

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САХАЛИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. Г. ЛАЗАРЕВА

МАТЕМАТИКА

ЧАСТЬ I

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано УМО РАЕ по классическому университетскому и техническому образованию в качестве учебно-методического пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям: 130500 – «Нефтегазовое дело», 190601 – «Автомобили и автомобильное хозяйство», 270800 – «Строительство», 010400 – «Прикладная математика и информатика»

Южно-Сахалинск
Издательство СахГУ
2012

УДК 51(075.8)
ББК22.1я73
Л 17

Печатается по решению учебно-методического совета
Сахалинского государственного университета, 2011 г.

Рецензент: К. М. Федоров, профессор, доктор физико-математических наук.

Лазарева, В. Г.

Л 17

Математика. Часть I : учебно-методическое пособие / В. Г. Лазарева. –
Южно-Сахалинск : изд-во СахГУ, 2012. – 288 с.

ISBN 978-5-88811-401-8

Учебно-методическое пособие представляет собой комплекс основополагающих результатов теории и практики (представлены алгоритмы решения типовых задач, примеры решения задач, материалы для самоконтроля студентов). Полученные знания позволяют использовать приобретенную совокупность знаний, умений и навыков в смежных дисциплинах.

Рекомендовано студентам различных специальностей вузов, изучающих математику, для подготовки к практическим занятиям и экзаменам по курсам «Линейная алгебра», «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия», «Комплексные числа», «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл».

Соответствует государственному стандарту высшего профессионального образования по математике.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73



© Сахалинский государственный
университет, 2012
© Лазарева В. Г., 2012

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	7
Содержание лекционного курса.....	8
ГЛАВА I. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ.....	12
1. Матрицы.....	13
1.1. Матрицы. Основные понятия.....	13
1.2. Основные операции над матрицами и их свойства.....	17
1.3. Элементарные преобразования матриц.....	22
2. Определители.....	23
2.1. Основные понятия.....	23
2.2. Свойства определителей.....	28
3. Невырожденные матрицы.....	29
3.1. Основные понятия. Обратная матрица.....	29
3.2. Ранг матрицы. Свойства ранга матрицы.....	32
4. Задания для контроля по теме «Матрицы, действия над ними, определители, обратная матрица, ранг матрицы».....	35
5. Системы линейных алгебраических уравнений.....	48
5.1. Основные понятия.....	48
5.2. Решение системы линейных алгебраических уравнений.....	51
5.2.1. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.....	56
5.2.2. Решение систем линейных алгебраических уравнений матричным методом.....	59
5.2.3. Решение систем линейных алгебраических уравнений по формуле Крамера.....	62
6. Вопросы для самопроверки по главе «Элементы линейной алгебры».....	64
7. Задания для контроля по теме «Системы линейных уравнений».....	65
ГЛАВА II. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ.....	79
1. Векторы.....	80
1.1. Основные понятия.....	80
1.2. Линейные операции над векторами.....	81
1.3. Разложение вектора по ортам.....	84
1.3.1. Разложение вектора по ортам в плоскости.....	84
1.3.2. Разложение вектора по ортам в пространстве.....	85

1.4.	Действия над векторами.....	87
1.5.	Скалярное произведение векторов, его свойства, выражение скалярного произведения векторов через координаты и проекции.....	88
1.6.	Векторное произведение векторов, его свойства, выражение векторного произведения через координаты векторов.....	90
1.7.	Смешанное произведение векторов, его свойства. Выражение смешанного произведения векторов через их координаты.....	92
1.8.	Некоторые приложения скалярного, векторного и смешанного произведения векторов.....	94
2.	Вопросы для самопроверки по главе «Элементы векторной алгебры».....	95
3.	Самостоятельная работа по главе «Векторная алгебра».....	96
ГЛАВА III. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ.....		112
1.	Системы координат.....	113
1.1.	Декартова (прямоугольная) система координат.....	113
1.2.	Полярная система координат.....	114
1.3.	Связь между координатами прямоугольной и полярной систем координат.....	115
1.4.	Преобразование систем координат.....	117
2.	Уравнение плоскости в пространстве.....	119
2.1.	Общее уравнение плоскости в пространстве.....	119
2.2.	Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору. Нормальное уравнение плоскости.....	121
2.3.	Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.....	123
2.4.	Уравнение плоскости в отрезках на осях.....	124
2.5.	Расстояние от точки до плоскости.....	125
2.6.	Угол между плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.....	127
3.	Уравнение прямой.....	130
3.1.	Формы записи уравнения прямой на плоскости.....	130
3.2.	Уравнение прямой в пространстве. Уравнение прямой в векторной форме.....	134
3.3.	Параметрическое и каноническое уравнение прямой.....	135
3.4.	Уравнение прямой, проходящей через две точки.....	138
3.5.	Общее уравнение прямой в пространстве.....	139

3.6.	Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.....	140
3.7.	Условие принадлежности двух прямых одной плоскости..	141
3.8.	Расстояние между двумя точками в пространстве.....	142
3.9.	Деление отрезка в заданном соотношении.....	143
3.10.	Расстояние от точки до прямой.....	145
4.	Прямая и плоскость в пространстве.....	146
4.1.	Угол между прямой и плоскостью.....	146
4.2.	Пересечение прямой с плоскостью. Условие принадлежности прямой плоскости.....	148
5.	Кривые второго порядка на плоскости.....	148
6.	Поверхности второго порядка.....	154
6.1.	Цилиндрические поверхности второго порядка.....	154
6.2.	Поверхности вращения. Конические поверхности.....	156
6.3.	Канонические уравнения поверхностей второго порядка..	157
7.	Вопросы для самопроверки по главе «Аналитическая геометрия»..	160
8.	Контрольная работа по главе «Аналитическая геометрия».....	162
ГЛАВА IV. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.....		195
1.	Понятие и представление комплексных чисел.....	195
1.1.	Основные понятия.....	195
1.2.	Комплексная плоскость.....	196
1.3.	Формы записи комплексных чисел.....	199
2.	Алгебраические операции над комплексными числами.....	200
3.	Решение алгебраических уравнений в комплексной области.....	202
4.	Вопросы для самопроверки по главе «Комплексные числа».....	202
5.	Задания для самостоятельного решения.....	203
ГЛАВА V. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.....		210
1.	Неопределенный интеграл и первообразная.....	210
1.1.	Определения.....	210
1.2.	Свойства неопределенных интегралов.....	212
1.3.	Таблица основных неопределенных интегралов.....	212
2.	Основные методы вычисления неопределенного интеграла.....	214
2.1.	Метод непосредственного интегрирования в неопределенном интеграле.....	215
2.2.	Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной) в неопределенном интеграле.....	216
2.3.	Метод интегрирования по частям неопределенного интеграла.....	217

3.	Интегрирование некоторых классов элементарных функций.....	221
3.1.	Интегрирование дробей, содержащих квадратный трех- член.....	221
3.2.	Интегрирование рациональной функции в неопределен- ном интеграле.....	224
3.3.	Интегрирование иррациональных функций.....	231
3.4.	Интегрирование тригонометрических функций.....	235
4.	«Неберущиеся» интегралы.....	240
5.	Вопросы для самопроверки по главе «Неопределенный инте- грал».....	241
6.	Задания для контроля по главе «Неопределенный инте- грал».....	242
ГЛАВА VI. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.....		249
1.	Понятие определенного интеграла. Свойства определенного ин- теграла.....	249
2.	Геометрический и физический смысл определенного интеграла...	252
3.	Формула Ньютона–Лейбница.....	253
4.	Методы вычисления определенного интеграла.....	254
5.	Несобственные интегралы.....	257
6.	Геометрические и физические приложения определенного ин- теграла.....	262
7.	Приближенное вычисление определенного интеграла.....	268
7.1.	Формула прямоугольников.....	269
7.2.	Формула трапеций.....	270
7.3.	Формула парабол (Симпсона).....	271
8.	Вопросы для самопроверки по главе «Определенный интеграл»...	274
9.	Задания для контроля по главе «Определенный интеграл».....	275
Список литературы.....		287

ВВЕДЕНИЕ

Пособие предназначено для студентов различных специальностей, изучающих высшую математику в вузе в разном объеме, и для преподавателей.

Учебно-методическое пособие состоит из введения, шести глав («Элементы линейной алгебры», «Элементы векторной алгебры», «Аналитическая геометрия», «Комплексные числа», «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл») и списка рекомендуемой литературы.

Для изучения материала необходимы базовые знания школьной программы по курсу «Математика». Знания, полученные в разделе курса «Высшая математика», необходимы студентам для успешного изучения других дисциплин в вузе.

Пособие написано таким образом, чтобы студенты могли самостоятельно изучать курс, подготавливаться к практическим занятиям. В начале каждой главы сформулированы цели, задачи и что должен знать студент после изучения главы. Также в каждой главе приведены основополагающие результаты теории, алгоритмы и решения типовых задач, набор вопросов для самопроверки, контрольные и самостоятельные работы.

В результате изучения темы у студентов развивается логическое и алгоритмическое мышление, они овладевают методами исследования и решения математических задач, вырабатывается умение самостоятельно расширять свои математические знания, проводить анализ прикладных задач, принимать рациональные решения.

СОДЕРЖАНИЕ ЛЕКЦИОННОГО КУРСА

ГЛАВА I. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Матрицы, основные понятия, действия над ними и их свойства. Элементарные преобразования матриц.

Определители. Основные понятия. Свойства определителей. Вычисление определителей первого, второго, третьего порядков, их свойства. Алгебраические дополнения и миноры. Вычисление определителей n -го порядка. Вычисление определителей различными способами.

Невырожденные матрицы. Основные понятия, понятие обратной матрицы. Ранг матрицы. Способы вычисления ранга матрицы.

Системы линейных алгебраических уравнений. Основные понятия. Исследование систем линейных уравнений. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса, по формулам Крамера, матричным способом.

ГЛАВА II. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Векторы, основные понятия. Линейные операции над векторами и их свойства. Разложение вектора по ортам в плоскости и пространстве. Направляющие косинусы и длина вектора. Понятие о векторных диаграммах в науке и технике. Скалярное произведение векторов и его свойства. Угол между векторами. Выражение скалярного произведения векторов через координаты векторов и проекции.

Векторное произведение двух векторов, его свойства. Выражение векторного произведения векторов через координаты. Геометрический смысл векторного произведения векторов. Условие коллинеарности двух векторов.

Смешанное произведение трех векторов, его свойства. Выражение смешанного произведения векторов через координаты векторов. Геометрический смысл смешанного произведения векторов.

Приложения скалярного, векторного и смешанного произведения векторов.

Понятие линейного (векторного) пространства. Вектор как элемент линейного пространства. Отображения линейных пространств. Линейные отображения (операторы), их матрицы. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.

ГЛАВА III. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Системы координат. Декартова (прямоугольная) система координат, полярная система координат на плоскости. Построение кривых в полярных

координатах. Цилиндрические и сферические координаты в пространстве. Различные способы задания линий и поверхностей в пространстве. Связь между координатами прямоугольной и полярной системы координат. Преобразование систем координат.

Уравнение плоскости в пространстве. Виды уравнения плоскости в пространстве. Расстояние от точки до плоскости. Угол между плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.

Уравнение линии на плоскости. Различные формы уравнения прямой на плоскости и в пространстве. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых. Условие принадлежности двух прямых одной плоскости. Расстояние между двумя точками в пространстве. Деление отрезка в заданном соотношении. Расстояние от точки до прямой.

Взаимное расположение плоскостей, прямых, плоскости и прямой в пространстве. Угол между прямой и плоскостью в пространстве. Пересечение прямой с плоскостью. Условие принадлежности прямой плоскости.

Кривые второго порядка на плоскости. Окружность, эллипс, гипербола, парабола. Определение, вывод уравнений, свойства, построение. Технические приложения геометрических свойств кривых.

Уравнение поверхности в пространстве. Цилиндрические поверхности. Поверхности вращения, конические поверхности. Конические уравнения поверхности второго порядка. Сфера, конус, эллипсоид, гиперболоид, параболоид. Построение поверхностей методом сечений, их свойства.

ГЛАВА IV. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Комплексные числа. Основные понятия, алгебраические операции над комплексными числами и их свойства. Изображение комплексных чисел на плоскости. Комплексная плоскость. Модуль и аргумент комплексного числа. Формы записи комплексного числа. Возведение комплексного числа в степень с натуральным показателем и извлечение корней из комплексных чисел. Решение алгебраических уравнений в комплексной области.

ГЛАВА V. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Свойства, таблица основных неопределенных интегралов. Основные методы вычисления неопределенного интеграла: метод непосредственного интегрирования, метод интегрирования подстановкой (заменой переменной), метод интегрирования по частям. Интегрирование некоторых классов элементарных функций. «Неберущиеся» интегралы.

ГЛАВА VI. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Понятие определенного интеграла. Определение определенного интеграла, свойства. Геометрический и физический смысл определенного интеграла.

Формула Ньютона–Лейбница. Методы вычисления определенного интеграла. Интегрирование четных и нечетных функций. Несобственные интегралы, их свойства. Приложение определенного интеграла к решению задач механики и физики. Геометрические и физические приложения определенного интеграла.

Приближенное вычисление определенного интеграла по формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона.

Тематика практических занятий

№ темы	Название практического занятия
1	Элементы линейной алгебры
2	Элементы векторной алгебры
3	Аналитическая геометрия
4	Комплексные числа
5	Неопределенный интеграл
6	Определенный интеграл

При решении задач необходимо составить алгоритм решения (он приводится в разделах по соответствующей теме), обосновывать каждый этап решения исходя из теоретических знаний. Если существует несколько способов решения задачи, то необходимо сравнить их и выбрать рациональный. Решение задач и примеров необходимо излагать подробно, выполнять вспомогательные вычисления, отделяя их от основных. В конце решения нужно сделать проверку и записать ответ.

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТА

Методические рекомендации по отдельным видам самостоятельной работы

Самостоятельная работа студентов занимает важное место в освоении курса и в основном заключается:

- в изучении лекционного материала;
- в подготовке к практическим занятиям, включая решение задач, рекомендуемых преподавателем в качестве домашних упражнений;
- в подготовке к самостоятельным, контрольным работам;
- в подготовке к коллоквиуму;
- в подготовке к экзамену.

Предусматривается дополнительное изучение отдельных разделов и тем дисциплин.

Указания по самостоятельному изучению теоретической части дисциплины

При изучении дисциплины большая роль отводится самостоятельной работе студентов. Студент должен:

- детально изучать рекомендуемую литературу;
- подготавливаться к семинарам;
- самостоятельно решать приведенные в учебно-методическом пособии задачи;
- отвечать на сформулированные в конце каждой главы вопросы;
- осуществлять самоконтроль с помощью тестов.

Для изучения дисциплины требуются знания школьной программы математики.

Самостоятельная работа по данному курсу в основном заключается в подготовке к практическим занятиям и изучении лекционного материала. Контроль за выполнением этой части самостоятельной работы осуществляется на коллоквиуме, перед практическими занятиями. Кроме того, предусмотрено выполнение студентами контрольных работ с последующим анализом решений задач.

После изучения темы и решения задач по ней студенту рекомендуется ответить на теоретические вопросы, приведенные в конце тем, воспроизвести определения, выводы формул, формулировки и доказательства теорем.

ГЛАВА I

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Цели

Иметь представление о:

- матрицах и действиях над ними;
- элементарных преобразованиях матриц;
- определителе матрицы и его свойствах;
- ранге матрицы;
- невырожденной и вырожденной матрице;
- обратной матрице;
- системах линейных алгебраических уравнений, их исследований и решений различными методами.

Знать:

- действия над матрицами;
- элементарные преобразования матрицы;
- правило треугольника;
- вычисление определителя матрицы разложением по строке или столбцу;
- свойства определителей;
- алгоритм нахождения обратной матрицы;
- алгоритмы нахождения ранга матрицы;
- алгоритм исследования системы линейных алгебраических уравнений;
- алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера;
- алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса;
- алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений матричным методом.

Уметь:

Находить сумму, разность, произведение матриц, обратную и транспонированную матрицу. Вычислять определитель матрицы любого порядка, ранг матрицы. Исследовать и решать систему линейных алгебраических уравнений различными способами.

1. МАТРИЦЫ

1.1. Матрицы. Основные понятия

Рассмотрим таблицы из чисел, называемых матрицами. А также основные операции над ними, их свойства, определители, ранг. Примером матрицы является таблица Пифагора.

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк одинаковой длины и n столбцов одинаковой длины.

Математическая запись матрицы:

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \text{где } \begin{matrix} i = \overline{1, m}; \\ j = \overline{1, n}. \end{matrix} \quad (1.1)$$

числа m и n называются порядками матрицы.

Элементами матрицы (a_{ij}) называются числа, входящие в ее состав.

Индекс i – номер строки;

индекс j – номер столбца.

Способы записи матриц: $A = \|a_{ij}\| = (a_{ij}) = [a_{ij}]$.

ПРИМЕРЫ МАТРИЦ: $A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B_{1 \times 3} = (1 \ 3 \ 2)$.

Матрица A порядка 2×2 и содержит четыре элемента. Матрица B порядка 1×3 и содержит три элемента.

Матрица A n порядка, у которой число строк равно числу столбцов, называется квадратной ($m = n$).

Математическая запись квадратной матрицы:

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{где } n = \overline{1, n}. \quad (1.2)$$

ПРИМЕРЫ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ:

$$A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad C = (-5).$$

Соответственно квадратные матрицы 2, 3 и 1 порядка.

Квадратная матрица A n порядка (1.2) называется симметричной, если $a_{ij} = a_{ji}$.

ПРИМЕР СИММЕТРИЧНОЙ МАТРИЦЫ: $B_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 0 \\ 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Главной диагональю матрицы A (1.2) называется диагональ $a_{11} \ a_{22} \ \dots \ a_{nn}$, идущая из левого верхнего угла этой матрицы в правый нижний ее угол.

Побочной диагональю матрицы A (1.2) называется диагональ $a_{n1} \ a_{(n-1)2} \ \dots \ a_{1n}$, идущая из левого нижнего угла в правый верхний.

Квадратная матрица A (1.2), у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется диагональной.

Математическая запись диагональной матрицы: $A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots a_{nn} \end{pmatrix}$.

ПРИМЕРЫ ДИАГОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ:

$$B_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}.$$

Диагональная матрица A , у которой все элементы главной диагонали равны единице, называется единичной матрицей и обозначается буквой E .

Математическая запись диагональной матрицы: $E_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix}$.

ПРИМЕРЫ ЕДИНИЧНЫХ МАТРИЦ:

$$E_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица, все элементы которой равны 0, называется нулевой матрицей и обозначается буквой O .

Математическая запись нулевой матрицы: $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0...0 \\ 0 & 0 & 0...0 \\ \\ 0 & 0 & 0...0 \end{pmatrix}$.

Противоположной матрице A (1.1) называется матрица $-A$, все элементы которой противоположны элементам матрицы A .

Если $A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$, то $-A_{m \times n} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \dots -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} \dots -a_{2n} \\ \dots & \dots \\ -a_{m1} & -a_{m2} \dots -a_{mn} \end{pmatrix}$.

ПРИМЕР ПРОТИВОПОЛОЖНОЙ МАТРИЦЫ:

Если матрица $B_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, то противоположная матрица равна $-B_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ -3 & -4 & -2 \end{bmatrix}$.

Квадратная матрица называется треугольной, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

ПРИМЕРЫ ТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица размера $m \times n$ называется *трапециoidalной*, если она имеет

[illegible]

Матрица, содержащая одну строку или один столбец, называется вектором (или вектор-строка, вектор-столбец соответственно).

Математическая запись матрицы вектора: $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$, $B = (b_1 \quad b_2 \dots b_n)$.

ПРИМЕРЫ МАТРИЦ ВЕКТОРОВ: $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$.

Матрица, полученная из данной матрицы A (1.1) заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей, транспонированной к данной, и обозначается A^T .

Математическая запись транспонированной матрицы:

$$\text{Если } A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ где } \begin{matrix} i = \overline{1, m} \\ j = \overline{1, n} \end{matrix}, \text{ то } A_{m \times n}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \dots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \dots a_{m2} \\ \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} \dots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР.

$$\text{Даны матрицы: } A_{2 \times 5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad B_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 10 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}. \text{ Найти: } A^T, B^T, C^T.$$

РЕШЕНИЕ:

$$\text{Если } A_{2 \times 5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \text{ то } A_{5 \times 2}^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \\ 3 & 8 \\ 4 & 9 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Если } B_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ то } B_{3 \times 3}^T = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Если } C_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 10 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \text{ то } C_{2 \times 3}^T = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -3 \\ 2 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{ОТВЕТ: } A_{5 \times 2}^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \\ 3 & 8 \\ 4 & 9 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}, B_{3 \times 3}^T = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, C_{2 \times 3}^T = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -3 \\ 2 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Свойство транспонированной матрицы: $(A^T)^T = A$.

Матрица A называется равной матрице B , если эти матрицы имеют одинаковые порядки и все их соответствующие элементы совпадают.

ПРИМЕР РАВНЫХ МАТРИЦ:

Если $A_{2 \times 5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$, $B_{2 \times 5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$, тогда $A = B$.

1.2. Основные операции над матрицами и их свойства

1. Операция сложения (вычитания).

Суммой (разностью) двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$, где $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ одних и тех же порядков m и n , называется матрица $C = (c_{ij})$, где $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ тех же порядков m и n , элементы которой равны $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$), где $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

ПРИМЕР.

Даны матрицы: $A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$, $C_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$,

$D_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$, $K_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 10 \\ 4 & 7 & 9 \\ 1 & 9 & 0 \end{pmatrix}$, $L_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 \\ 1 & -2 & -4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. Вычислить:

$G_{2 \times 2} = A_{2 \times 2} + B_{2 \times 2}$, $Z_{2 \times 2} = C_{2 \times 2} - D_{2 \times 2}$, $Q_{3 \times 3} = K_{3 \times 3} - L_{3 \times 3}$.

