cdot \left(6+7x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}} dx.$$

Вариант 6

$$\int \left(3\cos(x) - \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right) dx;$$

$$\int \frac{-2}{\sin^2(4x-8)} dx;$$

$$\int \frac{1}{x \cdot (1+\ln(x))} dx;$$

$$\int (3x-1) \cdot \operatorname{arctg}(-2x) dx;$$

$$\int 4^{(3x)} \cdot \cos(5x) dx;$$

$$\int \sin(-x) \cdot \cos(-2x) dx;$$

$$\int \frac{1}{8-4 \cdot \sin(x)+7 \cdot \cos(x)} dx;$$

$$\int \operatorname{tg}(3x+4) dx;$$

$$\int \frac{\sin^2(x)}{\cos^6(x)} dx;$$

$$\int \sin^4(2x) \cdot \cos(2x) dx;$$

$$\int \frac{1}{x^2+3x+2} dx;$$

$$\int \frac{2x^2-x+2}{(x^2+x+1) \cdot (x+2)} dx;$$

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx;$$

$$\int x^{\frac{5}{2}} \cdot (3-x^2)^3 dx.$$

Вариант 7

$$\int \left(\frac{21}{x} + \frac{7}{49+x^2}\right) dx;$$

$$\int 3\operatorname{sh}(3x-1) dx;$$

$$\int e^{(2x^3-4)} \cdot x^2 dx;$$

$$\int x \cdot \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx;$$

$$\int \sin(\ln(2-8x)) dx;$$

$$\int \cos(2x) \cdot \cos(3x) dx;$$

$$\int \frac{1}{\cos(x)+2 \cdot \sin(x)+1} dx;$$

$$\int \operatorname{ctg}(3x-4) dx;$$

$$\int \sin^2(2x) dx;$$

$$\int \sin(x) \cdot \cos^4(x) dx;$$

$$\int \frac{4}{x^2-x-2} dx;$$

$$\int \frac{x^2+x+2}{(x+1)^2 \cdot (x+2)} dx;$$

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{2x+3}} dx;$$

$$\int x^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\left(-2+3x^{\frac{1}{2}}\right)} dx.$$

Вариант 8

$$\int \left(\frac{7}{49-x^2} + 2\cos(x)\right) dx;$$

$$\int \frac{5}{\sqrt{25+(3x-1)^2}} dx;$$

$$\int \sqrt{3+\cos(5x)} \cdot \sin(5x) dx;$$

$$\begin{array}{lll}
\int (-4x+3) \cdot \ln(8x) dx; & \int \cos^2\left(\frac{\ln(x)}{2}\right) dx; & \int \sin(2x) \cdot \sin(8x) dx; \\
\int \frac{1}{20 \cdot \sin(x) - 3 \cdot \cos(x)} dx; & \int \operatorname{tg}^4(x) dx; & \int \frac{1}{\sin(x) \cdot \cos^3(x)} dx; \\
\int \sin^2(2x) \cdot \cos^3(2x) dx; & \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx; & \int \frac{2x^2-3x+4}{(x^2+x+1) \cdot (x+1)} dx; \\
\int \frac{1}{x + \sqrt[3]{x^2}} dx; & \int x^{\frac{1}{4}} \cdot (4-2x)^{\frac{3}{4}} dx. &
\end{array}$$

Вариант 9

$$\begin{array}{lll}
\int (3e^x + 8x^2) dx; & \int \frac{1}{ch^2(8x)} dx; & \int \frac{\ln^3(x)}{x} dx; \\
\int (8x+1) \cdot \sin(-4x) dx; & \int 5^{(3x-1)} \cdot \sin(x) dx; & \int \sin(2x) \cdot \cos(8x) dx; \\
\int \frac{1}{5+3\sin(x)+2\cos(x)} dx; & \int ctg^4(x) dx; & \int \cos^2(x) + 2\sin^2(x) dx; \\
\int \cos^5(x) \cdot \sin^2(x) dx; & \int \frac{2+x}{x^2-3x+2} dx; & \int \frac{7x+8}{(x+2) \cdot (x+3)} dx; \\
\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x \cdot (x - \sqrt[3]{x})} dx; & \int \sqrt{x} \cdot (-2+x^2)^6 dx. &
\end{array}$$