РЕШЕНИЕ:

Так как пары матрицы A и B , C и D , K и L одного порядка, то можно вычислить их сумму или разность.

$$G_{2 \times 2} = A_{2 \times 2} + B_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{элементы первой матрицы} \\ \text{суммируем с соответствующими} \\ \text{элементами второй матрицы} \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1+5 & 2+7 \\ 3+6 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 12 \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned}
Z_{2 \times 2} &= C_{2 \times 2} - D_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{находим разность между} \\ \text{соответствующими элементами} \\ \text{первой и второй матрицы} \end{array} \right\} = \\
&= \begin{bmatrix} 2-1 & 3-2 \\ 7-6 & 5-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \\
Q_{3 \times 3} &= K_{3 \times 3} - L_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 10 \\ 4 & 7 & 9 \\ 1 & 9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 \\ 1 & -2 & -4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{элементы первой матрицы} \\ \text{суммируем с соответствующими} \\ \text{элементами второй матрицы} \end{array} \right\} = \\
&= \begin{pmatrix} 3+2 & -1+6 & 10+(-5) \\ 4+1 & 7+(-2) & 9+(-4) \\ 1+4 & 9+(-4) & 0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}. \\
\text{ОТВЕТ: } G_{2 \times 2} &= \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}, \quad Z_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Свойства операции сложения:

1⁰. Коммутативность $A + B = B + A$.

2⁰. Ассоциативность $(A + B) + C = A + (B + C)$.

3⁰. Согласованность с операцией сложения чисел
 $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$.

4⁰. Дистрибутивность умножения числового множителя относительно сложения матриц

$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B.$$

5⁰. Согласованность с операцией умножения чисел
 $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$.

6⁰. $(A + B)^T = A^T + B^T$.

7⁰. Существует нулевая матрица $A + O = A$.

8⁰. Существует противоположная матрица $A - A = O$,

где α, β – числа; A, B, C, O – матрицы.

ПРИМЕР.

Даны матрицы: $A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, $B_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $C_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$,

$K_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $L_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$. Вычислить: $7 \cdot A$, $M = 2 \cdot K - 3 \cdot L$,
 $D = 3 \cdot B + 5 \cdot C$.

РЕШЕНИЕ:

Каждый элемент матрицы умножаем на множитель константу

$$7 \cdot A = 7 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{каждый элемент} \\ \text{матрицы умножаем на } 7 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 7 \cdot 2 & 7 \cdot 4 & 7 \cdot 6 \\ 7 \cdot 1 & 7 \cdot 3 & 7 \cdot 5 \\ 7 \cdot (-3) & 7 \cdot 4 & 7 \cdot 7 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 28 & 42 \\ 7 & 21 & 35 \\ -21 & 28 & 49 \end{bmatrix};$$

$$M_{2 \times 2} = 2 \cdot K_{2 \times 2} - 3 \cdot L_{2 \times 2} = 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{каждый элемент матрицы умножаем} \\ \text{на соответствующий числовой} \\ \text{множитель} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \cdot 3 & 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 5 & 3 \cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ 15 & 3 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{находим разность между} \\ \text{соответствующими элементами} \\ \text{первой и второй матрицы} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} -2-9 & 2-(-6) \\ 4-15 & 0-3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -11 & 8 \\ -11 & -3 \end{bmatrix};$$

$$D_{3 \times 3} = 3 \cdot B_{3 \times 3} + 5 \cdot C_{3 \times 3} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + 5 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{каждый элемент матрицы умножаем} \\ \text{на соответствующий числовой} \\ \text{множитель} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 7 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \cdot 2 & 5 \cdot 1 & 5 \cdot 1 \\ 5 \cdot 2 & 5 \cdot 3 & 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 3 & 5 \cdot 3 & 5 \cdot 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 15 & 21 \\ 3 & 3 & -3 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 10 & 15 & 10 \\ 15 & 15 & 20 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{элементы первой матрицы суммируем} \\ \text{с соответствующими элементами} \\ \text{второй матрицы} \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6+10 & 15+5 & 21+5 \\ 3+10 & 3+15 & -3+10 \\ 3+15 & 6+15 & 6+20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 20 & 26 \\ 13 & 18 & 7 \\ 18 & 21 & 26 \end{bmatrix}.$$

ОТВЕТ:

$$7 \cdot A = \begin{bmatrix} 14 & 28 & 42 \\ 7 & 21 & 35 \\ -21 & 28 & 49 \end{bmatrix}, M_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -11 & 8 \\ -11 & -3 \end{bmatrix}, D_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 16 & 20 & 26 \\ 13 & 18 & 7 \\ 18 & 21 & 26 \end{bmatrix}.$$

2. Операция произведения.

Произведением матрицы $A_{m \times n} = (a_{ij}), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, имеющей порядки, соответственно равные m и n , на матрицу $B_{n \times p} = (b_{ij}), i = \overline{1, n}; j = \overline{1, p}$, имеющую порядки, соответственно равные n и p , называется матрица $C_{m \times p} = (c_{ij}), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, p}$, имеющая порядки соответственно m и p и элементы c_{ij} , определяемые формулой, $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, p}$.

$$C_{m \times p} = A_{m \times n} \cdot B_{n \times p}.$$

Свойства операции произведения:

1⁰. Ассоциативность матриц $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

2⁰. Дистрибутивность умножения матриц относительно сложения

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

3⁰. Согласованность с операцией умножения матриц

$$\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B.$$

4⁰. $E \cdot A = A \cdot E = A$.

5⁰. $O \cdot A = A \cdot O = O$.

6⁰. $(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$.

7⁰. Некоммутативны $A \cdot B \neq B \cdot A$,

где α – число, A, B, C, O, E – матрицы.

Для любой квадратной матрицы A существует единичная матрица того же порядка, что и матрица A .

ПРИМЕР.

Даны матрицы $A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, $C_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}$,

$D_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Найти произведение матриц: $A \cdot B$, $K = B \cdot C$, $M = C \cdot D$.

РЕШЕНИЕ:

1. Произведение двух матриц можно вычислить, если количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй матрицы.

Матрица $A_{2 \times 3}$ порядка 2×3 имеет две строки и три столбца, матрица $B_{2 \times 2}$ второго порядка имеет две строки и два столбца. Следовательно, количество столбцов матрицы A не равно количеству строк матрицы B ($3 \neq 2$), значит, произведения матриц $A \cdot B$ не существует.

Матрицы $B_{2 \times 2}$ и $C_{2 \times 2}$ второго порядка, т. е. количество столбцов матрицы B равно количеству строк матрицы C ($2 = 2$), следовательно, произведение матриц $B \cdot C$ существует. Вычислить произведение матриц $B \cdot C$.

$K = B \cdot C = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$. При нахождении произведения

матриц, чтобы не допустить ошибки в вычислениях, необходимо вычислить каждый элемент новой матрицы отдельно. Первый индекс элемента новой матрицы – k_{11} , указывает, какую строку необходимо взять из матрицы B , второй индекс – k_{11} , элемента новой матрицы, указывает, какой столбец необходимо взять из второй матрицы и вычислить сумму произведения этих элементов. Т. е. для вычисления элемента k_{11} необходимо элементы первой строки матрицы B умножить на элементы первого столбца матрицы C и найти сумму полученных произведений, для вычисления элемента k_{12} необходимо элементы первой строки матрицы B умножить на элементы второго столбца матрицы C и найти сумму полученных чисел и т. д.

Схема вычисления элемента k_{12} :  (сумма произведения

элементов первой строки и второго столбца).

$$k_{11} = b_{11} \cdot c_{11} + b_{12} \cdot c_{21} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0,5 = 0 + 1 = 1 \quad (\text{вычисляем сумму произведения элементов первой строки матрицы } B \text{ и первого столбца матрицы } C);$$

$$k_{12} = b_{11} \cdot c_{12} + b_{12} \cdot c_{22} = 1 \cdot (-0,5) + 2 \cdot 0,25 = -0,5 + 0,5 = 0 \quad (\text{вычисляем сумму произведения элементов первой строки матрицы } B \text{ и второго столбца матрицы } C);$$

$$k_{21} = b_{21} \cdot c_{11} + b_{22} \cdot c_{21} = -2 \cdot 0 + 0 \cdot 0,5 = 0 + 0 = 0 \quad (\text{вычисляем сумму произведения элементов второй строки матрицы } B \text{ и первого столбца матрицы } C);$$

$$k_{22} = b_{21} \cdot c_{12} + b_{22} \cdot c_{22} = -2 \cdot (-0,5) + 0 \cdot 0,2 = 1 + 0 = 1 \quad (\text{вычисляем сумму произведения элементов второй строки матрицы } B \text{ и второго столбца матрицы } C), \text{ следовательно,}$$

$$K_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -0,5 \\ 0,5 & 0,25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица $C_{2 \times 2}$ второго порядка (количество столбцов равно двум), матрица $D_{2 \times 1}$ порядка 2×1 (количество строк равно двум). Так как количество столбцов матрицы $C_{2 \times 2}$ равно количеству строк матрицы $D_{2 \times 1}$, произведение матриц $C \cdot D$ существует. Вычислить произведение матриц

$$M_{2 \times 1} = C_{2 \times 2} \cdot D_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{bmatrix}.$$

$$m_{11} = c_{11} \cdot d_{11} + c_{12} \cdot d_{21} = 0 \cdot 1 + (-0,5) \cdot (-2) = 0 + 1 = 1 \quad (\text{сумма произведения элементов первой строки матрицы } C \text{ и первого столбца матрицы } D);$$

$$m_{21} = c_{21} \cdot d_{11} + c_{22} \cdot d_{21} = 0,5 \cdot 1 + 0,25 \cdot (-2) = 0,5 - 0,5 = 0 \quad (\text{сумма произведения элементов второй строки матрицы } C \text{ и первого столбца матрицы } D), \text{ следовательно,}$$

$$M_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 & -0,5 \\ 0,5 & 0,25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

ОТВЕТ: Произведения матриц $A \cdot B$ не существует, $K_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$M_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1.3. Элементарные преобразования матриц

Две матрицы A и B называются эквивалентными, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований.

Математическая запись: $A \sim B$.

Элементарными преобразованиями матриц являются:

1. Перестановка местами двух параллельных рядов матриц.
2. Умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля.
3. Прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов ряда, умноженных на одно и то же число.

Используя элементарные преобразования, любую матрицу можно привести к матрице, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы – нули. Такую матрицу называют канонической матрицей.

ПРИМЕР.

Привести к каноническому виду матрицу $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

РЕШЕНИЕ:

Выполним элементарные преобразования. Введем условные обозначения. Номер строки запишем в квадратные скобки – $[]$, а номер столбца будем записывать в круглых скобках – $()$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} [2] + [1] \\ [3] - 5 \cdot [1] \end{array} \right\} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & -15 & -9 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \cdot [3] \\ (2) - 2 \cdot (1) \\ (3) - 3 \cdot (1) \\ (4) - 2 \cdot (1) \end{array} \right\} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [3] - [2] \\ \frac{1}{2} \cdot (2) \\ \frac{1}{5} \cdot (3) \\ \frac{1}{3} \cdot (4) \end{array} \right\} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} (3) - (2) \\ (4) - (2) \end{array} \right\} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ОТВЕТ: Канонический вид матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

2.1. Основные понятия

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу A порядка n (1.2).

Каждой квадратной матрице соответствует численная характеристика, называемая определителем или детерминант.

Обозначение определителя: $\det A$, $|A|$, ΔA , где A – матрица.

Определитель первого порядка ($n=1$).

Если $n=1$, то матрица состоит из одного элемента a_{11} . Определителем первого порядка, соответствующим этой матрице, является величина этого элемента.

$$n=1 \quad A = (a_{11}) \rightarrow \det A = a_{11}.$$

Определитель второго порядка ($n=2$).

$$\text{Если } n=2, \text{ то матрица } A \text{ (1.2) имеет вид: } A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Определитель второго порядка, соответствующий матрице (1.3), равен разности произведения элементов, стоящих на главной диагонали этой матрицы, и произведения элементов, стоящих на побочной ее диагонали $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

$$\text{Схема вычисления определителя второго порядка: } \begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix}$$

ПРИМЕР.

$$\text{Вычислить определитель матриц: } B = (3), \quad A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix},$$

$$C_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ:

Матрица B первого порядка, следовательно, $\det B = 3$.

Матрица A второго порядка, следовательно,

$$\det A = \begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = \cos(x) \cdot \cos(x) - [(-\sin(x)) \cdot \sin(x)] = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

Матрица C второго порядка, следовательно,

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - (3 \cdot (-1)) = 2 + 3 = 5.$$

ОТВЕТ: $\det B = 3$, $\det A = 1$, $\det C = 5$.

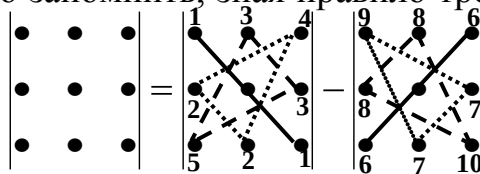
Определитель третьего порядка ($n = 3$).

Если $n = 3$, то матрица A (1.2) имеет вид: $A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ и

определитель удобно вычислить по формуле:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - \\ - (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}).$$

Эту формулу легко запомнить, зная правило треугольника. Схема правила треугольника.



Суть правила треугольника:

1. Перемножаем элементы главной диагонали (линия 1–1).
2. Относительно главной диагонали отступаем вниз и получаем линию 2–2, это основание равнобедренного треугольника. Ищем вершину равнобедренного треугольника (т. 4) и соединяем ее с основанием. Перемножаем все элементы равнобедренного треугольника (три элемента).
3. Относительно главной диагонали отступаем вверх и получаем линию 3–3, это основание второго равнобедренного треугольника. Ищем вершину равнобедренного треугольника (т. 5) и соединяем ее с основанием. Перемножаем все элементы равнобедренного треугольника (три элемента).
4. Вычисляем сумму полученных произведений (элементов главной диагонали и двух равнобедренных треугольников).
5. Ставим знак минус и в скобках выполняем аналогичные действия для побочной диагонали (пункты 6–8).
6. Перемножаем элементы побочной диагонали (линия 6–6).
7. Относительно побочной диагонали отступаем вниз и получаем линию 7–7, это основание равнобедренного треугольника. Ищем вершину рав-

нобедренного треугольника (т. 9) и соединяем ее с основанием. Перемножаем все элементы равнобедренного треугольника (три элемента).

8. Относительно побочной диагонали отступаем вверх и получаем линию 8–8, это основание второго равнобедренного треугольника. Ищем вершину равнобедренного треугольника (т. 10) и соединяем ее с основанием. Перемножаем все элементы равнобедренного треугольника (три элемента).

9. Вычисляем сумму полученных произведений (элементов побочной диагонали и двух равнобедренных треугольников).

10. Из результата пункта 4 вычисляем результат пункта 9.

Таким образом, видно, что мы получаем вначале диагональ и два равнобедренных треугольника и в конце диагональ и два равнобедренных треугольника. После находим разность.

ПРИМЕР.

Вычислить определитель матрицы $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, используя правило

треугольника.

РЕШЕНИЕ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 - \\ - [6 \cdot 1 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \cdot (-4) + 3 \cdot (-2) \cdot (-3)] = -15 + 48 + 0 - (6 + 0 + 18) = 9.$$

ОТВЕТ: $\det A = 9$.

Определитель n порядка.

Минором любого элемента a_{ij} матрицы n порядка называется определитель $(n-1)$ порядка, полученный из исходного путем вычеркивания i строки и j столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент.

Математическая запись: $M = m_{ij}$.

ПРИМЕР.

Дан определитель матрицы $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$. Написать миноры данной

матрицы.

РЕШЕНИЕ:

m_{11} получаем путем вычеркивания первой строки и первого столбца из определителя матрицы $A - m_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$;

m_{12} получаем путем вычеркивания первой строки и второго столбца из определителя матрицы $A - m_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$;

m_{13} получаем путем вычеркивания первой строки и третьего столбца из определителя матрицы $A - m_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$;

m_{21} получаем путем вычеркивания второй строки и первого столбца из определителя матрицы $A - m_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$;

m_{22} получаем путем вычеркивания второй строки и второго столбца из определителя матрицы $A - m_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$;

m_{23} получаем путем вычеркивания второй строки и третьего столбца из определителя матрицы $A - m_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$;

m_{31} получаем путем вычеркивания третьей строки и первого столбца из определителя матрицы $A - m_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$;

m_{32} получаем путем вычеркивания третьей строки и второго столбца из определителя матрицы $A - m_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$;

m_{33} получаем путем вычеркивания третьей строки и третьего столбца из определителя матрицы $A - m_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

ОТВЕТ: $m_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$; $m_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$; $m_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$; $m_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$; $m_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$;
 $m_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$; $m_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$; $m_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$; $m_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком «+», если сумма $i + j$ четная, и со знаком «-», если сумма $i + j$ нечетная.

Математическая запись: A_{ij} .

Формула вычисления алгебраического дополнения $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot m_{ij}$.

ПРИМЕР.

Разложить определитель матрицы $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ третьего порядка по

первой строке, по третьему столбцу.

РЕШЕНИЕ:

По первой строке:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

По третьему столбцу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33} = a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{23} \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

ОТВЕТ: Определитель матрицы третьего порядка по первой строке

равен $-\Delta = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$, определитель матрицы

третьего порядка по третьему столбцу равен $-\Delta = a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$

Замечание. Вне зависимости от того, по какому ряду раскладывать определитель, численный результат будет один и тот же. Обычно выбирают ряд, где есть нулевые элементы, так как соответствующие им слагаемые в разложении будут равны нулю. Если такого ряда нет, то выбирают ряд, элементы которого по модулю наименьшие.

ПРИМЕР.

Вычислить определитель матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & 5 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$

РЕШЕНИЕ:

1. Выберем ряды, где есть нулевые элементы. В данной матрице это первый, третий столбцы и вторая, третья строки. Наименьшие элементы по модулю из перечисленных рядов содержатся в первом столбце.

2. Разложим определитель четвертого порядка по первому столбцу.

$$\begin{vmatrix} 2 \cdot (a_{11}) & 5 & 7 & 5 \\ -1 \cdot (a_{21}) & 3 & 0 & 1 \\ 0 \cdot (a_{31}) & 5 & 3 & 2 \\ 1 \cdot (a_{41}) & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + \\ + 0 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + \\ + 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 37 - 49 + 0 - 23 = 2.$$

ОТВЕТ: $\det A = 2$.

Теорема об определителе произведения двух матриц.

Произведение определителя двух матриц равно произведению определителей этих матриц.

Математическая запись $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

2.2. Свойства определителей

1⁰. Определитель не изменится, если все его строки заменить столбцами и наоборот $|A| = |A^T|$.

2⁰. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак на противоположный.

3⁰. Определитель, имеющий два одинаковых ряда, равен нулю.

4⁰. Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно вынести за знак определителя.

5⁰. Если все элементы ряда равны нулю, то определитель равен нулю.

6⁰. Определитель, содержащий два пропорциональных ряда, равен нулю.

7⁰. Если одна из строк определителя есть линейная комбинация его других строк, то определитель равен нулю.

8⁰. Определитель не меняется, если к элементам одного из его рядов прибавляются соответствующие элементы другого ряда, умноженные на одно и то же число.

9⁰. Если все элементы i строки определителя n порядка представлены в виде суммы двух слагаемых $a_{ij} = b_j + c_j$, $j = \overline{1, n}$, то определитель равен

сумме двух определителей, у которых все строки такие же, как и в заданном определителе, а i строка в первом определителе состоит из b_j , во втором c_j .

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \dots & b_n + c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

3. НЕВЫРОЖДЕННЫЕ МАТРИЦЫ

3.1. Основные понятия. Обратная матрица

Квадратная матрица A (1.2) называется невырожденной, если ее определитель не равен нулю.

Математическая запись $\det A \neq 0$.

Квадратная матрица A (1.2) называется вырожденной, если ее определитель равен нулю.

Математическая запись $\det A = 0$.

Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A , если выполняется условие $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E — единичная матрица. Обратная матрица имеет размерность исходной матрицы.

Матрицей, союзной к матрице A (1.2), называется матрица A^* .

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \dots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \dots A_{n2} \\ \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} \dots A_{nn} \end{bmatrix},$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} к данной матрице A .

Теорема. Всякая невырожденная матрица имеет обратную матрицу.

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\Delta A}$$

Свойства обратной матрицы:

$$1^0. \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

$$2^0. (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

$$3^0. (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

Алгоритм вычисления обратной матрицы:

1. Проверить, является матрица вырожденной ($\det A = 0$) или невырожденной ($\det A \neq 0$).

2. Если матрица невырожденная, то вычислить алгебраические дополнения A_{ij} и записать союзную матрицу A^* .

3. Записать обратную матрицу $\left(A^{-1} = \frac{A^*}{\Delta A} \right)$.

4. Выполнить проверку $A \cdot A^{-1} = E$.

5. Записать ответ.

ПРИМЕР.

Вычислить матрицу, обратную к матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

РЕШЕНИЕ:

1. Проверим, является матрица вырожденной или невырожденной.

$\det A = 2 \cdot 1 - ((-1) \cdot 3) = 2 + 3 = 5 \neq 0$, следовательно, матрица невырожденная.

2. Вычислим алгебраические дополнения и запишем союзную матрицу.

Алгебраические дополнения – $A_{11} = 1$, $A_{21} = -3$, $A_{12} = 1$, $A_{22} = 2$.

Союзная матрица – $A^* = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

3. Вычислим обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\Delta A} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.6 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

4. Проверка

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.2 & -0.6 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} & 2 \cdot \frac{-3}{5} + 3 \cdot \frac{2}{5} \\ -1 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{1}{5} & -1 \cdot \frac{-3}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{3}{5} & -\frac{6}{5} + \frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5} + \frac{1}{5} & \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

$$\text{ОТВЕТ: } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР.

Вычислим матрицу, обратную к матрице $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$.

РЕШЕНИЕ:

1. Проверим, является матрица вырожденной или невырожденной.

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = (1 \cdot (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 5 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) \cdot 4) - (4 \cdot (-1) \cdot 1 + 5 \cdot (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 3) =$$

$$= (-3 + 10 + 0) - (-4 - 10 + 0) = 7 + 14 = 21 \neq 0, \text{ следовательно, матрица невырожденная.}$$

2. Вычислим алгебраические дополнения и запишем союзную матрицу.

Алгебраические дополнения:

$$B_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 10 = 7;$$

$$B_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(6 + 8) = -14;$$

$$B_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 4 = 14;$$

$$B_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -(-5) = 5;$$

$$B_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1;$$

$$B_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -5;$$

$$B_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1;$$

$$B_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-2 - 2) = 4;$$

$$B_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

$$\text{Союзная матрица} - B^* = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ -14 & -1 & 4 \\ 14 & -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Вычислим обратную матрицу

$$B^{-1} = \frac{B^*}{\Delta B} = \frac{1}{21} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ -14 & -1 & 4 \\ 14 & -5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{21} & \frac{5}{21} & \frac{1}{21} \\ -\frac{14}{21} & -\frac{1}{21} & \frac{4}{21} \\ \frac{14}{21} & -\frac{5}{21} & -\frac{1}{21} \end{bmatrix}.$$

4. Проверка

$$B \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{7}{21} & \frac{5}{21} & \frac{1}{21} \\ -\frac{14}{21} & -\frac{1}{21} & \frac{4}{21} \\ \frac{14}{21} & -\frac{5}{21} & -\frac{1}{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{21} + \frac{14}{21} \\ 2 \cdot \frac{7}{21} + (-1) \cdot \frac{-14}{21} + (-2) \cdot \frac{14}{21} \\ 4 \cdot \frac{7}{21} + 5 \cdot \frac{-14}{21} + 3 \cdot \frac{14}{21} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{21} - \frac{5}{21} & \frac{1}{21} - \frac{1}{21} \\ 2 \cdot \frac{5}{21} + (-1) \cdot \frac{-1}{21} + (-2) \cdot \frac{-5}{21} & 2 \cdot \frac{1}{21} + (-1) \cdot \frac{4}{21} + (-2) \cdot \frac{-1}{21} \\ 4 \cdot \frac{5}{21} + 5 \cdot \frac{-1}{21} + 3 \cdot \frac{-5}{21} & 4 \cdot \frac{1}{21} + 5 \cdot \frac{4}{21} + 3 \cdot \frac{-1}{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E;$$

$$\text{ОТВЕТ: } B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{21} & \frac{5}{21} & \frac{1}{21} \\ -\frac{14}{21} & -\frac{1}{21} & \frac{4}{21} \\ \frac{14}{21} & -\frac{5}{21} & -\frac{1}{21} \end{bmatrix}.$$

3.2. Ранг матрицы. Свойства ранга матрицы

Наибольший из порядков миноров матрицы (1.1), не равный нулю, называется рангом матрицы.

Математические формы записи ранга матрицы: r , $r(A)$, $\text{rang}(A)$.

Ранг матрицы изменяется в диапазоне $0 \leq r \leq \min(m; n)$.

Рассмотрим матрицу (1.1) $A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Выделим k строк и k

столбцов $k \leq \min(m; n)$. Получаем набор миноров. Всего их $C_m^k \cdot C_n^k$. $\max M = r$.

Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется базисным.

Матрица может иметь несколько базисных миноров.

Свойства ранга матрицы:

1⁰. При транспонировании ранг матрицы не изменяется.

2⁰. Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.

3⁰. Ранг матрицы не изменится при элементарных преобразованиях матрицы.

4⁰. Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ее ненулевых строк.

Ранг матрицы можно вычислить двумя способами: методом элементарных преобразований и методом окаймляющих миноров.

Суть метода элементарных преобразований.

1. С помощью элементарных преобразований привести матрицу к трапецеидальному виду.

2. Количество ненулевых строк трапецеидальной матрицы равно рангу матрицы.

Суть метода окаймляющих миноров.

1. Найти минор M_1 первого порядка, не равный нулю. Если такого минора нет, то ранг матрицы равен нулю.

2. Вычислить миноры второго порядка, которые окаймляют выбранный минор M_1 первого порядка.

3. Если среди вычисленных миноров второго порядка имеется отличный от нуля минор, то вычислить все миноры третьего порядка, окаймляющие его. Продолжать вычисления до тех пор, пока все миноры, окаймляющие ненулевой минор k -го порядка, не будут равны нулю. В этом случае ранг матрицы равен k .

При вычислении ранга матрицы таким методом достаточно на каждом шаге найти один ненулевой минор k -го порядка, причем искать его среди миноров, содержащих минор $M_{k-1} \neq 0$.

ПРИМЕР.

Записать миноры матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 & 0 \\ 9 & 7 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

РЕШЕНИЕ:

Матрица A порядка 3×4 имеет миноры первого, второго и третьего порядков. Минором первого порядка является любой элемент матрицы. Матрица имеет двенадцать миноров первого порядка: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 0, 9, 7, 5. Возьмем любой минор первого порядка, не равный нулю, и найдем все окаймляющие миноры второго порядка для него. Пусть $M_1 = 6$, тогда окайм-

ляющие миноры второго порядка будут: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 9 & 7 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$ (схема-

тично $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 & 0 \\ 9 & 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}$). Теперь для любого минора второго порядка, например

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}, \text{ запишем окаймляющие миноры третьего порядка: } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 8 \\ 9 & 7 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 0 \\ 7 & 1 & 5 \end{vmatrix} \text{ (схематично } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 & 0 \\ 9 & 7 & 1 & 5 \end{vmatrix} \text{)}.$$

ОТВЕТ: Миноры матрицы A : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 0, 9, 7, 5, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$,

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 9 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 8 \\ 9 & 7 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 0 \\ 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}. \text{ Это часть миноров матрица } A.$$

ПРИМЕР.

Вычислить ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ двумя способами.

РЕШЕНИЕ:

Матрица A порядка 4×4 , следовательно, ее ранг заключен в диапазоне $0 \leq r \leq 4$.

Метод элементарных преобразований.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{cases} 3 \cdot [2] - 2 \cdot [1] \\ 3 \cdot [3] - 4 \cdot [1] \\ 3 \cdot [4] - 7 \cdot [1] \end{cases} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 19 & -20 \\ 0 & 17 & -19 & 20 \\ 0 & -34 & 38 & -40 \end{bmatrix} \begin{cases} [3] - 17 \cdot [2] \\ [4] + 2 \cdot [3] \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 19 & -20 \\ 0 & 0 & -342 & 360 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{[3] \div 6\} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 19 & -20 \\ 0 & 0 & -57 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Количество ненулевых строк}$$

трапецидальной матрицы равно трем, следовательно, $\text{rang}(A) = 3$.

Метод окаймляющих миноров.

Выберем минор первого порядка, не равный нулю. Пусть $M_1 = 11$. Вычислим миноры второго порядка, которые окаймляют выбранный минор:

$$\begin{vmatrix} 11 & -13 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -15, \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = -85, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} = 10, \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 11 & -13 \end{vmatrix} = -72. \text{ Из миноров второго}$$

порядка выберем минор, не равный нулю, и вычислим окаймляющие миноры

ры третьего порядка. Так как миноры второго порядка все не равны нулю, то можно выбрать любой минор второго порядка. Возьмем минор $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 11 & -13 \end{vmatrix}$, то-

гда окаймляющие миноры третьего порядка для него будут:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 11 & -13 \end{vmatrix} = -114, \quad \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 11 & -13 & 16 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -390. \text{ Так как миноры третьего порядка не}$$

равны нулю, то необходимо взять любой из них, например $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 11 & -13 \end{vmatrix}$, и вы-

числить для него окаймляющий минор четвертого порядка

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0. \text{ Так как } M_4 = 0, \text{ следовательно, } \text{rang}(A) = 3.$$

ОТВЕТ: $\text{rang}(A) = 3$.

4. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЯ ПО ТЕМЕ «МАТРИЦЫ, ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, ОБРАТНАЯ МАТРИЦА, РАНГ МАТРИЦЫ»

ВАРИАНТ № 1

1. Вычислить $2 \cdot A - B$, если $A = \begin{bmatrix} 28 & 30 \\ 29 & 31 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 55 & 60 \\ 58 & 61 \end{bmatrix}$.

2. Вычислить $A \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$.

3. Вычислить обратную и транспонированную матрицу для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Вычислить определитель и ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

ВАРИАНТ № 2

1. Вычислить $2 \cdot A - 3 \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 32 & 34 \\ 33 & 35 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 22 & 23 \\ 21 & 24 \end{bmatrix}$.

2. Вычислить $A \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 9 & -11 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$.

3. Вычислить обратную и транспонированную матрицу для матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Вычислить определитель и ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

ВАРИАНТ № 3

1. Вычислить $3 \cdot A - B$, если $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -7 & -5 & 9 \end{bmatrix}$.

2. Вычислить $A \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -9 & 11 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 11 & -4 \\ -9 & 13 \end{bmatrix}$.

3. Вычислить обратную и транспонированную матрицу для матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & -7 \end{bmatrix}$.

4. Вычислить определитель и ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

ВАРИАНТ № 4

1. Вычислить $2 \cdot A - B$, если $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -4 & 13 & 2 \\ -3 & 0 & 9 \end{bmatrix}$.

2. Вычислить $A \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -9 & 13 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -9 & 15 \end{bmatrix}$.

3. Вычислить обратную и транспонированную матрицу для матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & -1 \end{bmatrix}$.

4. Вычислить определитель и ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

ВАРИАНТ № 5

1. Вычислить $A - 0,5 \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 36 & 38 \\ 38 & 39 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 66 & 76 \\ 76 & 72 \end{bmatrix}$.

2. Вычислить $A \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 9 & 11 \\ 10 & 12 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -9 & 9 \end{bmatrix}$.

3. Вычислить обратную и транспонированную матрицу для матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

4. Вычислить определитель и ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

ВАРИАНТ № 6

1. Вычислить $3 \cdot A - 2 \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 6 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$.

2. Вычислить $A \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ -9 & 9 \\ 1 & -9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -9 & 11 \end{bmatrix}$.

3. Вычислить обратную и транспонированную матрицу для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Вычислить определитель и ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$.

ВАРИАНТ № 7

1. Вычислить $5 \cdot A + B$, если $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 3 & 9 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -40 & -4 \\ -15 & -44 & -10 \\ -16 & -35 & -14 \end{bmatrix}$.

2. Вычислить $A \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -9 & 15 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -9 & 13 \end{bmatrix}$.

3. Вычислить обратную и транспонированную матрицу для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

4. Вычислить определитель и ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

ВАРИАНТ № 8

1. Вычислить $A - 3 \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 18 & 36 \\ 33 & 30 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$.

2. Вычислить $A \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ -7 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$.

3. Вычислить обратную и транспонированную матрицу для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

4. Вычислить определитель и ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

ВАРИАНТ № 9

1. Вычислить $2 \cdot A - B$, если $A = \begin{bmatrix} 29 & 35 \\ 20 & 32 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 29 & 20 \\ 20 & 37 \end{bmatrix}$.

2. Вычислить $A \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -7 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -7 & 10 \end{bmatrix}$.

3. Вычислить обратную и транспонированную матрицу для матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 4 \end{bmatrix}$.

4. Вычислить определитель и ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

ВАРИАНТ № 10

1. Вычислить $2 \cdot A - B$, если $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -9 & 2 \\ 0 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$.

2. Вычислить $A \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -7 & 10 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -7 & 9 \end{bmatrix}$.

3. Вычислить обратную и транспонированную матрицу для матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$.

4. Вычислить определитель и ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

ВАРИАНТ № 11

1. Вычислить $A + 3 \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 7 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$.

2. Вычислить $A \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -7 & 13 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 9 \end{bmatrix}$.

3. Вычислить обратную и транспонированную матрицу для матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

4. Вычислить определитель и ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

ВАРИАНТ № 12

1. Вычислить $2 \cdot A - 3 \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 29 & 30 \\ 20 & 42 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 29 & 25 \\ 20 & 48 \end{bmatrix}$.

2. Вычислить $A \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 15 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 9 \end{bmatrix}$.

3. Вычислить обратную и транспонированную матрицу для матрицы $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

4. Вычислить определитель и ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

ВАРИАНТ № 13

1. Вычислить $-2 \cdot A + B$, если $A = \begin{bmatrix} 29 & 30 \\ 20 & 36 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 29 & 22 \\ 20 & 38 \end{bmatrix}$.

2. Вычислить $A \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -7 & 9 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$.

3. Вычислить обратную и транспонированную матрицу для матрицы $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Вычислить определитель и ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 5 \\ -5 & -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$.

ВАРИАНТ № 14

1. Вычислить $2 \cdot A - B$, если $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 9 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & 3 \end{bmatrix}$.

2. Вычислить $A \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 11 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$.

3. Вычислить обратную и транспонированную матрицу для матрицы $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

4. Вычислить определитель и ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 & 2 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

ВАРИАНТ № 15

1. Вычислить $2 \cdot A - B$, если $A = \begin{bmatrix} 29 & 36 \\ 18 & 30 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 29 & 19 \\ 18 & 32 \end{bmatrix}$.

2. Вычислить $A \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ -9 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -9 & 5 \end{bmatrix}$.

3. Вычислить обратную и транспонированную матрицу для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 5 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

4. Вычислить определитель и ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

ВАРИАНТ № 16

1. Вычислить $2 \cdot A - 4 \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 8 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}.$

2. Вычислить $A \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -9 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -9 & 10 \end{bmatrix}.$

3. Вычислить обратную и транспонированную матрицу для матрицы $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$

4. Вычислить определитель и ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}.$

ВАРИАНТ № 17

1. Вычислить $A + 0,5 \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 29 & 34 \\ 18 & 37 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 28 & 16 \\ 18 & 14 \end{bmatrix}.$

2. Вычислить $A \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -9 & 10 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -9 & 9 \end{bmatrix}.$

3. Вычислить обратную и транспонированную матрицу для матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$

4. Вычислить определитель и ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 1-4 & 1 & 1 \\ 1-2 & 1-1 \\ 1-2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

ВАРИАНТ № 18

1. Вычислить $A - 3 \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} -9 & 4 \\ 8-3 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -8 & 1 \\ 0-3 \end{bmatrix}$.

2. Вычислить $A \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -9 & 9 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2-5 \\ -9 & 11 \end{bmatrix}$.

3. Вычислить обратную и транспонированную матрицу для матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \\ 3-2 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Вычислить определитель и ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2-1 \\ 2 & 5 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

ВАРИАНТ № 19

1. Вычислить $2 \cdot A - 3 \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 29 & 30 \\ 18 & 42 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -7 & 9 \end{bmatrix}$.

2. Вычислить $A \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -9 & 15 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2-2 \\ -9 & 17 \end{bmatrix}$.

3. Вычислить обратную и транспонированную матрицу для матрицы $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$.

4. Вычислить определитель и ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 2-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2-2 \\ -2-1-2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

ВАРИАНТ № 20

1. Вычислить $2 \cdot A + B$, если $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 9 \\ -7 & 8 & 5 \end{bmatrix}$.

2. Вычислить $A \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 11 & 9 \\ -9 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -9 & 5 \end{bmatrix}$.

3. Вычислить обратную и транспонированную матрицу для матрицы $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$.

4. Вычислить определитель и ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

ВАРИАНТ № 21

1. Вычислить $A - 4 \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 29 & 32 \\ 18 & 73 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -21 & 5 \\ -78 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Вычислить $A \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -9 & 11 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -9 & 13 \end{bmatrix}$.

3. Вычислить обратную и транспонированную матрицу для матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$.

4. Вычислить определитель и ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

ВАРИАНТ № 22

1. Вычислить $2 \cdot A + 3 \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 7 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 & 7 \\ -7 & 8 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

2. Вычислить $A \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -9 & 13 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 15 \end{bmatrix}$.

3. Вычислить обратную и транспонированную матрицу для матрицы $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

4. Вычислить определитель и ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

ВАРИАНТ № 23

1. Вычислить $2 \cdot A - B$, если $A = \begin{bmatrix} 25 & 35 \\ 18 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 32 & 20 \\ 18 & 37 \end{bmatrix}$.

2. Вычислить $A \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -9 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -9 & 10 \end{bmatrix}$.

3. Вычислить обратную и транспонированную матрицу для матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Вычислить определитель и ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

ВАРИАНТ № 24

1. Вычислить $2 \cdot A + 7 \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 8 & 3 & 7 \end{bmatrix}$.

2. Вычислить $A \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -9 & 10 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -9 & 7 \end{bmatrix}$.

3. Вычислить обратную и транспонированную матрицу для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Вычислить определитель и ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$

ВАРИАНТ № 25

1. Вычислить $2 \cdot A - 3 \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 6 & -1 & 7 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 9 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$

2. Вычислить $A \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -9 & 7 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -9 & 11 \end{bmatrix}.$

3. Вычислить обратную и транспонированную матрицу для матрицы $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$

4. Вычислить определитель и ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & -5 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$

ВАРИАНТ № 26

1. Вычислить $2 \cdot A - B$, если $A = \begin{bmatrix} 34 & 32 \\ 18 & 40 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 35 & 23 \\ 18 & 11 \end{bmatrix}.$

2. Вычислить $A \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -9 & 11 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -9 & 13 \end{bmatrix}.$

3. Вычислить обратную и транспонированную матрицу для матрицы $A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$

4. Вычислить определитель и ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

ВАРИАНТ № 27

1. Вычислить $A - B$, если $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -5 \\ -3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$.

2. Вычислить $A \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 7 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -3 & 13 \end{bmatrix}$.

3. Вычислить обратную и транспонированную матрицу для матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & -1 \end{bmatrix}$.

4. Вычислить определитель и ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

ВАРИАНТ № 28

1. Вычислить $A - B$, если $A = \begin{bmatrix} 47 & 20 \\ 33 & 58 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -22 & -50 \\ -34 & 35 \end{bmatrix}$.

2. Вычислить $A \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 20 & -7 \\ 6 & 19 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$.

3. Вычислить обратную и транспонированную матрицу для матрицы $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

4. Вычислить определитель и ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

ВАРИАНТ № 29

1. Вычислить $A - 5 \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -5 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$.

2. Вычислить $A \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -9 & 13 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -9 & 15 \end{bmatrix}$.

3. Вычислить обратную и транспонированную матрицу для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Вычислить определитель и ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -5 \\ -4 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

ВАРИАНТ № 30

1. Вычислить $-A + 3 \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 32 & 30 \\ 18 & 42 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$.

2. Вычислить $A \cdot B$, если $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -9 & 15 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -9 & -7 \end{bmatrix}$.

3. Вычислить обратную и транспонированную матрицу для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ -2 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

4. Вычислить определитель и ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

5. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

5.1. Основные понятия

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида

49

во втором уравнении и т. д.)
$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 7x_4 = 12 \\ -3x_1 + 6x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 15 \\ 7x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 7 \end{cases}$$

2. Составим матрицу коэффициентов и расширенную матрицу, вектора-столбца

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -4 & 7 \\ -3 & 6 & 8 & -4 \\ 7 & -2 & 3 & -6 \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -4 & 7 & 12 \\ -3 & 6 & 8 & -4 & -15 \\ 7 & -2 & 3 & -6 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 12 \\ -15 \\ 7 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

ОТВЕТ: Матрица коэффициентов – $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -4 & 7 \\ -3 & 6 & 8 & -4 \\ 7 & -2 & 3 & -6 \end{bmatrix},$

расширенная матрица – $\bar{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -4 & 7 & 12 \\ -3 & 6 & 8 & -4 & -15 \\ 7 & -2 & 3 & -6 & 7 \end{bmatrix},$

вектор-столбец из неизвестных – $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},$

вектор-столбец из свободных членов – $B = \begin{bmatrix} 12 \\ -15 \\ 7 \end{bmatrix}.$

ПРИМЕР.

Для системы уравнений
$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 8 \\ -2x_1 + 11x_3 = -1 \\ 6x_1 - 4x_2 = 15 \end{cases}$$
 составить матрицу коэф-

фициентов, вектор-столбец из неизвестных, вектор-столбец из свободных членов и расширенную матрицу.

РЕШЕНИЕ:

1. Преобразуем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 8 \\ -2x_1 + 11x_3 = -1 \\ 6x_1 - 4x_2 = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 8 \\ -2x_1 + 11x_3 = -1 \\ 6x_1 - 4x_2 = 15 \end{cases}.$$

Во втором уравнении отсутствует неизвестное x_2 . Это слагаемое в уравнении можно записать как $0 \cdot x_2$,

т. е. свободный коэффициент при x_2 равен нулю. Аналогично для третьего уравнения. Записать систему уравнений с учетом нулевых коэффициентов

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 8 \\ -2x_1 + 0 \cdot x_2 + 11x_3 = -1 \\ 6x_1 - 4x_2 + 0 \cdot x_3 = 15 \end{cases}$$

Составим матрицу коэффициентов, расширенную матрицу, матрицы вектор-столбец $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 \\ -2 & 0 & 11 \\ 6 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 & 8 \\ -2 & 0 & 11 & -1 \\ 6 & -4 & 0 & 15 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 15 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

ОТВЕТ: Матрица коэффициентов – $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 \\ -2 & 0 & 11 \\ 6 & -4 & 0 \end{bmatrix}$,

расширенная матрица – $\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 & 8 \\ -2 & 0 & 11 & -1 \\ 6 & -4 & 0 & 15 \end{bmatrix}$,

вектор-столбец из неизвестных – $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$,

вектор-столбец из свободных членов – $B = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 15 \end{bmatrix}$.

5.2. Решение системы линейных алгебраических уравнений

Решением системы (2.1) называется n значений неизвестных $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, ..., $x_n = c_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства. В матричной форме решение системы можно

записать в виде матрицы-столбца $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$.

Система уравнений (2.1) называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение.

Система уравнений (2.1) называется несовместной, если она не имеет ни одного решения.

ли $r(\bar{A}) = n$, то система имеет единственное решение, иначе система имеет бесчисленное множество решений.