Вариант 10

$$\begin{array}{lll}
\int \left(\frac{3}{\sin^2(x)} + 2 \right) dx; & \int \frac{2}{\sqrt{(x-4)^2-6}} dx; & \int \frac{3^{(\sqrt{x+1})}}{\sqrt{x+1}} dx; \\
\int (x-6x^2) \cdot \cos(3x) dx; & \int 6^{(2x+1)} \cdot \cos(x) dx; & \int \cos(-2x) \cdot \cos(8x) dx; \\
\int \frac{1}{2 \cdot \sin(x) + 3 \cdot \cos(x) - 5} dx; & \int \operatorname{tg}^4(2x) dx; & \int \frac{1}{\sin^5(x) \cdot \cos^3(x)} dx; \\
\int \sin^2(2x) \cdot \cos^5(2x) dx; & \int \frac{x}{x^2-5x+6} dx; & \int \frac{x^2+2x+3}{(x-6)^2 \cdot (x+1)} dx;
\end{array}$$

$$\int \frac{1}{(x+1)^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{1}{2}}} dx;$$

$$\int \sqrt{x} \cdot \left(3 - 4x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}} dx.$$

Вариант 11

$$\int (2sh(x) + 3e^x) dx;$$

$$\int 5^{(3x-1)} dx;$$

$$\int \frac{\cos(2x)}{\sin(x) \cdot \cos(x)} dx;$$

$$\int \arccos(1 - 6x) dx;$$

$$\int \sin(\ln(3x + 2)) dx;$$

$$\int \sin(-2x) \cdot \sin(-3x) dx;$$

$$\int \frac{1}{\cos(x)} dx;$$

$$\int ctg^4(2x) dx;$$

$$\int \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) dx;$$

$$\int \sin^4(x) \cdot \cos(x) dx;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{3x^2 + x + 3}} dx;$$

$$\int \frac{2x - 8}{(x + 2) \cdot (x - 3)} dx;$$

$$\int \frac{x - 1}{\sqrt{2x - 1}} dx;$$

$$\int x^{\frac{5}{2}} \cdot (-3 + 4x)^{\frac{3}{2}} dx.$$

Вариант 12

$$\int \left(2 \sin(x) + \frac{3}{x} + \frac{4}{ch^2(x)}\right) dx;$$

$$\int \frac{2}{sh^2(4x - 8)} dx;$$

$$\int e^{(-4x^2)} \cdot x dx;$$

$$\int \arcsin(2x) dx;$$

$$\int \cos(\ln(6x - 1)) dx;$$

$$\int \sin(-2x) \cdot \cos(-3x) dx;$$

$$\int \frac{1}{5 \cdot \sin(x) + 3} dx;$$

$$\int tg^2(4x - 2) dx;$$

$$\int \frac{1}{\sin^4(x) \cdot \cos^2(x)} dx;$$

$$\int \sin^2(2x) \cdot \cos(2x) dx;$$

$$\int \frac{3 - x}{x^2 + 3x + 2} dx;$$

$$\int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{(x^2 + 2x + 1) \cdot (x + 1)} dx;$$

$$\int \frac{1}{(2 - x)^2} \cdot \sqrt{\frac{2 - x}{2 + x}} dx;$$

$$\int \sqrt{x} \cdot (6 - x^2)^5 dx.$$

Вариант 13

$$\int \left(\frac{2}{3 - x^2} + ch(x)\right) dx;$$

$$\int \frac{4}{\sqrt{9 - (2x - 1)^2}} dx;$$

$$\int \frac{x^3}{x^8 + 1} dx;$$

$$\int \frac{x}{e^x} dx;$$

$$\int 2^{(-2x)} \sin(3x) dx;$$

$$\int \cos(3x) \cdot \cos(4x) dx;$$

$$\int \frac{1}{\sin(x) - \cos(x)} dx;$$

$$\int \operatorname{ctg}^2(5x + 3) dx;$$

$$\int \cos^2(3x - 1) dx;$$

$$\int \cos^3(x) \cdot \sin^4(x) dx;$$

$$\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx;$$

$$\int \frac{2x^3 + x + 1}{(x + 4) \cdot (x + 1)} dx;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2 \cdot (x+1)}} dx;$$