ПРИМЕР.

Используя теоремы, исследовать систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 4 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{cases}.$$

РЕШЕНИЕ:

1. Определим, система линейных алгебраических уравнений совместна или нет.

Необходимо составить основную матрицу $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 6 \\ 3 & -6 & -1 \end{bmatrix}$ и расширен-

ную матрицу коэффициентов $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 2 & -2 & 6 & 4 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{bmatrix}$. Далее, используя элемен-

тарные преобразования, вычислим ранги матриц $\bar{A}$ и A .

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 2 & -2 & 6 & 4 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} [2]:2 \\ [3]-3 \cdot [1] \end{array} \right\} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} [2]-[1] \\ -[3]:4 \end{array} \right\} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 3 & 4 & -13 \end{bmatrix} \\ \left\{ \begin{array}{l} [3]+[2] \\ (2)-2 \cdot (1) \\ (3)-5 \cdot (1) \\ (4)+9 \cdot (1) \end{array} \right\} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} -(2):3 \\ (4)+(3) \end{array} \right\} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ \left\{ \begin{array}{l} [3]:2 \\ (3)+2 \cdot (2) \\ (4)-9 \cdot (2) \end{array} \right\} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Следовательно, } rang(\bar{A}) = 3. \end{aligned}$$

Аналогично вычисляем ранг матрицы A

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 6 \\ 3 & -6 & -1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} [2]:2 \\ [3]-3 \cdot [1] \end{array} \right\} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -12 & -16 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} [2]-[1] \\ -[3]:4 \end{array} \right\} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} [3]+[2] \\ (2)-2 \cdot (1) \\ (3)-5 \cdot (1) \end{array} \right\} \sim \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} -(2):3 \\ (3):2 \end{array} \right\} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ (3)+(2) \right\} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Отсюда следует} \end{aligned}$$

$rang(A) = 3$. Т. е. $rang(\bar{A}) = rang(A)$, значит, по теореме Кронекера–Капелли система линейных алгебраических уравнений совместна.

2. Если система совместна, необходимо определить, сколько она имеет решений. Число неизвестных в системе уравнений три ($n=3$), т. е. $\text{rang}(\bar{A}) = n = 3$, следовательно, по теореме 1 система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение.

ОТВЕТ: Система линейных алгебраических уравнений совместна, имеет единственное решение.

ПРИМЕР.

Используя теоремы, исследовать систему линейных алгебраических

$$\text{уравнений} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1 \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = -9 \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 8 \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 12 \end{cases}.$$

РЕШЕНИЕ:

1. Определим, система линейных алгебраических уравнений совместна или нет. Ранг системы изменяется $0 \leq r \leq 4$.

Составим основную матрицу $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & -3 & -1 \\ -7 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 9 & 9 & 10 \end{bmatrix}$ и расширенную матрицу коэффициентов $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 & -1 & -9 \\ -7 & 1 & 1 & -2 & 8 \\ -3 & 9 & 9 & 10 & 12 \end{bmatrix}$.

Далее, используя элементарные преобразования, вычислим ранги матриц $\bar{A}$ и A .

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 & -1 & -9 \\ -7 & 1 & 1 & -2 & 8 \\ -3 & 9 & 9 & 10 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [2] - 6 \cdot [1] \\ [3] + 7 \cdot [1] \\ [4] + 3 \cdot [1] \end{Bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [3] + [2] \\ [4] + [2] \end{Bmatrix} \sim \\ & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (2) - 2 \cdot (1) \\ (3) - 2 \cdot (1) \\ (4) - 3 \cdot (1) \\ (5) - (1) \end{Bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -(2):15 \\ -(3):15 \\ -(4):19 \\ -(5):15 \end{Bmatrix} \sim \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (3) - (2) \\ (4) - (2) \\ (5) - (2) \end{Bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. $\text{Rang}(\bar{A}) = 2$, $\text{rang}(A) = 2$, следовательно, по теореме Кронекера–Капелли система линейных алгебраических уравнений совместна.

3. $n = 4$, т. е. $r(\bar{A}) < 2$, следовательно, по теореме 2 система имеет бесчисленное множество решений.

ОТВЕТ: Система линейных алгебраических уравнений совместна, имеет бесчисленное множество решений.

ПРИМЕР.

Используя теоремы, исследовать систему линейных алгебраических

$$\text{уравнений } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ:

1. Определим, система линейных алгебраических уравнений совместна или нет. Ранг системы изменяется $0 \leq r \leq 3$.

Составим основную матрицу $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ и расширенную матрицу

$$\text{коэффициентов } \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Далее, используя элементарные преобразования, вычислим ранги матриц $\bar{A}$ и A .

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\left\{ \begin{array}{l} [2] - [1] \\ [3] + 2 \cdot [1] \end{array} \right\}} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\left\{ \begin{array}{ll} (2) - (1) & (3) + 2 \cdot (2) \\ (3) + (1) & (4) - 4 \cdot (2) \end{array} \right\}} \sim \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow{\{-[3]:13\}} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. $\text{Rang}(\bar{A}) = 3$, $\text{rang}(A) = 2$, следовательно, по теореме Кронекера–Капелли система уравнений несовместна.

ОТВЕТ: Система уравнений несовместна.

Системы линейных однородных уравнений.

Дана система линейных однородных уравнений (2.2). Однородная система всегда совместна, т. к. $r(\bar{A}) = r(A)$ и имеет тривиальное решение.

Теорема 3

Для того чтобы система однородных уравнений (2.2) имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее основной матрицы был меньше числа неизвестных, т. е. $r(A) < n$.

Теорема 4

Для того чтобы однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю, т. е. $\Delta = 0$.

ПРИМЕР.

$$\text{Исследовать систему уравнений} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ:

Система линейных уравнений является однородной. Необходимо определить, имеет ли система ненулевое решение. Для этого вычислим ранг системы и ее определитель.

Вычислим ранг системы уравнений

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 6 \\ 3 & -6 & -1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} [2] - 2 \cdot [1] \\ [3] - 3 \cdot [1] \end{array} \right\} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -6 & -4 \\ 3 & -12 & -16 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} -[2]:2 \\ -[3]:4 \\ (2) - 2 \cdot (1) \\ (3) - 5 \cdot (1) \end{array} \right\} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} [3] - [2] \\ (2):3 \end{array} \right\} \sim \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \{(3) - 2 \cdot (2)\} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \{(3):2\} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ранг системы линейных однородных уравнений равен трем, число неизвестных системы также равно трем.

$$\text{Вычислим определитель системы } \Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 6 \\ 3 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 24 \neq 0.$$

По теореме Кронекера–Капелли система совместна и имеет единственное решение (тривиальное).

ОТВЕТ: Система совместна, имеет тривиальное решение.

Совместную систему линейных алгебраических уравнений можно решить различными способами. Рассмотрим некоторые из них.

5.2.1. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных из системы алгебраических уравнений.

Система (2.1) приводится к треугольному виду методом элементарных преобразований над строками. После последовательно определяются неизвестные полученной системы (снизу вверх). x_n определяется из n уравне-

ния. Далее подставляем x_n в $n-1$ уравнение и находим x_{n-1} , и т. д. вычисляются все x_i .

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений (2.1).

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n = b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n = b_2, \\ , \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + ... + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{array} \right.$$

Первое уравнение системы умножить на $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ ($a_{11} \neq 0$) и отнять от второго уравнения. Аналогичные вычисления продолжать до тех пор, пока система не будет приведена к ступенчатому виду.

[illegible]

a_{ij}^1 – главные элементы системы;

$a_{ij}^1, b_i^1, (i, j = \overline{2, m})$ – новые значения коэффициентов и правых частей.

Таким образом, на первом этапе система приводится к ступенчатому виду и исключается часть неизвестных из уравнений. На втором этапе необходимо последовательно определить неизвестные снизу вверх.

Замечания:

1) если система (2.1) приводится к треугольному виду, то исходная система имеет единственное решение;

2) если $a_{11} = 0$, то необходимо сделать перестановку уравнений так, чтобы $a_{11} \neq 0$. Удобна перестановка, когда $a_{11} = 1$;

3) если в результате преобразований уравнение примет вид: $0 = b$, то $b = 0$ – это уравнение необходимо исключить из преобразований; если в результате преобразований получается $b \neq 0$, то система несовместна.

Алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса:

1. Привести систему линейных алгебраических уравнений к стандартному виду.
2. Исследовать систему линейных уравнений.
3. Треугольную матрицу записать в виде системы линейных алгебраических уравнений и вычислить неизвестные.
4. Проверка.

ПРИМЕР.

Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 6x_3 + 2x_1 - 2x_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \text{ методом Гаусса.} \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ:

1. Преобразуем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 6x_3 + 2x_1 - 2x_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9. \text{ Для этого необходимо первое уравнение поделить на два} \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{cases}$$

и неизвестные x_1, x_2, x_3 записать по порядку
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9. \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{cases}$$

2. Исследуем систему алгебраических уравнений. Для этого необходимо составить основную и расширенную матрицу и методом элементарных преобразований над строками вычислить ранг матриц.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & -1 \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & -9 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & -9 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{bmatrix} \xrightarrow{\left\{ \begin{array}{l} [2] - [1] \\ [3] - 3 \cdot [1] \end{array} \right\}} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -11 \\ 0 & -3 & -10 & 19 \end{bmatrix} \xrightarrow{\{[3] + [2]\}} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\{-[3]:8\} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \text{ Rang}(\bar{A}) = \text{rang}(A) = 3, \text{ значит, по теореме Кроне-}$$

кера–Капелли система линейных алгебраических уравнений совместна. Так как ранг совместной системы равен числу неизвестных, то по теореме 1 система имеет единственное решение.

3. Треугольную матрицу
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$
 запишем в виде системы ли-

нейных уравнений –
$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 2 \\ 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = -11 \\ 1 \cdot x_3 = -1 \end{cases}$$
 и вычислим неизвестные.

второе уравнение и вычислим x_2 . $3 \cdot x_2 + 2 \cdot (-1) = -11 \rightarrow x_2 = -3$. Подставим x_3 , x_2 в первое уравнение и вычислим x_1 , $x_1 - (-3) + 3 \cdot (-1) = 2 \rightarrow x_1 = 2$. Таким образом определены все неизвестные системы уравнения (снизу вверх).

ставим найденные переменные. Если неизвестные найдены верно, то получится верное тождество.

Получено верное тождество. Следовательно, система линейных алгебраических уравнений решена верно.

5.2.2. Решение систем линейных алгебраических уравнений матричным методом

[illegible]

Основная матрица этой системы квадратная, и определитель этой мат-

Система (2.1) называется невыврожденной, если ее определитель отличен от нуля.

Решение системы линейных уравнений по данной формуле называется матричным способом решения системы линейных алгебраических уравнений.

Алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений матричным способом:

1. Привести систему линейных алгебраических уравнений к стандартному виду.
2. Вычислить определитель матрицы коэффициентов ($\det(A)$).
3. Вычислить алгебраические дополнения и записать союзную матрицу (A^*).
4. Вычислить обратную матрицу (A^{-1}).
5. Выполнить проверку, чтобы определить, правильно вычислена обратная матрица или нет ($A \cdot A^{-1} = E$).
6. Вычислить неизвестные переменные ($X = A^{-1} \cdot B$).
7. Проверка.

ПРИМЕР.

Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 6 \cdot x_3 + 2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 = 4 \\ x_1 + 2 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 = -9 \\ 3 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - x_3 = 25 \end{cases} \text{ матричным методом.}$$

РЕШЕНИЕ:

Пункт 1 был сделан в предыдущем примере.

$$2. \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & -1 \end{vmatrix} = -24 \neq 0. \text{ Следовательно, система линейных ал-}$$

гебраических уравнений является невырожденной.

3. Вычислим алгебраические дополнения матрицы коэффициентов.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 30 = 28;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 15) = 16;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -6 - 6 = -12;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = -(1 + 18) = -19;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 9 = -10;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -(-6 + 3) = 3;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -5 - 6 = -11;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -(5-3) = -2;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2+1=3.$$

Запишем союзную матрицу $A^* = \begin{bmatrix} 28 & -19 & -11 \\ 16 & -10 & -2 \\ -12 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$

4. Вычислим обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{-24} \cdot \begin{bmatrix} 28 & -19 & -11 \\ 16 & -10 & -2 \\ -12 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{28}{-24} & \frac{-19}{-24} & \frac{-11}{-24} \\ \frac{16}{-24} & \frac{-10}{-24} & \frac{-2}{-24} \\ \frac{-12}{-24} & \frac{3}{-24} & \frac{3}{-24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{6} & \frac{19}{24} & \frac{11}{24} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

5. Выполним проверку, чтобы определить, правильно вычислена обратная матрица или нет

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{7}{6} & \frac{19}{24} & \frac{11}{24} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

6. Вычислим неизвестные переменные x_1, x_2, x_3

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} -\frac{7}{6} & \frac{19}{24} & \frac{11}{24} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -9 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ следовательно, } \begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = -3. \\ x_3 = -1 \end{matrix}$$

7. Проверка. В исходную систему уравнений
$$\begin{cases} 6 \cdot x_3 + 2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 = 4 \\ x_1 + 2 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 = -9 \\ 3 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - x_3 = 25 \end{cases}$$

подставим найденные переменные. Если неизвестные вычислены верно, то получится верное тождество.

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2 - 6 \cdot (-3) - (-1) &= 25 \\ 6 + 18 + 1 &= 25 \\ 25 &= 25. \end{aligned}$$

Получено верное тождество. Следовательно, система линейных алгебраических уравнений решена верно.

ОТВЕТ: $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1$.

5.2.3. Решение систем линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера

Матричное равенство $X = A^{-1} \cdot B$ записать через коэффициенты

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11} \cdot b_1 + A_{21} \cdot b_2 + \dots + A_{n1} b_n}{|A|} \\ \frac{A_{12} \cdot b_1 + A_{22} \cdot b_2 + \dots + A_{n2} b_n}{|A|} \\ \dots \\ \frac{A_{1n} \cdot b_1 + A_{2n} \cdot b_2 + \dots + A_{nn} b_n}{|A|} \end{bmatrix}, \text{ следовательно,}$$

$$x_1 = \frac{A_{11} \cdot b_1 + A_{21} \cdot b_2 + \dots + A_{n1} b_n}{|A|} = \frac{\Delta_1}{|A|}$$

....., а также

$$x_n = \frac{A_{1n} \cdot b_1 + A_{2n} \cdot b_2 + \dots + A_{nn} b_n}{|A|} = \frac{\Delta_n}{|A|}$$

$$A_{11} \cdot b_1 + A_{21} \cdot b_2 + \dots + A_{n1} b_n = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_1 \quad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

....., следовательно,

$$A_{1n} \cdot b_1 + A_{2n} \cdot b_2 + \dots + A_{nn} b_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix} = \Delta_n \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

Определитель Δ_i получается из определителя матрицы путем замены i столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

Формулами Крамера называются формулы

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера:

1. Привести систему линейных алгебраических уравнений к стандартному виду.

2. Вычислить определитель матрицы коэффициентов ($\det(A)$).

3. Вычислить определители Δ_i .

4. Вычислить неизвестные переменные $\left(x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \right)$.

5. Проверка.

ПРИМЕР.

Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 6 \cdot x_3 + 2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 = 4 \\ x_1 + 2 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 = -9 \\ 3 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - x_3 = 25 \end{cases}, \text{ используя формулы Крамера.}$$

РЕШЕНИЕ:

Пункты 1–2 были сделаны в предыдущем примере.

3. Вычислим определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Для получения определителя Δ_1 необходимо в определителе матрицы коэффициентов первый столбец заменить на вектор-столбец свободных членов. Для получения определителя Δ_2 необходимо в определителе матрицы коэффициентов второй столбец заменить на вектор-столбец свободных членов и т. д.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -9 & 2 & 5 \\ 25 & -6 & -1 \end{vmatrix} = -48, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -9 & 5 \\ 3 & 25 & -1 \end{vmatrix} = 72, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -9 \\ 3 & -6 & 25 \end{vmatrix} = 24.$$

4. Вычислим неизвестные переменные x_1, x_2 и x_3 .

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-48}{-24} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{72}{-24} = -3, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{24}{-24} = -1.$$

5. Проверка. В исходную систему уравнений

$$\begin{cases} 6 \cdot x_3 + 2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 = 4 \\ x_1 + 2 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 = -9 \\ 3 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - x_3 = 25 \end{cases}$$

подставим найденные переменные. Если неизвестные вычислены верно, то получится верное тождество.

$$\begin{aligned} 6 \cdot (-1) + 2 \cdot (2) - 2 \cdot (-3) &= 4 \\ -6 + 4 + 6 &= 4 \\ 4 &= 4. \end{aligned}$$

Получено верное тождество. Следовательно, система линейных алгебраических уравнений решена верно.

ОТВЕТ: $x_1 = 2, x_2 = -3, x_3 = -1$.

Рассмотрено три метода решения системы линейных алгебраических уравнений. Как видно, результат получается один и тот же. При решении системы линейных алгебраических уравнений необходимо выбирать рациональный метод.

6. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ ПО ГЛАВЕ «ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ»

1. Дать определение матрицы, элементов матрицы, квадратной матрицы, симметричной матрицы.
2. Дать определение главной и побочной диагонали матрицы.
3. Дать определение единичной, нулевой, противоположной матрицы.
4. Дать определение транспонированной, треугольной, трапецеидальной матрицы.
5. Какая матрица называется матрицей-строкой и матрицей-столбцом?
6. Какие две матрицы называются равными?
7. Перечислите основные операции над матрицами и свойства над ними.
8. Какие матрицы называются эквивалентными?
9. Расскажите элементарные преобразования над матрицами.
10. Что называется определителем матрицы?
11. Расскажите, как вычисляется определитель первого, второго и третьего порядка матрицы.
12. Что называется алгебраическим дополнением элемента матрицы и минором матрицы?
13. Как вычисляется определитель n -го порядка матрицы?
14. Перечислите свойства определителей матриц.
15. Какая матрица называется невырожденной?
16. Какая матрица называется вырожденной?
17. Какая матрица называется обратной матрицей?
18. Перечислите свойства обратной матрицы.
19. Какая матрица называется союзной?
20. Расскажите алгоритм вычисления обратной матрицы.
21. Что называется рангом матрицы?
22. Какой ранг матрицы называется базисным?
23. Перечислите свойства ранга матрицы.
24. Расскажите способы нахождения ранга матрицы.
25. Что называется системой линейных алгебраических уравнений?
26. Запишите систему линейных алгебраических уравнений в матричной форме.
27. Какая матрица называется расширенной матрицей?
28. Дайте определение решения системы линейных алгебраических уравнений.

29. Какая система линейных алгебраических уравнений называется совместной?

30. Какая система линейных алгебраических уравнений называется несовместной?

31. Какая совместная система алгебраических уравнений называется определенной?

32. Какая система совместных алгебраических уравнений называется неопределенной?

33. Какое решение называется частным решением системы линейных алгебраических уравнений?

34. Какое решение системы линейных алгебраических уравнений называется общим?

35. Какое решение системы линейных уравнений называется тривиальным?

36. Какая система линейных уравнений называется однородной?

37. Какие системы уравнений называются эквивалентными?

38. Дайте формулировку теоремы Кронекера–Капелли.

39. Расскажите теоремы, отвечающие на вопрос, сколько имеет решений совместная система линейных алгебраических уравнений.

40. Расскажите алгоритм исследования системы линейных алгебраических уравнений.

41. Расскажите, при каких условиях однородная система линейных однородных уравнений имеет ненулевые условия?

42. Расскажите алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

43. Расскажите алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений матричным методом.

44. Расскажите алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера.

7. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЯ ПО ТЕМЕ «СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ»

ВАРИАНТ № 1

1. Исследовать систему линейных уравнений и решить ее методом

$$\text{Гаусса} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{array} \right. .$$

2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = -4 \end{cases}.$$

3. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -1. \\ 3x_1 - 2x_2 = 8 \end{cases}$$

ВАРИАНТ № 2

1. Исследовать систему линейных уравнений и решить ее методом

Гаусса $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}.$

2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10. \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases}$$

3. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3 \end{cases}.$$

ВАРИАНТ № 3

1. Исследовать систему линейных уравнений и решить ее методом

Гаусса $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 6x_1 - 4x_2 - x_3 = 2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 11x_3 = 3 \end{cases}.$

2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = -8 \\ 2x + 3y + z = -3. \\ 2x + y + 3z = -1 \end{cases}$$

3. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4. \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

ВАРИАНТ № 4

1. Исследовать систему линейных уравнений и решить ее методом

$$\text{Гаусса} \begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1. \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1. \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$$

3. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}.$$

ВАРИАНТ № 5

1. Исследовать систему линейных уравнений и решить ее методом

$$\text{Гаусса} \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = -9 \\ x + 2y + z = 3. \\ 3x + y - z = -1 \end{cases}$$

3. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17. \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

ВАРИАНТ № 6

1. Исследовать систему линейных уравнений и решить ее методом

$$\text{Гаусса} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -1 \\ -x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 9x_4 = -3. \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 6x_4 = -2 \end{cases}$$

2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9 \\ x + 2y - 3z = 14 \\ 3x + 4y + z = 16 \end{cases}$$

3. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

ВАРИАНТ № 7

1. Исследовать систему линейных уравнений и решить ее методом

Гаусса $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = -1 \end{cases}$

2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ x + y - z = 0 \\ 4x - y + 5z = 3 \end{cases}$$

3. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

ВАРИАНТ № 8

1. Исследовать систему линейных уравнений и решить ее методом

Гаусса $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 8x_1 + 2x_2 - x_3 = 21 \\ 2x_1 + 11x_2 - 16x_3 = 21 \end{cases}$

2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$$

3. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

ВАРИАНТ № 9

1. Исследовать систему линейных уравнений и решить ее методом

$$\text{Гаусса} \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 - 4x_2 = -1 \\ 7x_1 + 10x_2 = 12. \\ 5x_1 + 6x_2 = 8 \\ 3x_1 - 16x_2 = -5 \end{array} \right.$$

2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 5 \\ 4x + 5y + 6z = 8. \\ 7x + 8y = 2 \end{array} \right.$$

3. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2. \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3 \end{array} \right.$$

ВАРИАНТ № 10

1. Исследовать систему линейных уравнений и решить ее методом

$$\text{Гаусса} \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 1 \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12 \end{array} \right. .$$

2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14. \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18 \end{array} \right.$$

3. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x_1 - x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 1. \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 0 \end{array} \right.$$

ВАРИАНТ № 11

1. Исследовать систему линейных уравнений и решить ее методом

$$\text{Гаусса} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4. \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 6 \end{array} \right.$$

2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 16 \\ 5x - 3y + 2z = 15 \\ 10x - 11y + 5z = 36 \end{cases}.$$

3. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_3 = 15 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 14 \end{cases}.$$

ВАРИАНТ № 12

1. Исследовать систему линейных уравнений и решить ее методом

$$\text{Гаусса} \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 4x_5 = -6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = -19 \\ 3x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 10x_4 + 8x_5 = -24 \\ 10x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 7x_5 = -7 \end{cases}.$$

2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 4 \\ 3x + 6y + 2z = 4 \\ 4x - y - 3z = 1 \end{cases}.$$

3. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5 \end{cases}.$$

ВАРИАНТ № 13

1. Исследовать систему линейных уравнений и решить ее методом

$$\text{Гаусса} \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 3 \\ 3x_1 + 15x_2 + 12x_3 = 15 \end{cases}.$$

2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 7x + 5y + 2z = 18 \\ x - y - z = 3 \\ x + y + 2z = -2 \end{cases}.$$

3. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - 7x_3 = -4 \end{cases}.$$

ВАРИАНТ № 14

1. Исследовать систему линейных уравнений и решить ее методом

$$\text{Гаусса} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -4. \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ 5y + 6z = 28. \\ x + 2z = 7 \end{cases}$$

3. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 8x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 2 \end{cases}.$$

ВАРИАНТ № 15

1. Исследовать систему линейных уравнений и решить ее методом

$$\text{Гаусса} \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_4 + x_5 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 5 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 11 \end{cases}.$$

2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - 7z = 16. \\ 5x + 2y + z = 16 \end{cases}$$

3. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 8 \\ x_1 - 3x_2 = 9 \\ 2x_1 - x_3 = -5 \end{cases}.$$

ВАРИАНТ № 16

1. Исследовать систему линейных уравнений и решить ее методом

$$\text{Гаусса} \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -3. \\ x_5 + x_4 + x_3 = 2 \\ x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$$

2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y - 3z = 13 \\ 3x - 2y + 4z = -15 \end{cases}.$$

3. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}.$$

ВАРИАНТ № 17

1. Исследовать систему линейных уравнений и решить ее методом

$$\text{Гаусса} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_4 = -1 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5 \end{cases}.$$

2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 5x - 2y + z = -1 \\ 2x + y + 2z = 6 \\ x - 3y - z = -5 \end{cases}.$$

3. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3. \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

ВАРИАНТ № 18

1. Исследовать систему линейных уравнений и решить ее методом

$$\text{Гаусса} \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -1 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 15x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases}.$$

2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 4x + 3y - z = -1 \\ 3x + y + z = 3 \\ x - 2y - 3z = 8 \end{cases}.$$

3. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -3 \end{cases}.$$

ВАРИАНТ № 19

1. Исследовать систему линейных уравнений и решить ее методом

$$\text{Гаусса} \begin{cases} 9x_1 - 4x_2 - 13x_3 - 4x_4 = 25 \\ 8x_1 + 17x_2 + 9x_3 - 29x_4 = -39 \\ 7x_1 + x_2 - 6x_3 - 15x_4 = 4 \\ x_1 - 21x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 9 \end{cases}.$$

2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ x - y + 3z = -4. \\ 3x + 5y + z = 4 \end{cases}$$

3. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x + y + 3z = 5 \\ 3x + 4y + z = -2 \end{cases}.$$

ВАРИАНТ № 20

1. Исследовать систему линейных уравнений и решить ее методом

$$\text{Гаусса} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 6 \end{cases}.$$

2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x - 3y + 2z = 5. \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

3. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 28 \\ 7x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -1. \\ 7x_1 + 9x_2 - 9x_3 = 5 \end{cases}$$

ВАРИАНТ № 21

1. Исследовать систему линейных уравнений и решить ее методом

$$\text{Гаусса} \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}.$$

2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x - 3y + z = 2 \\ 2x + y + 3z = 3 \\ 2x - y - 2z = 8 \end{cases}.$$

3. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + 2y + z = 8 \\ 4x - 3y - 2z = -1 \end{cases}.$$

ВАРИАНТ № 22

1. Исследовать систему линейных уравнений и решить ее методом

$$\text{Гаусса} \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12x_4 = 10 \end{cases}.$$

2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 6 \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 21 \end{cases}.$$

3. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 8 \end{cases}.$$

ВАРИАНТ № 23

1. Исследовать систему линейных уравнений и решить ее методом

$$\text{Гаусса} \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 5 \\ 4x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -3 \end{cases}.$$

2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}.$$

3. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + 3x_2 = 16. \\ 5x_1 - x_3 = 10 \end{cases}$$

ВАРИАНТ № 24

1. Исследовать систему линейных уравнений и решить ее методом

Гаусса $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 8x_3 - x_4 = 43 \\ 3x_1 + 14x_2 + 5x_3 = 29 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}.$

2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + 2y + z = 8 \\ 4x - 3y - 2z = -1 \end{cases}.$$

3. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 12 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 27 \\ 7x_1 + 8x_2 - x_3 + 5x_4 = 40 \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 41 \end{cases}.$$

ВАРИАНТ № 25

1. Исследовать систему линейных уравнений и решить ее методом

Гаусса $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 10x_4 = 0 \\ 5x_1 + 21x_2 + 13x_4 = 3 \end{cases}.$

2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 2x - 3y - 5z = 1 \\ 3x + y - 2z = -1. \\ x - 2y + z = 5 \end{cases}$$

3. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

ВАРИАНТ № 26

1. Исследовать систему линейных уравнений и решить ее методом

$$\text{Гаусса} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -6 \\ 7x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 14 \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 19 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 9 \end{cases}.$$

2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 6 \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 21 \end{cases}.$$

3. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 3x + 3y + 2z = -1 \\ 2x + y - z = 3 \\ x - 2y - 3z = 4 \end{cases}.$$

ВАРИАНТ № 27

1. Исследовать систему линейных уравнений и решить ее методом

$$\text{Гаусса} \begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0 \\ 2x - y + 2z - 3 = 0 \\ x + 2y - z + 5 = 0 \\ 6x - 3y - 6z - 9 = 0 \end{cases}.$$

2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = -9 \end{cases}.$$

3. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = -1 \\ x + 3y - z = -2 \\ 3x - y + 4z = 1 \end{cases}.$$

ВАРИАНТ № 28

1. Исследовать систему линейных уравнений и решить ее методом

$$\text{Гаусса} \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}.$$

2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 8x_3 = -7 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 10 \end{cases}.$$

3. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 2x - y + 4z = 5 \\ 3x + 3y - 2z = 4 \end{cases}.$$

ВАРИАНТ № 29

1. Исследовать систему линейных уравнений и решить ее методом

$$\text{Гаусса} \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 = 16 \\ -2x_1 + x_2 - x_4 = -6 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}.$$

2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - x_3 = -7 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}.$$

3. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 3x - y - z = -5 \\ 5x + 2y + 3z = 13 \\ x - y + 2z = 4 \end{cases}.$$

ВАРИАНТ № 30

1. Исследовать систему линейных уравнений и решить ее методом

$$\text{Гаусса} \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - 8x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 8x_3 + 8x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 + 8x_4 = 1 \end{cases}.$$

2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 14 \end{cases}.$$

3. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} -x - y - 2 = 0 \\ x + 2y + z + 1 = 0 \\ 2x + 3y + 7 = 0 \end{cases}.$$

ГЛАВА II ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Цели

Иметь представление о:

- векторах, линейных операциях и свойствами над ними;
- векторных диаграммах в науке и технике;
- правиле треугольника и правиле параллелограмма;
- единичном и нулевом векторе;
- орте вектора, координатном базисе;
- коллинеарных, компланарных, равных, противоположных векторах;
- левой и правой тройке векторов;
- разложении вектора по ортам на плоскости и в пространстве;
- длине, направляющих косинусах вектора;
- скалярном, векторном, смешанном произведении векторов и их свойствах;
- геометрическом смысле векторного и смешанного произведения векторов;
- практических приложениях скалярного, векторного и смешанного произведения векторов.

Знать:

- линейные операции над векторами;
- алгоритм разложения вектора по ортам на плоскости и в пространстве;
- формулу вычисления длины вектора, направляющих косинусов, угла между векторами;
- скалярное, векторное, смешанное произведение векторов, их свойства;
- геометрический смысл векторного и смешанного произведения векторов;
- условия коллинеарности двух векторов;
- условие компланарности векторов;
- условие перпендикулярности векторов.

Уметь:

Находить длину вектора, проекции вектора на оси координат, раскладывать вектор по ортам на плоскости и в пространстве. Складывать, вычитать и умножать векторы на число. Находить направляющие косинусы вектора, графически изображать векторы на плоскости и в пространстве. Вычислять скалярное, векторное и смешанное произведение векторов, угол между векторами. Вычислять площадь параллелограмма и треугольника, объем паралле-

лепипеда и треугольной пирамиды. Проверять условия коллинеарности, компланарности и перпендикулярности векторов.

1. ВЕКТОРЫ

1.1. Основные понятия

Вектор – это направленный прямолинейный отрезок.

Примерами вектора являются сила, скорость, ускорение и т. д. То есть это величины, определенные числовым значением и направлением.

Началом вектора называют точку приложения вектора, конец вектора обозначают стрелкой.

Математическая запись вектора: $\overrightarrow{AB} = \vec{a} = \mathbf{a}$.

На рисунке 1 т. А – это начало вектора, т. В – конец вектора $\overrightarrow{AB} = \vec{a} = \mathbf{a}$.

Модулем вектора, или длиной, называется длина его отрезка.

Математическая запись модуля вектора:
 $|\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}| = |\mathbf{a}|$.

Нулевым вектором называется вектор, начало и конец которого совпадают.

Математическая запись нулевого вектора: $\vec{0}$.

Длина нулевого вектора равна нулю $|\vec{0}| = 0$.

Единичным вектором $\vec{e}$ называется вектор, модуль которого равен единице $|\vec{e}| = 1$.

Математическая запись единичного вектора: $\vec{e}$.

Ортом вектора $\vec{a}$ называется единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$.

Математическая запись орта вектора $\vec{a}$: $\vec{a}^0$.

Для любого вектора $\vec{a}$ справедливо равенство: $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0$, следовательно, $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Орты координатных осей Ox , Oy , Oz обозначают $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ соответственно. На рисунке 2 изображены орты координатных осей.

Координатным базисом называют тройку ортов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, если эти векторы удовлетворяют условиям:

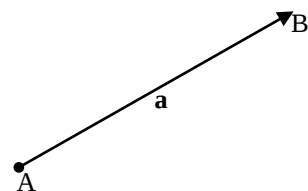


Рис. 1. Схематичное изображение вектора

1) вектор $\vec{i}$ лежит на оси Ox , вектор $\vec{j}$ – на оси Oy , вектор $\vec{k}$ – на оси Oz ;

2) каждый из векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ направлен вдоль своей оси в положительную сторону;

3) векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ единичные.

Любой вектор в пространстве можно разложить по координатному базису.

Два вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Математическая запись коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Два вектора называются равными, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые длины.

Два вектора называются противоположными, если они коллинеарны, имеют равные модули и направлены в противоположные стороны.

При параллельном переносе вектора получается вектор, равный исходному. Поэтому начало вектора можно перемещать в любую точку пространства.

Три вектора в пространстве называются компланарными, если они лежат в одной или параллельных плоскостях.

Если среди трех векторов хотя бы один нулевой или два любые коллинеарны, то такие векторы компланарны.

На рисунке 3 изображены векторы: $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{c} \parallel \vec{d}$, $\vec{h} \parallel \vec{g}$, $\vec{i}$ равный $\vec{m}$, $\vec{s}$ равный $\vec{q}$, $\vec{v}$ противоположный $\vec{c}$, $\vec{n}$ противоположный $\vec{f}$.

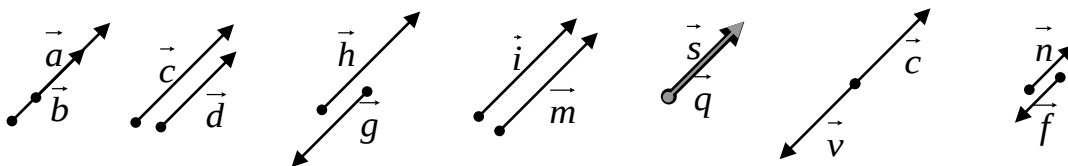


Рис. 3. Схематичное изображение коллинеарных, равных и противоположных векторов

1.2. Линейные операции над векторами

1. Сложение векторов.

Даны два произвольных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Необходимо найти их сумму. Это можно сделать двумя способами: по правилу треугольника и по правилу параллелограмма.

Суть правила треугольника.

1. Совместить конец вектора $\vec{a}$ с началом вектора $\vec{b}$.

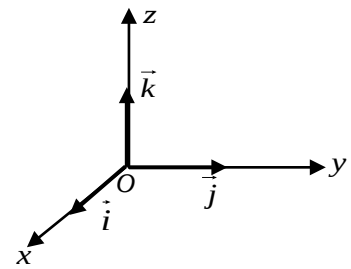


Рис. 2. Оорты координатных осей Ox , Oy , Oz

2. Вектор, соединяющий начало первого вектора с концом второго, называется суммой векторов $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

На рисунке 4 изображена схема сложения двух векторов по правилу треугольника.

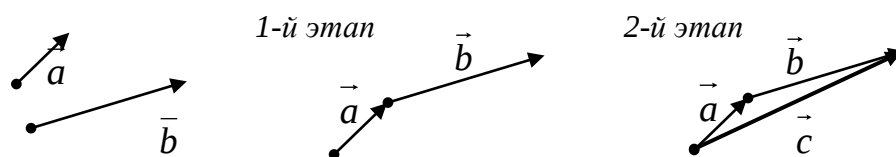


Рис. 4. Изображение сложения векторов по правилу треугольника

Суть правила параллелограмма.

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ привести к общему началу.
2. Построить параллелограмм на векторах слагаемых.
3. Вектор, выходящий из того же начала и совпадающий по длине и направлению с диагональю построенного параллелограмма, будет искомым вектором суммы $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

На рисунке 5 изображена схема сложения двух векторов по правилу параллелограмма.

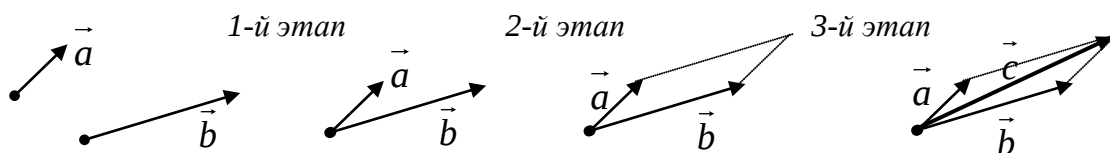


Рис. 5. Изображение сложения векторов по правилу параллелограмма

Сложение более двух векторов выполняется аналогично по правилу треугольника или по правилу параллелограмма. На рисунке 6 приведен пример сложения четырех векторов $\vec{l} = \vec{m} + \vec{n} + \vec{k} + \vec{g}$.

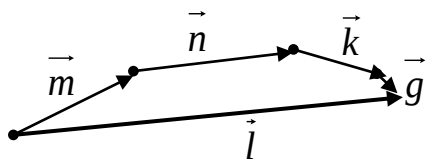


Рис. 6. Сложение четырех векторов

2. Разность векторов.

Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, такой, что $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.

Разность двух и более векторов можно найти по правилу треугольника или параллелограмма, т. к. разность векторов можно представить через их сумму $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. На рисунках 7–8 изображено вычитание векторов по правилу треугольника и параллелограмма.

При нахождении разности векторов по правилу параллелограмма одна из диагоналей является суммой векторов, а другая их разностью.

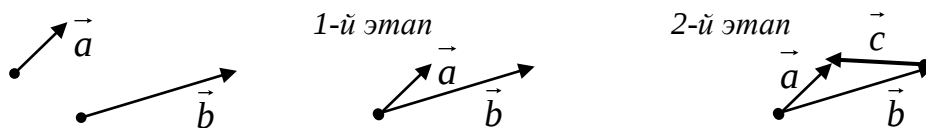


Рис. 7. Изображение вычитания векторов по правилу треугольника

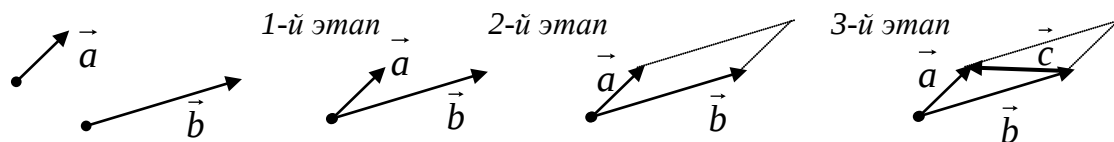


Рис. 8. Изображение вычитания векторов по правилу параллелограмма

3. Произведение вектора на скаляр.

Произведением вектора $\vec{a}$ на число k называется новый вектор $\vec{c}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий длину $|\vec{c}| = |k| \cdot |\vec{a}|$ и то же направление, что и $\vec{a}$, если $k > 0$, и противоположное направление, если $k < 0$.

На рисунке 9 изображено произведение векторов на скаляр.



Рис. 9. Произведение вектора на скаляр

Свойства линейных операций над векторами

- 1°. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- 2°. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
- 3°. $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}$.
- 4°. $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$.
- 5°. $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$.
- 6°. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.
- 7°. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$,

где $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – векторы, α, β – числа.

ПРИМЕР.

Даны два вектора $\vec{k} = 2 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j}$ и $\vec{l} = 7 \cdot \vec{i} + \vec{j}$. Вычислить: $\vec{k} + \vec{l}$, $\vec{k} - \vec{l}$, $2 \cdot \vec{l}$, проверить коллинеарность векторов $\vec{k}$ и $\vec{l}$. Результат изобразить схематично.

РЕШЕНИЕ:

Сумма векторов $\vec{k}$ и $\vec{l}$ – это сумма их одноименных координат, т. е.

$$\vec{k} + \vec{l} = (k_x + l_x) \cdot \vec{i} + (k_y + l_y) \cdot \vec{j}.$$

$$\vec{k} + \vec{l} = (2 + 7) \cdot \vec{i} + (-3 + 1) \cdot \vec{j} = 9 \cdot \vec{i} - 2 \cdot \vec{j}.$$

Аналогично вычисляется разность векторов

$$\vec{k} - \vec{l} = (k_x - l_x) \cdot \vec{i} + (k_y - l_y) \cdot \vec{j}.$$

$$\vec{k} - \vec{l} = (2 - 7) \cdot \vec{i} + (-3 - 1) \cdot \vec{j} = -5 \cdot \vec{i} - 4 \cdot \vec{j}.$$

Умножение вектора $\vec{l}$ на число 2 – это умножение координат вектора на данное число, т. е. $2 \cdot \vec{l} = 2 \cdot l_x \cdot \vec{i} + 2 \cdot l_y \cdot \vec{j}$, $2 \cdot \vec{l} = 2 \cdot 7 \cdot \vec{i} + 2 \cdot 1 \cdot \vec{j} = 14 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j}$.

Векторы $\vec{k}$ и $\vec{l}$ коллинеарны, если их проекции пропорциональны, т. е. $\frac{k_x}{l_x} = \frac{k_y}{l_y} \cdot \frac{2}{7} \neq \frac{-3}{1}$. Равенство не выполняется, следовательно, векторы не коллинеарны.

ОТВЕТ: $\vec{k} + \vec{l} = 9 \cdot \vec{i} - 2 \cdot \vec{j}$, $\vec{k} - \vec{l} = -5 \cdot \vec{i} - 4 \cdot \vec{j}$, $2 \cdot \vec{l} = 14 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j}$, векторы $\vec{k}$ и $\vec{l}$ не коллинеарны.

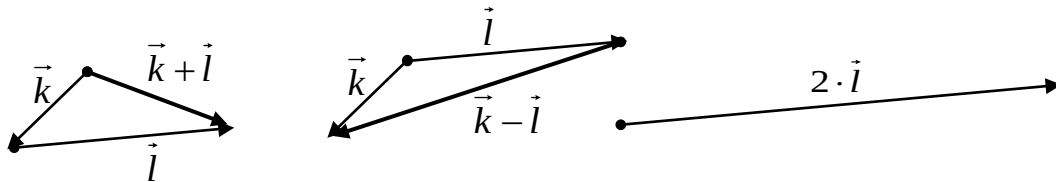


Рис. 10. Схематичное изображение сложения, вычитания и умножения на число векторов

1.3. Разложение вектора по ортам

1.3.1. Разложение вектора по ортам в плоскости

Дан вектор $\vec{a}$ в плоскости Oxy (см. рис. 11). Параллельным переносом перенести вектор $\vec{a}$ в начало координат (точку O). Конец $\vec{a}$ обозначить точкой M . Отпустить перпендикуляры на оси Ox и Oy из точки M . Обозначить точки пересечения с осями A и B соответственно, α и β – углы между вектором и соответствующими осями.

Проекцией точки M на ось Ox называется основание перпендикуляра MA , опущенного из точки на ось.

Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось Ox называется положительное число, если вектор и ось одинаково направлены, и отрицательное число, если вектор и ось противоположно направлены.

Математическая запись проекции вектора на ось: $pr_x \vec{a}$.

По правилу суммы векторов $\vec{a} = \vec{OA} + \vec{OB}$.