$$\int x^{\frac{3}{2}} \cdot (-6 + \sqrt{x})^2 dx.$$

Вариант 14

$$\int \left(\frac{1}{2\operatorname{sh}^2(x)} + 2\cos(x) - x^2 \right) dx;$$

$$\int \frac{2}{9 - (3x - 6)^2} dx;$$

$$\int \frac{\sin(\ln(x))}{x} dx;$$

$$\int x^3 \cdot e^{-\frac{x}{3}} dx;$$

$$\int e^{-3x} \cos(4x) dx;$$

$$\int \cos(4x) \cdot \sin(3x) dx;$$

$$\int \frac{\sin(x)}{1 + \sin(x)} dx;$$

$$\int \operatorname{tg}^3(2x + 1) dx;$$

$$\int \frac{1}{\cos^4(x) \cdot \sin^2(x)} dx;$$

$$\int \cos^4(2x) \cdot \sin(2x) dx;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2 - x + 2}} dx;$$

$$\int \frac{2x^3 - x^2 + 1}{(x^2 + 2x + 1) \cdot (x - 1)^2} dx;$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} dx;$$

$$\int \frac{(0.5 - x^2)^5}{x} dx.$$

Вариант 15

$$\int \left(x^6 - 3x^2 + \frac{2}{4 + x^2} \right) dx;$$

$$\int \cos\left(-\frac{x}{4}\right) dx;$$

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln(x)} dx;$$

$$\int (x^2 + 2x) \cdot \cos(x) dx;$$

$$\int \sin^2\left(\frac{\ln(x-2)}{2}\right) dx;$$

$$\int \cos(8x) \cdot \cos(4x) dx;$$

$$\int \frac{\cos(x)}{1 - \cos(x)} dx;$$

$$\int \operatorname{ctg}(-3x + 6) dx;$$

$$\int (\sin^2(6x) - \cos(2x)) dx;$$

$$\int \cos^5(x) \cdot \sin^4(x) dx;$$

$$\int \frac{3}{\sqrt{x^2 + 3x + 5}} dx;$$

$$\int \frac{2x^2 + 3x + 1}{(x + 4)^2 \cdot (x + 1)} dx;$$

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx;$$

$$\int x^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 dx.$$

Вариант 16

$$\int \left(\frac{2}{\cos^2(x)} + 3\operatorname{ch}(x) + 1 \right) dx;$$

$$\int \frac{7}{7x-10} dx;$$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx;$$

$$\int x \cdot (\operatorname{arctg}(x))^2 dx;$$

$$\int \cos^2 \left(\frac{\operatorname{Ln}(-2x)}{2} \right) dx;$$

$$\int \sin(-3x) \cdot \sin(-4x) dx;$$

$$\int \frac{1}{2 + \sin(x) + 3 \cdot \cos(x)} dx;$$

$$\int \operatorname{tg}(-7x+4) dx;$$

$$\int \frac{\cos^2(x)}{\sin^4(x)} dx;$$

$$\int \cos^4(2x) \cdot \sin^3(2x) dx;$$

$$\int \frac{2}{\sqrt{x^2-x-2}} dx;$$

$$\int \frac{x^2+16}{(x-6) \cdot (x+4) \cdot (x-3)} dx;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-2x} - \sqrt[4]{1-2x}} dx;$$

$$\int x^{\frac{1}{2}} \cdot (1-6x)^{-\frac{3}{2}} dx.$$

Вариант 17

$$\int \left(\frac{2}{\sqrt{2-x^2}} + 4^x \right) dx;$$

$$\int (2x-5)^{10} dx;$$

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx;$$

$$\int x^2 \cdot \operatorname{arctg}(3x) dx;$$

$$\int 8^{(2x-3)} \sin(2x+1) dx;$$

$$\int \sin(-3x) \cdot \sin(-4x) dx;$$

$$\int \frac{1}{\sin(x) - 2 \cdot \cos(x)} dx;$$

$$\int \operatorname{ctg}^2(8x+15) dx;$$

$$\int \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) dx;$$

$$\int \cos^2(x) \cdot \sin^5(x) dx;$$

$$\int \frac{3x-1}{3x^2+x+3} dx;$$

$$\int \frac{5x-5}{(x-7) \cdot (x+8)} dx;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^3 \cdot (x-2)}} dx;$$

$$\int \sqrt{x} \cdot \left(2 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^3 dx.$$