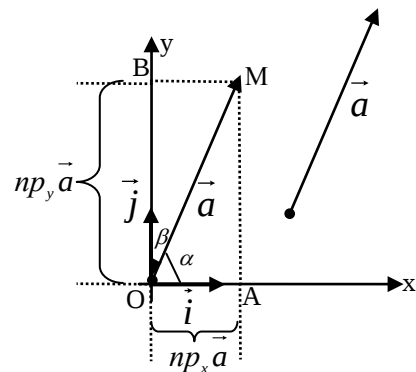


Рис. 11. Разложение вектора по ортам на плоскости

Из чертежа (см. рис. 11) можно выразить $np_x \vec{a} = |\vec{OA}| = |\vec{a}| \cdot \cos \alpha = a_x$, $np_y \vec{a} = |\vec{OB}| = |\vec{a}| \cdot \cos \beta = a_y$. $\cos \alpha$, $\cos \beta$ называются направляющие косинусы вектора $\vec{a}$.

Векторы $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ записать через единичные орты $\vec{OA} = a_x \cdot \vec{i}$, $\vec{OB} = a_y \cdot \vec{j}$.

Подставить это в исходную сумму векторов $\vec{a} = \vec{OA} + \vec{OB} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$ – разложение вектора $\vec{a}$ по ортам координатных осей.

Координатами вектора $\vec{a}$ называются проекции вектора на оси координат, и записывается $\vec{a} = \{a_x; a_y\}$.

По теореме Пифагора модуль (длина) вектора $\vec{a}$ равна $|\vec{a}| = \sqrt{(np_x \vec{a})^2 + (np_y \vec{a})^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Следствия:

1. Проекция вектора на ось положительна (отрицательна), если вектор образует с осью острый (тупой) угол, и равна нулю, если этот угол – прямой.

2. Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.

Свойства проекций векторов:

1⁰. Проекция суммы нескольких векторов на одну ось равна сумме их проекций на эту ось, т. е. $np_x \vec{c} = np_x (\vec{a} + \vec{b}) = np_x \vec{a} + np_x \vec{b}$, где $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (см. рис. 12).

2⁰. При умножении вектора на число его проекция на ось также умножается на это число, т. е. $np_x (k \cdot \vec{a}) = k \cdot np_x \vec{a}$.

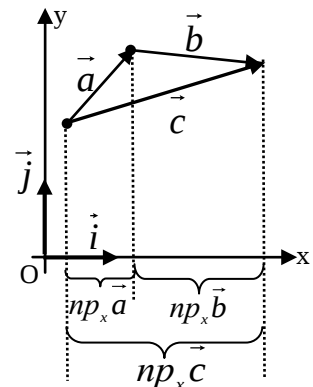


Рис. 12. Проекция суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

1.3.2. Разложение вектора по ортам в пространстве

Теорема

Любой вектор $\vec{a}$ может быть единственным образом разложен по базису $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Рассмотрим вектор $\vec{a}$, расположенный в прямоугольной системе координат (см. рис. 13). Найдем проекции вектора $\vec{a}$ на оси координат.

Параллельным переносом перенести вектор $\vec{a}$ в начало координат (точку O). Конец вектора $\vec{a}$ обозначить точкой M. Провести плоскости, параллельные координатным осям, через точку M. Получится прямоугольный параллелепипед. Обозначить точки пересечения этих плоскостей с осями

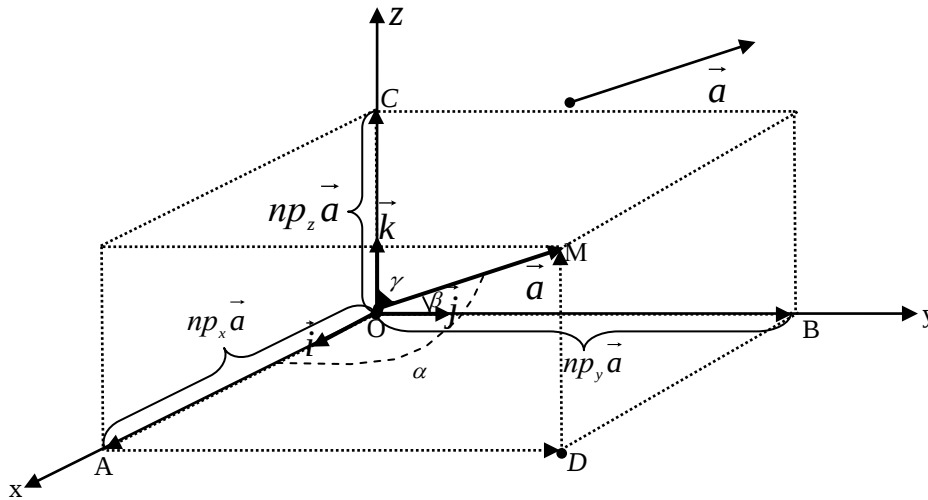


Рис. 13. Разложение вектора по ортам в пространстве

координат A , B , C , а углы между вектором и осями Ox , Oy и Oz — α , β и γ соответственно.

По определению суммы векторов $\vec{a} = \vec{OA} + \vec{AD} + \vec{DM}$.

$$\left. \begin{aligned} \vec{OA} &= |\vec{OA}| \cdot \vec{i} = \{|\vec{OA}| = np_x \vec{a} = a_x\} = np_x \vec{a} \cdot \vec{i} = a_x \cdot \vec{i} \\ \text{Так как } \vec{AD} &= |\vec{AD}| \cdot \vec{j} = \{|\vec{AD}| = |\vec{OB}| = np_y \vec{a} = a_y\} = a_y \cdot \vec{j} \\ \vec{DM} &= |\vec{DM}| \cdot \vec{k} = \{|\vec{DM}| = |\vec{OC}| = np_z \vec{a} = a_z\} = a_z \cdot \vec{k} \end{aligned} \right\}, \text{ то}$$

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}.$$

Это формула разложения вектора $\vec{a}$ по ортам координатных осей, где числа a_x , a_y , a_z называются координатами вектора $\vec{a}$. Координаты вектора можно записать в различных формах: $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ или $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$.

По теореме о длине диагонали прямоугольного параллелепипеда $|\vec{OM}|^2 = |\vec{OA}|^2 + |\vec{OB}|^2 + |\vec{OC}|^2$ или $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. Модуль (длина) вектора $\vec{a}$ равен квадратному корню из суммы квадратов его проекций на оси координат.

По свойству проекции вектора на ось $a_x = |\vec{a}| \cdot \cos(\alpha)$, $a_y = |\vec{a}| \cdot \cos(\beta)$, $a_z = |\vec{a}| \cdot \cos(\gamma)$, тогда

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(|\vec{a}| \cdot \cos(\alpha))^2 + (|\vec{a}| \cdot \cos(\beta))^2 + (|\vec{a}| \cdot \cos(\gamma))^2} = \\ &= \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot (\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma))} = |\vec{a}| \cdot \sqrt{(\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma))}, \quad \text{где} \\ |\vec{a}| &\neq 0 \text{ получаем} \end{aligned}$$

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1.$$

Числа $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$, $\cos(\gamma)$ называют направляющими косинусами вектора $\vec{a}$.

1.4. Действия над векторами

Даны два вектора $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$ и $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ и точки $A(x_1; x_2; x_3)$, $B(y_1; y_2; y_3)$.

Сумма (разность) векторов – это сумма (разность) их одноименных координат, т. е. $\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x) \cdot \vec{i} + (a_y \pm b_y) \cdot \vec{j} + (a_z \pm b_z) \cdot \vec{k}$.

Умножение вектора на скаляр – это умножение координат вектора на скаляр, т. е. $\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a}_x \cdot \vec{i} + \lambda \cdot \vec{a}_y \cdot \vec{j} + \lambda \cdot \vec{a}_z \cdot \vec{k}$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты, т. е. $a_x = b_x$, $a_y = b_y$, $a_z = b_z$.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда, когда их проекции пропорциональны, т. е. $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda$.

Координаты вектора равны разностям соответствующих координат его конца и начала, т. е. $\vec{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

ПРИМЕР.

Даны две точки в пространстве $A(0; 1; 2)$ и $B(3; -1; 6)$. Вычислить координаты, длину, направляющие косинусы вектора $\vec{AB}$.

РЕШЕНИЕ:

1. Вычислить координаты вектора $\vec{AB}$:

$$\vec{AB} = \{B_x - A_x; B_y - A_y; B_z - A_z\}, \vec{AB} = \{3 - 0; -1 - 1; 6 - 2\} = \{3; -2; 4\}.$$

2. Вычислить длину вектора $\vec{AB}$:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2 + (B_z - A_z)^2},$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2 + (4)^2} = \sqrt{9 + 4 + 16} = \sqrt{29} \text{ ед.}$$

3. Вычислить направляющие косинусы вектора $\vec{AB}$:

$$\cos(\alpha) = \frac{np_x \vec{AB}}{|\vec{AB}|}, \cos(\beta) = \frac{np_y \vec{AB}}{|\vec{AB}|}, \cos(\gamma) = \frac{np_z \vec{AB}}{|\vec{AB}|}.$$

$$\cos(\alpha) = \frac{3}{\sqrt{29}}, \cos(\beta) = -\frac{2}{\sqrt{29}}, \cos(\gamma) = \frac{4}{\sqrt{29}}.$$

ОТВЕТ: Координаты вектора $\overrightarrow{AB} = \{3; -2; 4\}$, длина вектора $\overrightarrow{AB}$ равна $\sqrt{29}$ ед., направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$: $\cos(\alpha) = \frac{3}{5}$, $\cos(\beta) = -\frac{2}{5}$, $\cos(\gamma) = \frac{4}{5}$.

1.5. Скалярное произведение векторов, его свойства, выражение скалярного произведения векторов через координаты и проекции

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т. е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$, где $\alpha = (\vec{a}; \vec{b})$.

Математическое обозначение скалярного произведения векторов: $\vec{a}\vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $(\vec{a}, \vec{b})$

Скалярное произведение двух векторов можно выразить через проекции векторов и координаты векторов.

Запись скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ через проекции. Из рисунка 14 видно, $\cos(\alpha) = \frac{np_{\vec{b}} \vec{a}}{|\vec{a}|}$, следовательно,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha) = |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}} \vec{b}.$$

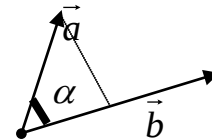


Рис. 14. Скалярное произведение двух векторов

Выражение скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ через их координаты. Даны два вектора $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$ и $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$, тогда

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \cdot (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = a_x b_x \vec{i}\vec{i} + a_x b_y \vec{i}\vec{j} + a_x b_z \vec{i}\vec{k} + a_y b_x \vec{j}\vec{i} + \\ &+ a_y b_y \vec{j}\vec{j} + a_y b_z \vec{j}\vec{k} + a_z b_x \vec{k}\vec{i} + a_z b_y \vec{k}\vec{j} + a_z b_z \vec{k}\vec{k} = \\ &= \{\cos(\vec{i}; \vec{i}) = \cos(\vec{j}; \vec{j}) = \cos(\vec{k}; \vec{k}) = \cos(0) = 1\} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \end{aligned}$$

Свойства скалярного произведения векторов

$$1^0. \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

$$2^0. (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

$$3^0. \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

$$4^0. \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2.$$

5°. Если ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ($\cos(90^\circ) = 0$).

6°. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны и однонаправлены, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ ($\cos 0 = \cos 2\pi = 1$).

$$7^\circ. \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

$$8^\circ. np_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \cdot \vec{b}, \quad np_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \cdot \vec{a},$$

где $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – векторы,

$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$, λ – число.

Три некопланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, взятые в указанном порядке, образуют правую тройку векторов, если с конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ совершается против часовой стрелки, и левую, если по часовой стрелке (см. рис. 15).

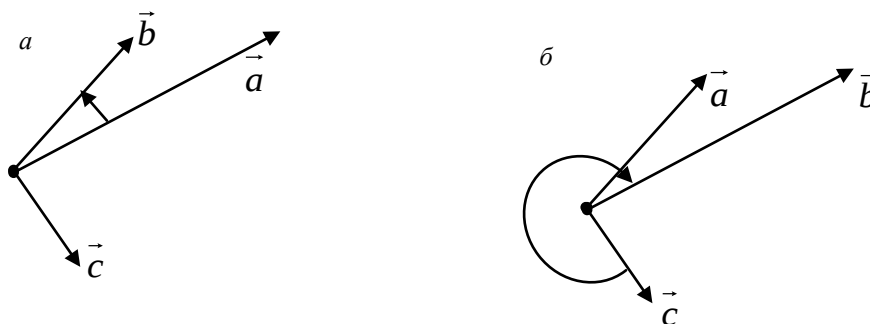


Рис. 15. а – правая тройка векторов
б – левая тройка векторов

Использование определения скалярного произведения векторов в физике позволяет вычислить работу, произведенную постоянной силой при прямолинейном перемещении материальной точки из одного положения в другое.

ПРИМЕР.

Даны векторы $\vec{g} = 2 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{k}$ и $\vec{h} = -\vec{i} + 6\vec{k}$, вычислить их скалярное произведение, косинус угла между ними, проекцию вектора $\vec{g}$ на вектор $\vec{h}$.

РЕШЕНИЕ:

Скалярное произведение векторов $\vec{g}$ и $\vec{h}$ можно вычислить через их координаты $\vec{g} \cdot \vec{h} = g_x \cdot h_x + g_y \cdot h_y + g_z \cdot h_z$, подставляем координаты векторов $\vec{g} \cdot \vec{h} = 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 6 = -2 + 18 = 16$.

Косинус угла между векторами $\vec{g}$ и $\vec{h}$ вычисляется по формуле

$$\cos(\vec{g}; \vec{h}) = \frac{g_x h_x + g_y h_y + g_z h_z}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2} \cdot \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}}, \text{ подставляем координаты векторов в}$$

формулу

$$\cos(\vec{g}; \vec{h}) = \frac{16}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (0)^2 + (6)^2}} = \frac{16}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{37}} = \frac{16}{\sqrt{1073}} \approx 0,488.$$

Проекция вектора $\vec{g}$ на вектор $\vec{h}$ вычисляется по формуле

$$np_{\vec{h}} \vec{g} = \frac{g_x h_x + g_y h_y + g_z h_z}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}}, \text{ подставляем значения } np_{\vec{h}} \vec{g} = \frac{16}{\sqrt{37}} \approx 2,63.$$

ОТВЕТ: Скалярное произведение векторов $\vec{g}$ и $\vec{h}$ равно 16, косинус угла между векторами равен 0,488, проекция вектора $\vec{g}$ на вектор $\vec{h}$ равна 2,63.

1.6. Векторное произведение векторов, его свойства, выражение векторного произведения через координаты векторов

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ (см. рис. 16), который:

- 1) перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
- 2) длина вектора $\vec{c}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle \vec{a}; \vec{b});$$

- 3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Математическое обозначение векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}; \vec{b}]$.

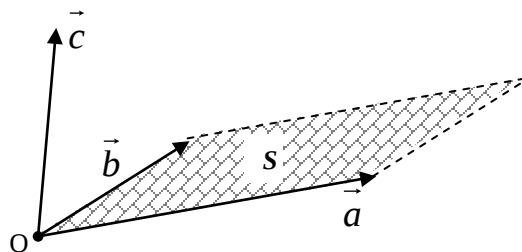


Рис. 16. Графическое изображение векторного произведения векторов

Свойства векторного произведения векторов

$$1^0. [\vec{a}; \vec{b}] = -[\vec{b}; \vec{a}].$$

$$2^0. \lambda [\vec{a}; \vec{b}] = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}).$$

$$3^0. \text{ Ненулевые векторы } \vec{a} \text{ и } \vec{b} \text{ коллинеарны, если } [\vec{a}; \vec{b}] = \vec{0}.$$

$$4^0. (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

5⁰. Если вектор $\vec{a}$ перпендикулярен вектору $\vec{b}$, то $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, где $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – векторы, λ – число.

Следствие. $[\vec{i}; \vec{j}] = \vec{k}$, $[\vec{j}; \vec{k}] = \vec{i}$, $[\vec{k}; \vec{i}] = \vec{j}$, т. к. $\sin(90^\circ) = 1$, $\sin(-90^\circ) = -1$.

Выражение векторного произведения через координаты векторов

Даны векторы $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ и

$\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$. Вычислить $\vec{a} \times \vec{b}$.

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x [\vec{i}; \vec{i}] + a_x b_y [\vec{i}; \vec{j}] + a_x b_z [\vec{i}; \vec{k}] + \\ &+ a_y b_x [\vec{j}; \vec{i}] + a_y b_y [\vec{j}; \vec{j}] + a_y b_z [\vec{j}; \vec{k}] + a_z b_x [\vec{k}; \vec{i}] + a_z b_y [\vec{k}; \vec{j}] + a_z b_z [\vec{k}; \vec{k}] = \\ &= \begin{cases} [\vec{i}; \vec{i}] = [\vec{j}; \vec{j}] = [\vec{k}; \vec{k}] = 0 \\ [\vec{i}; \vec{j}] = -[\vec{j}; \vec{i}] = \vec{k} & [\vec{i}; \vec{k}] = -[\vec{k}; \vec{i}] = -\vec{j} \\ [\vec{j}; \vec{k}] = -[\vec{k}; \vec{j}] = \vec{i} & (\sin 0^\circ = 0) \end{cases} = (a_y b_z - a_z b_y) \cdot \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \cdot \vec{j} + \end{aligned}$$

$$+ (a_x b_y - a_y b_x) \cdot \vec{k} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Геометрический смысл векторного произведения

Используя определение векторного произведения двух векторов, можно вычислить площадь параллелограмма и площадь треугольника

$$S_{\text{парал}} = |[\vec{a}; \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle \vec{a}, \vec{b}), \quad S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

В физике определение векторного произведения векторов используют при вычислении линейной скорости вращения и момента силы относительно точки.

ПРИМЕР.

Вычислить векторное произведение векторов $\vec{q} = 2 \cdot \vec{i} - 7 \cdot \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{y} = -\vec{i} + 2 \cdot \vec{j} + 3\vec{k}$ и площадь треугольника, построенного на сторонах данных векторов.

РЕШЕНИЕ:

Векторное произведение векторов $\vec{q}$ и $\vec{y}$ можно вычислить по форму-

$$\text{ле } \vec{q} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ q_x & q_y & q_z \\ y_x & y_y & y_z \end{vmatrix}.$$

$$\vec{q} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -7 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot (-21 - 2) - \vec{j} \cdot (6 + 1) + \\ + \vec{k} \cdot (4 - 7) = -23\vec{i} - 7\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Площадь треугольника вычисляется по формуле $S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{g} \times \vec{y}| = \frac{1}{2} \cdot |\vec{g}| \cdot |\vec{y}| \cdot \sin(\vec{g}; \vec{y})$. Косинус угла между векторами $\vec{g}$ и $\vec{y}$ можно

найти по формуле $\cos(\vec{g}; \vec{y}) = \frac{g_x y_x + g_y y_y + g_z y_z}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2} \cdot \sqrt{y_x^2 + y_y^2 + y_z^2}}$. В то же время

$\cos(\vec{g}; \vec{y})$ и $\sin(\vec{g}; \vec{y})$ связаны между собой основным тригонометрическим

тождеством $\cos^2(\vec{g}; \vec{y}) + \sin^2(\vec{g}; \vec{y}) = 1$. Следовательно,

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{g}| \cdot |\vec{y}| \cdot \sin(\vec{g}; \vec{y}) = \frac{1}{2} \cdot |\vec{g}| \cdot |\vec{y}| \cdot \sqrt{1 - \cos^2(\vec{g}; \vec{y})};$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2} \cdot \sqrt{y_x^2 + y_y^2 + y_z^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{(g_x y_x + g_y y_y + g_z y_z)^2}{(g_x^2 + g_y^2 + g_z^2) \cdot (y_x^2 + y_y^2 + y_z^2)}}.$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2^2 + (-7)^2 + (1)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (3)^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{(2 \cdot (-1) + (-7) \cdot 2 + 1 \cdot 3)^2}{(2^2 + (-7)^2 + (1)^2) \cdot ((-1)^2 + 2^2 + 3^2)}} = \\ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 + 49 + 1} \cdot \sqrt{1 + 4 + 9} \cdot \sqrt{1 - \frac{(-2 - 14 + 3)^2}{(4 + 49 + 1) \cdot (1 + 4 + 9)}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{54} \cdot \sqrt{14} \cdot \sqrt{1 - \frac{169}{54 \cdot 14}} \approx 12,11 \text{ кв. ед.}$$

ОТВЕТ: Векторное произведение векторов $\vec{q}$ и $\vec{y}$ равно $-23\vec{i} - 7\vec{j} - 3\vec{k}$, площадь треугольника, построенного на сторонах данных векторов, равна $\approx 12,11 \text{ ед}^2$.

1.7. Смешанное произведение векторов, его свойства.

Выражение смешанного произведения векторов через их координаты

Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перемножить векторно, а полученный вектор умножить скалярно на вектор $\vec{c}$, то такое произведение векторов называется смешанным (векторно-скалярным) произведением трех векторов и является числом (см. рис. 17).

Математическое обозначение смешанного произведения векторов:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

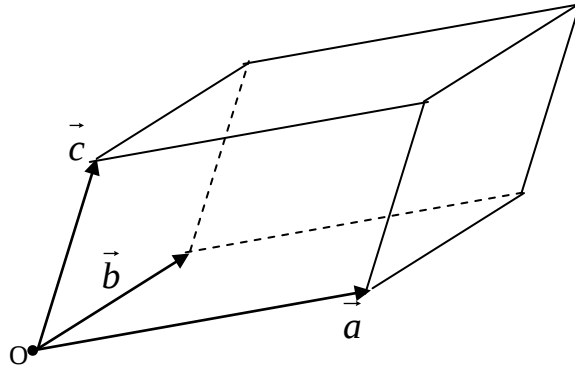


Рис. 17. Графическое изображение смешанного произведения векторов

Геометрический смысл смешанного произведения векторов

Объем параллелепипеда и объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, взят со знаком «плюс», если векторы образуют правую тройку векторов, и со знаком «минус», если векторы образуют левую тройку векторов.

$$V_{\text{параллелепипеда}} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|, \quad V_{\text{треугольной пирамиды}} = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$

Свойства смешанного произведения векторов

- 1°. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$.
- 2°. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.
- 3°. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = -(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = -(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$.
- 4°. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$, если $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – компланарные векторы.

Выражение смешанного произведения векторов через их координаты

Если $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$, $\vec{c} = c_x \cdot \vec{i} + c_y \cdot \vec{j} + c_z \cdot \vec{k}$, то

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot (c_x \cdot \vec{i} + c_y \cdot \vec{j} + c_z \cdot \vec{k}) = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \vec{k} \right) \cdot \vec{c}.$$

$$\cdot (c_x \cdot \vec{i} + c_y \cdot \vec{j} + c_z \cdot \vec{k}) = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot c_z \right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

ПРИМЕР.

Вычислить смешанное произведение векторов $\vec{q} = 2 \cdot \vec{i} - 7 \cdot \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{y} = -\vec{i} + 2 \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{k}$, $\vec{g} = 2 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{k}$ и объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{q}$, $\vec{y}$, $\vec{g}$.

РЕШЕНИЕ:

Смешанное произведение векторов $\vec{q}$, $\vec{y}$, $\vec{g}$ можно вычислить по формуле $(\vec{q} \times \vec{y}) \cdot \vec{g} = \begin{vmatrix} q_x & q_y & q_z \\ y_x & y_y & y_z \\ g_x & g_y & g_z \end{vmatrix}$. Подставить значения координат векторов

$$(\vec{q} \times \vec{y}) \cdot \vec{g} = \begin{vmatrix} 2 & -7 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -83.$$

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{q}$, $\vec{y}$, $\vec{g}$, вычисляется по формуле $V_{\text{параллелепипеда}} = |(\vec{q} \times \vec{y}) \cdot \vec{g}|$. Следовательно, $V_{\text{параллелепипеда}} = 83 \text{ ед}^3$.

ОТВЕТ: $(\vec{q} \times \vec{y}) \cdot \vec{g} = -83$, объем параллелепипеда равен 83 ед^3 .

1.8. Некоторые приложения скалярного, векторного и смешанного произведения векторов

1. Векторы $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ коллинеарны, если $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$ или $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$.

2. Векторы $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ перпендикулярны, если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

3. Векторы $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ компланарны, если $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$.

ПРИМЕР.

Проверить коллинеарность, перпендикулярность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, если $\vec{a} = \{1; -2; 5\}$, $\vec{b} = \{-2; 4; -10\}$, $\vec{c} = \{-1; 3; 8\}$.

РЕШЕНИЕ:

Коллинеарность векторов можно проверить двумя способами:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \quad \text{или} \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0. \quad \text{Проверим первым способом:}$$

$$\frac{1}{-2} = \frac{-2}{4} = \frac{5}{-10}, \text{ следовательно, векторы коллинеарны.}$$

$$\text{Векторы компланарны, если } (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0, \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & -10 \\ -1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 0,$$

следовательно, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$,

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 4 + 5 \cdot (-10) = -2 - 8 - 50 = -60$, следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не перпендикулярны.

ОТВЕТ: Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, не перпендикулярны, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны.

2. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ ПО ГЛАВЕ «ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ»

1. Дать определение вектора, начала и конца вектора.
2. Дать определение нулевого и единичного вектора.
3. Дать определение орта вектора.
4. Дать определение модуля вектора, написать формулу, по которой он вычисляется.
5. Дать определение координатного базиса.
6. Дать определение равных, компланарных, коллинеарных, противоположных векторов, изобразить их графически.
7. Перечислить линейные операции над векторами и их свойства. Изобразить графически сложение, вычитание и умножение вектора на число.
8. Рассказать разложение вектора по ортам на плоскости и в пространстве.
9. Перечислить свойства проекций векторов.
10. Записать формулу разложения вектора по ортам координатных осей.
11. Дать определение направляющих косинусов вектора, написать формулу их вычисления и графически изобразить направляющие косинусов вектора.
- 12.
13. Дать определение скалярного произведения векторов. Записать формулу вычисления скалярного произведения векторов через их

координаты.

14. Перечислить свойства скалярного произведения векторов.
15. Дать определение правой и левой тройки векторов.
16. Дать определение векторного произведения векторов, перечислить его свойства.
17. Записать формулу вычисления векторного произведения векторов через координаты.
18. Рассказать геометрический смысл векторного произведения векторов.
19. Дать определение смешанного произведения векторов и перечислить его свойства.
20. Рассказать геометрический смысл смешанного произведения векторов.
21. Записать формулу вычисления смешанного произведения векторов через их координаты.
22. Перечислить условия коллинеарности векторов.
23. Записать условие перпендикулярности векторов.
24. Записать условие компланарности векторов.

3. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ГЛАВЕ «ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА»

ВАРИАНТ № 1

Даны векторы: $\vec{a} = -2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} - 10\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

Вычислить:

1. Векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
3. Сумму векторов и разность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. Результат изобразить графически.
4. Длину вектора $\vec{b}$.
5. Направляющие косинусы вектора $\vec{b}$.
6. Координаты т. А, если $\overrightarrow{AX} = -2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$, $X = (0; -1; 1)$.
7. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ двумя способами.
8. Проверить перпендикулярность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
9. Проверить компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
10. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{AX}$.
11. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{c}$, и угол между векторами.

ВАРИАНТ № 2

Даны векторы: $\vec{a} = -3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} - \vec{j}$.

Вычислить:

1. Векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
3. Сумму векторов и разность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. Результат изобразить графически.
4. Длину вектора $\vec{b}$.
5. Направляющие косинусы вектора $\vec{b}$.
6. Координаты т. А, если $\overrightarrow{AX} = 2\vec{j} + 4\vec{k}$, $X = (0; -1; 1)$.
7. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ двумя способами.
8. Проверить перпендикулярность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
9. Проверить компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
10. Вычислить объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{AX}$.
11. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{c}$, и угол между векторами.

ВАРИАНТ № 3

Даны векторы: $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$.

Вычислить:

1. Векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
3. Сумму векторов и разность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. Результат изобразить графически.
4. Длину вектора $\vec{b}$.
5. Направляющие косинусы вектора $\vec{b}$.
6. Координаты т. А, если $\overrightarrow{AX} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $X = (0; -1; 1)$.
7. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ двумя способами.
8. Проверить перпендикулярность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
9. Проверить компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
10. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{AX}$.
11. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{c}$, и угол между векторами.

ВАРИАНТ № 4

Даны векторы: $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} + 4\vec{j}$.

Вычислить:

1. Векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
3. Сумму векторов и разность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. Результат изобразить графически.
4. Длину вектора $\vec{b}$.
5. Направляющие косинусы вектора $\vec{b}$.
6. Координаты т. А, если $\vec{AX} = \vec{j} + 2\vec{k}$, $X = (0; -1; 1)$.
7. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ двумя способами.
8. Проверить перпендикулярность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
9. Проверить компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
10. Вычислить объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{AX}$, $\vec{c}$.
11. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{c}$, и угол между векторами.

ВАРИАНТ № 5

Даны векторы: $\vec{a} = -4\vec{i} + 9\vec{j} + 10\vec{k}$, $\vec{b} = 8\vec{i} - 18\vec{j} + 20\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

Вычислить:

1. Векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
3. Сумму векторов и разность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. Результат изобразить графически.
4. Длину вектора $\vec{b}$.
5. Направляющие косинусы вектора $\vec{b}$.
6. Координаты т. А, если $\vec{AX} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $X = (0; -1; 1)$.
7. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ двумя способами.
8. Проверить перпендикулярность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
9. Проверить компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
10. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{AX}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
11. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{c}$, и угол между векторами.

ВАРИАНТ № 6

Даны векторы: $\vec{a} = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{c} = -2\vec{i} + \vec{k}$.

Вычислить:

1. Векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
3. Сумму векторов и разность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. Результат изобразить графически.
4. Длину вектора $\vec{b}$.
5. Направляющие косинусы вектора $\vec{b}$.
6. Координаты т. А, если $\vec{AX} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $X = (0; -1; 1)$.
7. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ двумя способами.
8. Проверить перпендикулярность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
9. Проверить компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
10. Вычислить объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{AX}$, $\vec{c}$.
11. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{c}$, и угол между векторами.

ВАРИАНТ № 7

Даны векторы: $\vec{a} = -2\vec{i} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j}$.

Вычислить:

1. Векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
3. Сумму векторов и разность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. Результат изобразить графически.
4. Длину вектора $\vec{b}$.
5. Направляющие косинусы вектора $\vec{b}$.
6. Координаты т. А, если $\vec{AX} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + 6\vec{k}$, $X = (0; -1; 1)$.
7. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ двумя способами.
8. Проверить перпендикулярность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
9. Проверить компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
10. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{AX}$.
11. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{c}$, и угол между векторами.

ВАРИАНТ № 8

Даны векторы: $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{k}$.

Вычислить:

1. Векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
3. Сумму векторов и разность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. Результат изобразить графически.
4. Длину вектора $\vec{b}$.
5. Направляющие косинусы вектора $\vec{b}$.
6. Координаты т. А, если $\vec{AX} = -3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$, $X = (0; -1; 1)$.
7. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ двумя способами.
8. Проверить перпендикулярность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
9. Проверить компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
10. Вычислить объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{AX}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
11. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{c}$, и угол между векторами.

ВАРИАНТ № 9

Даны векторы: $\vec{a} = -2\vec{i} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = 9\vec{i} - \vec{k}$.

Вычислить:

1. Векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
3. Сумму векторов и разность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. Результат изобразить графически.
4. Длину вектора $\vec{b}$.
5. Направляющие косинусы вектора $\vec{b}$.
6. Координаты т. А, если $\vec{AX} = -3\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $X = (0; -1; 1)$.
7. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ двумя способами.
8. Проверить перпендикулярность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
9. Проверить компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
10. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{AX}$, $\vec{c}$.
11. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{c}$, и угол между векторами.

ВАРИАНТ № 10

Даны векторы: $\vec{a} = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

Вычислить:

1. Векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
3. Сумму векторов и разность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. Результат изобразить графически.
4. Длину вектора $\vec{b}$.
5. Направляющие косинусы вектора $\vec{b}$.
6. Координаты т. А, если $\vec{AX} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $X = (0; -1; 1)$.
7. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ двумя способами.
8. Проверить перпендикулярность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
9. Проверить компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
10. Вычислить объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{AX}$.
11. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{c}$, и угол между векторами.

ВАРИАНТ № 11

Даны векторы: $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 8\vec{k}$.

Вычислить:

1. Векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
3. Сумму векторов и разность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. Результат изобразить графически.
4. Длину вектора $\vec{b}$.
5. Направляющие косинусы вектора $\vec{b}$.
6. Координаты т. А, если $\vec{AX} = 3\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $X = (0; -1; 1)$.
7. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ двумя способами.
8. Проверить перпендикулярность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
9. Проверить компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
10. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{AX}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
11. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{c}$, и угол между векторами.

ВАРИАНТ № 12

Даны векторы: $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 12\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$.

Вычислить:

1. Векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
3. Сумму векторов и разность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. Результат изобразить графически.
4. Длину вектора $\vec{b}$.
5. Направляющие косинусы вектора $\vec{b}$.
6. Координаты т. А, если $\vec{AX} = -\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}$, $X = (0; -1; 1)$.
7. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ двумя способами.
8. Проверить перпендикулярность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
9. Проверить компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
10. Вычислить объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{AX}$, $\vec{c}$.
11. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{c}$, и угол между векторами.

ВАРИАНТ № 13

Даны векторы: $\vec{a} = 9\vec{i} + 18\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

Вычислить:

1. Векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
3. Сумму векторов и разность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. Результат изобразить графически.
4. Длину вектора $\vec{b}$.
5. Направляющие косинусы вектора $\vec{b}$.
6. Координаты т. А, если $\vec{AX} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $X = (0; -1; 1)$.
7. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ двумя способами.
8. Проверить перпендикулярность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
9. Проверить компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
10. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{AX}$.
11. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{c}$, и угол между векторами.

ВАРИАНТ № 14

Даны векторы: $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $2 \cdot \vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

Вычислить:

1. Векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
3. Сумму векторов и разность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. Результат изобразить графически.
4. Длину вектора $\vec{b}$.
5. Направляющие косинусы вектора $\vec{b}$.
6. Координаты т. А, если $\overrightarrow{AX} = 2\vec{j} + 4\vec{k}$, $X = (0; -1; 1)$.
7. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ двумя способами.
8. Проверить перпендикулярность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
9. Проверить компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
10. Вычислить объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\overrightarrow{AX}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
11. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{c}$, и угол между векторами.

ВАРИАНТ № 15

Даны векторы: $\vec{a} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 10\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Вычислить:

1. Векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
3. Сумму векторов и разность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. Результат изобразить графически.
4. Длину вектора $\vec{b}$.
5. Направляющие косинусы вектора $\vec{b}$.
6. Координаты т. А, если $\overrightarrow{AX} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $X = (0; -1; 1)$.
7. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ двумя способами.
8. Проверить перпендикулярность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
9. Проверить компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
10. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\overrightarrow{AX}$, $\vec{c}$.
11. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{c}$, и угол между векторами.

ВАРИАНТ № 16

Даны векторы: $\vec{a} = -6\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k}$.

Вычислить:

1. Векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
3. Сумму векторов и разность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. Результат изобразить графически.
4. Длину вектора $\vec{b}$.
5. Направляющие косинусы вектора $\vec{b}$.
6. Координаты т. А, если $\overrightarrow{AX} = -3\vec{j} + 2\vec{k}$, $X = (0; -1; 1)$.
7. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ двумя способами.
8. Проверить перпендикулярность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
9. Проверить компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
10. Вычислить объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{AX}$.
11. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{c}$, и угол между векторами.

ВАРИАНТ № 17

Даны векторы: $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

Вычислить:

1. Векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
3. Сумму векторов и разность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. Результат изобразить графически.
4. Длину вектора $\vec{b}$.
5. Направляющие косинусы вектора $\vec{b}$.
6. Координаты т. А, если $\overrightarrow{AX} = -\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k}$, $X = (0; -1; 1)$.
7. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ двумя способами.
8. Проверить перпендикулярность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
9. Проверить компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
10. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AX}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
11. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{c}$, и угол между векторами.

ВАРИАНТ № 18

Даны векторы: $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$.

Вычислить.

1. Векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
3. Сумму векторов и разность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. Результат изобразить графически.
4. Длину вектора $\vec{b}$.
5. Направляющие косинусы вектора $\vec{b}$.
6. Координаты т. А, если $\vec{AX} = 5\vec{i} + 3\vec{k}$, $X = (0; -1; 1)$.
7. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ двумя способами.
8. Проверить перпендикулярность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
9. Проверить компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
10. Вычислить объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{AX}$, $\vec{c}$.
11. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{c}$, и угол между векторами.

ВАРИАНТ № 19

Даны векторы: $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 7\vec{j}$.

Вычислить:

1. Векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
3. Сумму векторов и разность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. Результат изобразить графически.
4. Длину вектора $\vec{b}$.
5. Направляющие косинусы вектора $\vec{b}$.
6. Координаты т. А, если $\vec{AX} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$, $X = (0; -1; 1)$.
7. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ двумя способами.
8. Проверить перпендикулярность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
9. Проверить компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
10. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{AX}$.
11. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{c}$, и угол между векторами.

ВАРИАНТ № 20

Даны векторы: $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + 6\vec{j} - \vec{k}$.

Вычислить:

1. Векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
3. Сумму векторов и разность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. Результат изобразить графически.
4. Длину вектора $\vec{b}$.
5. Направляющие косинусы вектора $\vec{b}$.
6. Координаты т. А, если $\vec{AX} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $X = (0; -1; 1)$.
7. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ двумя способами.
8. Проверить перпендикулярность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
9. Проверить компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
10. Вычислить объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{AX}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
11. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{c}$, и угол между векторами.

ВАРИАНТ № 21

Даны векторы: $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$.

Вычислить:

1. Векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
3. Сумму векторов и разность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. Результат изобразить графически.
4. Длину вектора $\vec{b}$.
5. Направляющие косинусы вектора $\vec{b}$.
6. Координаты т. А, если $\vec{AX} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$, $X = (0; -1; 1)$.
7. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ двумя способами.
8. Проверить перпендикулярность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
9. Проверить компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
10. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{AX}$, $\vec{c}$.
11. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{c}$, и угол между векторами.

ВАРИАНТ № 22

Даны векторы: $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$.

Вычислить:

1. Векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
3. Сумму векторов и разность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. Результат изобразить графически.
4. Длину вектора $\vec{b}$.
5. Направляющие косинусы вектора $\vec{b}$.
6. Координаты т. А, если $\vec{AX} = 5\vec{i} + 7\vec{j} + 9\vec{k}$, $X = (0; -1; 1)$.
7. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ двумя способами.
8. Проверить перпендикулярность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
9. Проверить компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
10. Вычислить объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{AX}$.
11. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{c}$, и угол между векторами.

ВАРИАНТ № 23

Даны векторы: $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{c} = -9\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Вычислить:

1. Векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
3. Сумму векторов и разность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. Результат изобразить графически.
4. Длину вектора $\vec{b}$.
5. Направляющие косинусы вектора $\vec{b}$.
6. Координаты т. А, если $\vec{AX} = 3\vec{i} - 5\vec{j} - 7\vec{k}$, $X = (0; -1; 1)$.
7. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ двумя способами.
8. Проверить перпендикулярность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
9. Проверить компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
10. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{AX}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
11. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{c}$, и угол между векторами.

ВАРИАНТ № 24

Даны векторы: $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = 7\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

Вычислить:

1. Векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
3. Сумму векторов и разность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. Результат изобразить графически.
4. Длину вектора $\vec{b}$.
5. Направляющие косинусы вектора $\vec{b}$.
6. Координаты т. А, если $\vec{AX} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $X = (0; -1; 1)$.
7. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ двумя способами.
8. Проверить перпендикулярность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
9. Проверить компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
10. Вычислить объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{AX}$, $\vec{c}$.
11. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{c}$, и угол между векторами.

ВАРИАНТ № 25

Даны векторы: $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $2 \cdot \vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = 7\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}$.

Вычислить:

1. Векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
3. Сумму векторов и разность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. Результат изобразить графически.
4. Длину вектора $\vec{b}$.
5. Направляющие косинусы вектора $\vec{b}$.
6. Координаты т. А, если $\vec{AX} = 2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, $X = (0; -1; 1)$.
7. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ двумя способами.
8. Проверить перпендикулярность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
9. Проверить компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
10. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{AX}$.
11. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{c}$, и угол между векторами.

ВАРИАНТ № 26

Даны векторы: $\vec{a} = 5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$.

Вычислить:

1. Векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
3. Сумму векторов и разность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. Результат изобразить графически.
4. Длину вектора $\vec{b}$.
5. Направляющие косинусы вектора $\vec{b}$.
6. Координаты т. А, если $\vec{AX} = -\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$, $X = (0; -1; 1)$.
7. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ двумя способами.
8. Проверить перпендикулярность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
9. Проверить компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
10. Вычислить объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{AX}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
11. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{c}$, и угол между векторами.

ВАРИАНТ № 27

Даны векторы: $\vec{a} = 5\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

Вычислить:

1. Векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
3. Сумму векторов и разность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. Результат изобразить графически.
4. Длину вектора $\vec{b}$.
5. Направляющие косинусы вектора $\vec{b}$.
6. Координаты т. А, если $\vec{AX} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$, $X = (0; -1; 1)$.
7. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ двумя способами.
8. Проверить перпендикулярность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
9. Проверить компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
10. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{AX}$, $\vec{c}$.
11. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{c}$, и угол между векторами.

ВАРИАНТ № 28

Даны векторы: $\vec{a} = -\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

Вычислить:

1. Векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
3. Сумму векторов и разность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. Результат изобразить графически.
4. Длину вектора $\vec{b}$.
5. Направляющие косинусы вектора $\vec{b}$.
6. Координаты т. А, если $\vec{AX} = 3\vec{i} + 7\vec{j} - 8\vec{k}$, $X = (0; -1; 1)$.
7. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ двумя способами.
8. Проверить перпендикулярность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
9. Проверить компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
10. Вычислить объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{AX}$.
11. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{c}$, и угол между векторами.

ВАРИАНТ № 29

Даны векторы: $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = 4\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$.

Вычислить:

1. Векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
3. Сумму векторов и разность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. Результат изобразить графически.
4. Длину вектора $\vec{b}$.
5. Направляющие косинусы вектора $\vec{b}$.
6. Координаты т. А, если $\vec{AX} = -\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$, $X = (0; -1; 1)$.
7. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ двумя способами.
8. Проверить перпендикулярность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
9. Проверить компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
10. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{AX}$.
11. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{c}$, и угол между векторами.

ВАРИАНТ № 30

Даны векторы: $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 0.5\vec{j} + 2\vec{k}$, $5 \cdot \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Вычислить:

1. Векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
3. Сумму векторов и разность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. Результат изобразить графически.
4. Длину вектора $\vec{b}$.
5. Направляющие косинусы вектора $\vec{b}$.
6. Координаты т. А, если $\vec{AX} = -33\vec{j} + 5\vec{k}$, $X = (0; -1; 1)$.
7. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ двумя способами.
8. Проверить перпендикулярность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.
9. Проверить компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
10. Вычислить объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{AX}$.
11. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{c}$, и угол между векторами.

ГЛАВА III

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Цели

Иметь представление о:

- полярной, декартовой и сферической системе координат;
- переходе из декартовой системы координат в полярную систему координат;
- преобразовании систем координат;
- кардиоде, гиперболической спирали, улитке Паскаля, розах, лемнискате Бернулли, архимедовой спирали;
- видах уравнения прямой на плоскости и в пространстве;
- взаимном расположении плоскостей, прямых, плоскости и прямой в пространстве;
- угле между прямыми, прямой и плоскостью, двумя плоскостями в пространстве;
- вычислении угла между прямыми, прямой и плоскостью, двумя плоскостями в пространстве.