Вариант 18

$$\int \left(\frac{2}{\sqrt{x^2-8}} + 3x^6 + e^x \right) dx;$$

$$\int \cos(3x-2) dx;$$

$$\int \frac{x}{x^2+16} dx;$$

$$\int x^3 \cdot e^{-x^2} dx;$$

$$\int e^{(6x+8)} \cos(8-6x) dx;$$

$$\int \cos(-3x) \cdot \cos(-4x) dx;$$

$$\int \frac{\sin(x)+2}{\cos(x)+\sin(x)} dx;$$

$$\int tg^2(-4x-15) dx;$$

$$\int \frac{\sin^2(x)}{\cos^4(x)} dx;$$

$$\int \cos^2(2x) \cdot \sin^3(2x) dx;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-x-6}} dx;$$

$$\int \frac{-x^3+2x^3+3x+1}{(x^2+3x-6) \cdot (x-7)^2} dx;$$

$$\int \frac{1}{(1-x) \cdot \sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$\int \sqrt{x} \cdot \left(-4 + \frac{7}{x}\right)^3 dx.$$

Вариант 19

$$\int \left(\frac{2}{ch^2(x)} + \frac{3}{\sqrt{x^2+3}} \right) dx;$$

$$\int e^{(2x+1)} dx;$$

$$\int \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$\int x \cdot \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx;$$

$$\int \sin(\ln(4x)) dx;$$

$$\int \cos(5x) \cdot \sin(4x) dx;$$

$$\int \frac{\cos(x)+1}{\cos(x)-\sin(x)} dx;$$

$$\int \frac{1}{tg^2(-2x-17)} dx;$$

$$\int \sin^2(8x) dx;$$

$$\int \cos^4(x) \cdot \sin^5(x) dx;$$

$$\int \frac{3-x}{x^2+5x+6} dx;$$

$$\int \frac{x^3-x+3}{(x-7)^2 \cdot (x+8)} dx;$$

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt{2x+1}} dx;$$

$$\int \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{x^2+1}} dx.$$

Вариант 20

$$\int \left(\frac{6}{\sin^2(x)} + 4\cos(x) - x^9 \right) dx;$$

$$\int \frac{-10}{36+(5x-4)^2} dx;$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^6}} dx;$$

$$\int \frac{\ln^2(x)}{x} dx;$$

$$\int \cos(\ln(2x)) dx;$$

$$\int \cos(4x) \cdot \sin(5x) dx;$$

$$\int \frac{2 \cdot \sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)} dx;$$

$$\int \frac{1}{ctg(-2x+9)} dx;$$

$$\int \frac{1}{\sin^4(x) \cdot \cos^4(x)} dx;$$

$$\int \cos^6(x) \cdot \sin^5(x) dx;$$

$$\int \frac{1}{2x^2-x+2} dx;$$

$$\int \frac{2x^2+7x-1}{(x^2+3x-6) \cdot (x+8)} dx;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}}} dx;$$

$$\int x \cdot (x-2)^{\frac{5}{2}} dx.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для студентов втузов. – Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М.: Оникс, 2008. – 816 с.: ил.
2. Демидович, Б. П. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Б. П. Демидович, Г. С. Бараненков, В. А. Ефименко и др.; под ред. Б. П. Демидовича. – М.: Астрель, 2008 г. – 495 с.: ил.
3. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике. I курс: с контрольными работами / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. – 9-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 576 с.: ил.
4. Минорский, В. П. Сборник задач по высшей математике: учебное пособие для вузов / В. П. Минорский. – М.: изд-во физико-математической литературы, 2006. – 336 с.
5. Письменный, Д. Т. Тридцать пять лекций: в 2 ч. – Ч. 1 / Д. Т. Письменный. – 9-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 288 с.: ил.
6. <http://novsu.ru/file/21443>.
7. <http://persona-center.ru/2009/03/26/hnnlncg-snibc-inlsyinyousn-ubpbsya-u-uyoei-nu-nin.html>.
8. <http://primmat.ru/>