Знать:

- способ задания декартовой, сферической и полярной системы координат;
- переход от декартовой системы координат к полярной системе координат;
- алгоритм преобразования координат при переходе из одной системы координат к другой;
- уравнения в полярных координатах: кардиода, гиперболической спирали, улитки Паскаля, розы, лемниската Бернулли, архимедовой спирали;
- формы записи уравнения прямой на плоскости и в пространстве;
- формы записи уравнения плоскости в пространстве;
- условия параллельности и перпендикулярности двух прямых, двух плоскостей, прямой и плоскости в пространстве;
- взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве, вычисление угла между ними;
- кривые второго порядка на плоскости, алгоритм их построения, свойства;
- уравнения поверхности в пространстве, построение поверхностей методом сечений, их свойства.

Уметь:

Описывать положение точки в полярной, декартовой и сферической системе координат. Переходить от одной системы координат к другой. Записывать уравнение прямой и плоскости в различных формах. Вычислять угол между двумя прямыми, двумя плоскостями, прямой и плоскостью в пространстве, проверять условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей, прямой и плоскости, двух прямых в пространстве. Вычислять расстояние от точки до плоскости, расстояние между двумя точками в пространстве. Проверять принадлежность двух прямых одной плоскости. Вычислять координаты точки, делящей отрезок в заданном соотношении в пространстве. Вычислять расстояние от точки до прямой в пространстве. Находить уравнения кривых второго порядка, строить простейшие поверхности второго порядка методом сечений и записывать их уравнения.

1. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Системой координат является способ, позволяющий численно описать положение точки в пространстве. Существуют различные виды систем координат. Рассмотрим некоторые из них: прямоугольную (декартовую) и полярную системы координат.

1.1. Декартова (прямоугольная) система координат

Система координат задается тремя взаимно перпендикулярными осями (см. рис. 1), пересекающимися в одной точке (т. О) – начале координат. На каждой из осей задаются единичные направляющие векторы – $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, образующие правую тройку векторов. Ось Ох называют осью абсцисс, ось Оу – осью ординат, ось Oz – осью аппликата. Положение любой точки М в декартовой системе координат Охуz задается радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$. Если координаты вектора $\overrightarrow{OM} = \{x; y; z\}$, то координаты точки М(х; у; z). Каждой точке в пространстве соответствует единственный набор координат х, у, z.

На плоскости декартова система координат задается двумя осями – Ох и Оу. Положение любой точки описывается парой чисел х, у.

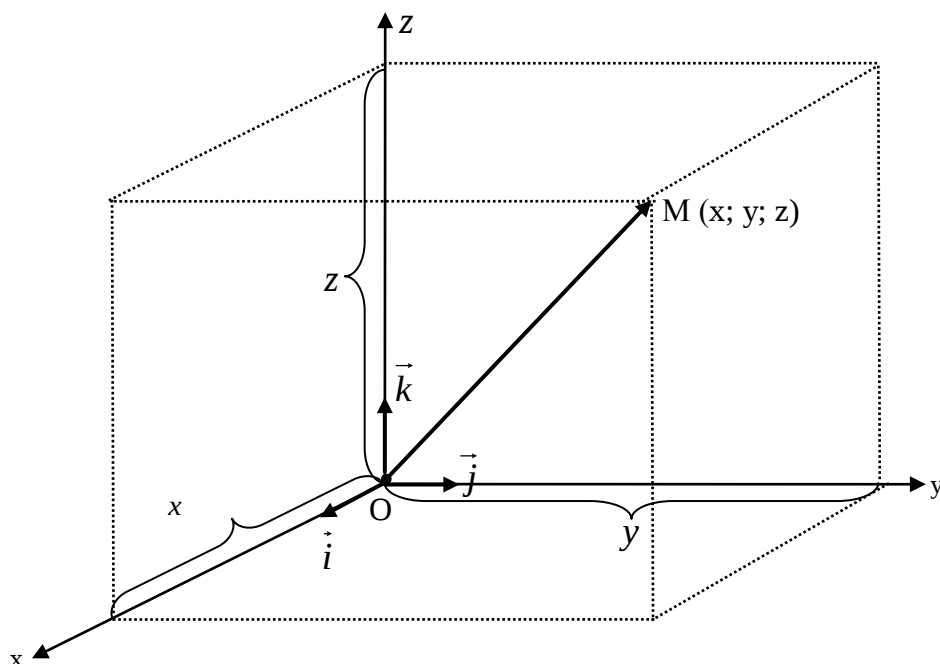


Рис. 1. Изображение декартовой системы координат и задание т. M в пространстве

1.2. Полярная система координат

Полярная система координат задается (см. рис. 2) полюсом (т. O), лучом Op , называемым полярной осью, и единичным вектором $\vec{e}$, который совпадает по направлению с лучом.

Числа r , φ называют полярными координатами точки.

Положение любой точки M (не совпадающей с положением т. O) на плоскости определяется полярным радиусом $\vec{r}$ и полярным углом φ . Отсчет угла φ происходит против движения часовой стрелки от полярной оси. Диапазон изменения полярных координат: $\vec{r} \in [0; \infty)$ ($\varphi \in (-\pi; \pi]$).

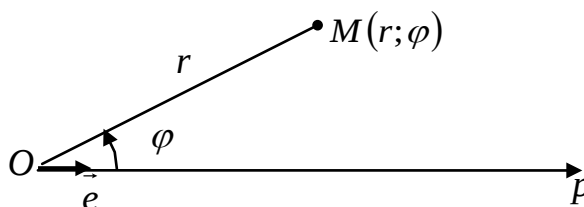


Рис. 2. Изображение полярной системы координат и задание т. M

1.3. Связь между координатами прямоугольной и полярной систем координат

Совместить полюс O с началом координат Oxy (см. рис. 3), полярную ось Op – с положительной осью Ox . Если в декартовой системе координат точка M имеет координаты $(x; y)$, в полярной системе координат – $(\vec{r}; \varphi)$, то из рисунка 3 следует:

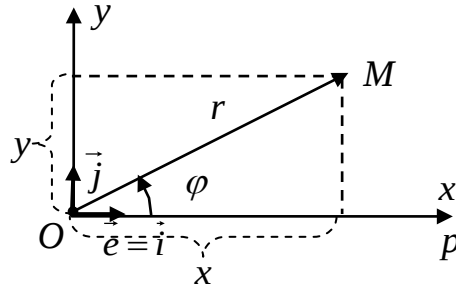


Рис. 3. Связь между декартовой и полярной системами координат

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ x &= r \cdot \cos \varphi = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos \varphi, \\ y &= r \cdot \sin \varphi = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin \varphi \\ \text{следовательно, } \operatorname{tg} \varphi &= \frac{y}{x}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $-\pi < \varphi \leq \pi$. Знак угла устанавливается исходя из того, в какой координатной четверти расположена точка M .

ПРИМЕР.

В декартовой системе координат дана точка $A\left(2; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Найти координаты точки A в полярной системе координат.

РЕШЕНИЕ:

Для нахождения координат точки A в полярной системе координат необходимо использовать формулы перехода от декартовой системы координат к полярной системе координат (1).

По условию задачи координаты точки A – $x = 2$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Следовательно, $r = \sqrt{(2)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{39}}{3}$, $\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

ОТВЕТ: Координаты точки A в полярной системе координат:

$$r = \frac{\sqrt{39}}{3}, \quad \operatorname{tg}(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Для решения задач иногда удобно использовать уравнения некоторых кривых в полярной системе координат, так как уравнения имеют более простой вид.

Кардиоида (см. рис. 4а) – кривая, описываемая точкой M окружности радиуса a , катящейся без скольжения по неподвижной окружности того же радиуса.

Уравнение кардиоиды в полярных координатах:

$$\rho = a \cdot (1 - \cos \varphi) \text{ или } \rho = a \cdot (1 + \cos \varphi), \text{ где } a > 0.$$

Гиперболическая спираль (см. рис. 4б) – кривая, описываемая точкой M , движущейся по вращающейся прямой OA так, что ее расстояние от центра вращения меняется обратно пропорционально углу поворота.

Уравнение гиперболической спирали в полярных координатах:

$$\rho = \frac{a}{\varphi}.$$

Улитка Паскаля (см. рис. 4в) – геометрическое место точек M и M' , расположенных на прямых пучка, центр которого лежит на окружности радиуса R , на расстоянии a по обе стороны от точки P пересечения прямых с окружностью. Улитка Паскаля является частным случаем кардиоиды.

Уравнение улитки Паскаля:

$$\rho = a + 2R \cos \varphi.$$

Розы (см. рис. 4г) – кривые, полярное уравнение которых:

$$\rho = a \cdot \sin(m\varphi); \text{ где } a > 0, m - \text{рациональное число.}$$

Лемниската Бернулли (см. рис. 4д) – кривая, имеющая форму восьмерки.

Уравнение лемниската Бернулли в полярных координатах:

$$\rho^2 = a^2 \cdot \cos(2\varphi).$$

Уравнение лемниската Бернулли в прямоугольной системе координат:

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2 \cdot (x^2 - y^2) = 0, \quad a > 0.$$

Архимедова спираль (см. рис. 4е) – кривая, описываемая точкой, равномерно движущейся по прямой в то время, как эта прямая равномерно вращается в плоскости вокруг точки O .

Уравнение Архимедовой спирали в полярной системе координат:

$$\rho = a \cdot \varphi, \text{ где } a > 0 - \text{постоянная величина.}$$

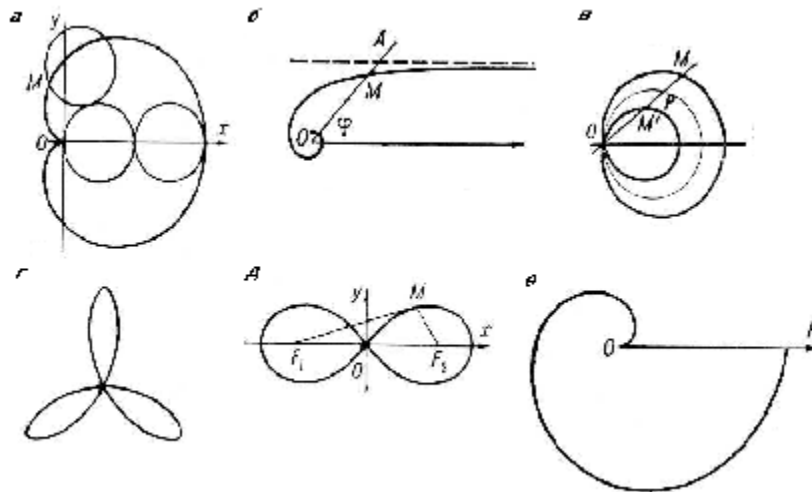


Рис. 4. а) – кардиона;
 б) – гиперболическая спираль;
 в) – улитка Паскаля;
 г) – трехлепестковая роза;
 д) – лемниската Бернулли;
 е) – спираль Архимеда

1.4. Преобразование систем координат

Переход от одной системы координат в другую называется преобразованием систем координат.

Преобразование систем координат имеет практическое применение в различных отраслях науки. Рассмотрим преобразование одной декартовой системы координат в другую.

Преобразование позволяет установить зависимость между координатами любой точки в разных системах координат. Преобразование систем координат можно проводить несколькими способами: параллельным переносом осей координат, поворотом осей координат на угол, параллельным переносом осей координат и поворотом их на угол. Данные преобразования можно выполнять, используя знания из разделов линейной и векторной алгебры. Рассмотрим преобразования систем координат, используя материал раздела «Векторная алгебра».

1. Параллельный перенос осей координат.

Параллельный перенос осей координат – это переход от системы координат Oxy к новой системе координат $O_1x_1y_1$, при котором меняется положение начала координат, а направление и масштаб остаются неизменными (см. рис. 5).

Рассмотрим точку M . В системе координат Oxy точка имеет координаты $(x; y)$, начало координат $O - (0; 0)$. В системе координат $O_1x_1y_1$ точка M имеет координаты $(x'; y')$, начало координат $O_1 - (x_0; y_0)$.

Построим векторы $\overrightarrow{OO_1} = x_0 \cdot \vec{i} + y_0 \cdot \vec{j}$, $\overrightarrow{O_1M} = x' \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j}$,

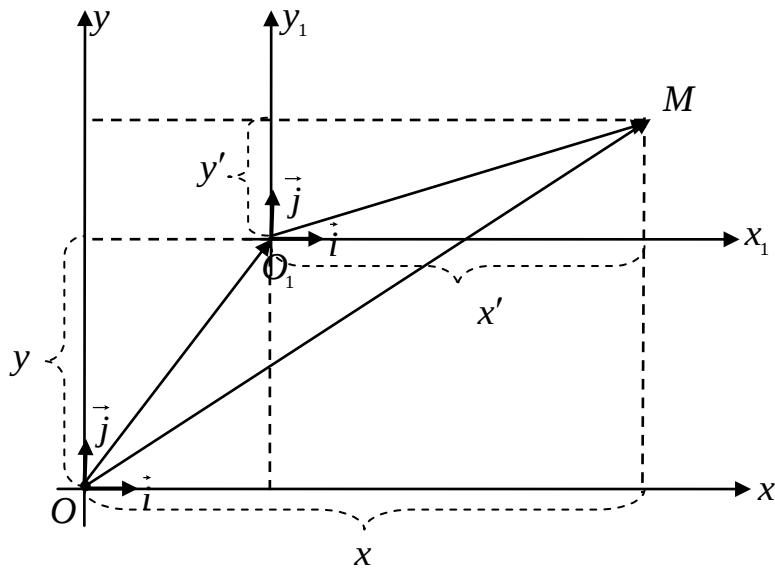


Рис. 5. Преобразование систем координат.
Способ – параллельный перенос осей координат

$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$. По правилу суммы векторов выразим вектор $\overrightarrow{OM}$ через два других вектора: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$.

Или $x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} = x_0 \cdot \vec{i} + y_0 \cdot \vec{j} + x' \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j} = (x_0 + x') \cdot \vec{i} + (y_0 + y') \cdot \vec{j}$. Если равны левые части равенства, то равны и правые. Следовательно,

$$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y'.$$

Это формулы, позволяющие находить координаты точки при переходе из одной декартовой системы в другую, используя параллельный перенос осей координат.

2. Поворот осей координат на угол.

Поворот осей координат – это преобразование координат, при котором обе оси поворачиваются на один и тот же угол, а начало координат и масштаб остаются неизменными.

Рассмотрим систему координат $O_1x_1y_1$ (см. рис. 6), которая получена поворотом на угол α системы координат Oxy . В системе координат Oxy точка M имеет координаты $(x; y)$, в системе координат $O_1x_1y_1$ эта точка имеет координаты $(x'; y')$.

Введем две полярные системы координат с общим полюсом в точке O , полярными осями Ox , Ox_1 , полярными углами $\alpha + \varphi$, φ соответственно и общим полярным радиусом r . Используя формулы перехода от полярной системы координат к декартовой (1), получаем:

$$x = r \cdot \cos(\alpha + \varphi) \quad x = r \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\varphi) - r \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\varphi)$$

$$y = r \cdot \sin(\alpha + \varphi) \quad \text{или} \quad y = r \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\varphi) + r \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\varphi).$$

С другой стороны, координаты точки M в декартовой системе коор-

динат $O_1x_1y_1$ и полярной системе координат связаны соотношением $x' = r \cdot \cos(\varphi)$, следовательно,
 $y' = r \cdot \sin(\varphi)$,

$$\begin{aligned} x &= x' \cdot \cos(\alpha) - y' \cdot \sin(\alpha) \\ y &= x' \cdot \sin(\alpha) + y' \cdot \cos(\alpha) \end{aligned} \quad \text{— формулы поворота осей.}$$

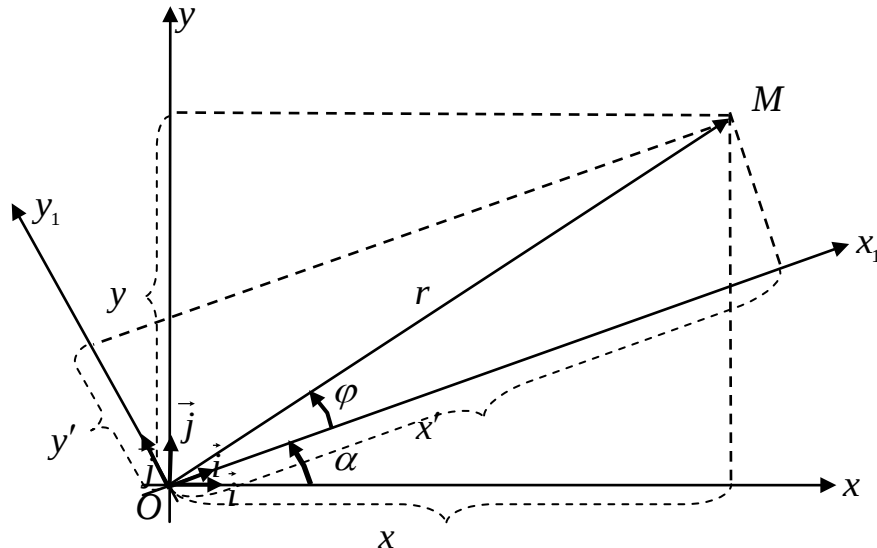


Рис. 6. Преобразование систем координат.
 Способ – поворот осей координат

Формулы позволяют определить координаты точки при переходе из одной декартовой системы координат в другую, поворачивая ее на угол.

3. Параллельный перенос осей координат и поворот их на угол.

Параллельный перенос осей координат и поворот их на угол – это переход от системы координат Oxy к новой системе координат $O_1x_1y_1$, при котором параллельно переносятся оси координат и поворачиваются оси координат на угол α .

$$\begin{aligned} x &= x' \cdot \cos(\alpha) - y' \cdot \sin(\alpha) + x_0 \\ y &= x' \cdot \sin(\alpha) + y' \cdot \cos(\alpha) + y_0 \end{aligned}$$

Это формулы, выражающие координаты произвольной точки M в системе Oxy через координаты новой системы $O_1x_1y_1$ и угол поворота систем координат.

2. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

2.1. Общее уравнение плоскости в пространстве

Общим уравнением плоскости в пространстве называется уравнение вида

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где A, B, C, D – константы, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Если хотя бы один из коэффициентов равен нулю, то уравнение называется неполным уравнением плоскости.

Рассмотрим виды неполных уравнений плоскости:

1) $D = 0$. Уравнение плоскости примет вид $Ax + By + Cz = 0$. Это плоскость, проходящая через начало координат;

2) $C = 0, A \neq 0, B \neq 0, D \neq 0$. Уравнение плоскости примет вид $Ax + By + D = 0$. Это плоскость, параллельная оси Oz , перпендикулярная плоскости Oxy с нормальным вектором плоскости $\vec{n} = \{A; B; 0\}$;

- $B = 0, A \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$. Уравнение плоскости примет вид $Ax + Cz + D = 0$. Это плоскость, параллельная оси Oy , перпендикулярная плоскости Oxz с нормальным вектором плоскости $\vec{n} = \{A; 0; C\}$;

- $A = 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$. Уравнение плоскости примет вид $By + Cz + D = 0$. Это плоскость, параллельная оси Ox , перпендикулярная плоскости Oyz с нормальным вектором плоскости $\vec{n} = \{0; B; C\}$;

3) $C = 0, D = 0, A \neq 0, B \neq 0$. Уравнение плоскости примет вид $Ax + By = 0$. Это плоскость, проходящая через ось Oz с вектором нормали $\vec{n} = \{A; B; 0\}$;

- $A = 0, D = 0, B \neq 0, C \neq 0$. Уравнение плоскости примет вид $By + Cz = 0$. Это плоскость, проходящая через ось Ox с вектором нормали $\vec{n} = \{0; B; C\}$;

- $B = 0, D = 0, A \neq 0, C \neq 0$. Уравнение плоскости примет вид $Ax + Cz = 0$. Это плоскость, проходящая через ось Oy с вектором нормали $\vec{n} = \{A; 0; C\}$;

- $A = 0, B = 0, C \neq 0, D \neq 0$. Уравнение плоскости примет вид $Cz + D = 0$. Это плоскость, параллельная координатной плоскости Oxy с вектором нормали $\vec{n} = \{0; 0; C\}$;

- $B = 0, C = 0, A \neq 0, D \neq 0$. Уравнение плоскости примет вид $Ax + D = 0$. Это плоскость, параллельная плоскости Oyz с вектором нормали $\vec{n} = \{A; 0; 0\}$;

- $A = 0, C = 0, B \neq 0, D \neq 0$. Уравнение плоскости примет вид $By + D = 0$. Это плоскость, параллельная координатной плоскости Oxz с вектором нормали $\vec{n} = \{0; B; 0\}$;

4) $A = 0, B = 0, D = 0, C \neq 0$. Уравнение плоскости примет вид $Cz = 0$. Это уравнение плоскости xOy , проходящей через начало координат с нормальным вектором $\vec{n} = \{0; 0; C\}$;

- $B = 0, C = 0, D = 0, A \neq 0$. Уравнение плоскости примет вид $Ax = 0$. Это уравнение плоскости Oyz , проходящей через начало координат с нормальным вектором $\vec{n} = \{A; 0; 0\}$;
- $A = 0, C = 0, D = 0, B \neq 0$. Уравнение плоскости примет вид $By = 0$. Это уравнение плоскости Oxz , проходящей через начало координат с нормальным вектором $\vec{n} = \{0; B; 0\}$.

ПРИМЕР.

Составить уравнение плоскости, проходящей перпендикулярно оси Ox через точку $K(1; 2; 3)$.

РЕШЕНИЕ:

Уравнение плоскости, проходящей перпендикулярно оси Ox , имеет вид $Ax + D = 0$. Подставив в это уравнение координаты точки K , находим $D = -A$. Теперь подставим значение D в уравнение $Ax + D = 0$, получится $Ax - A = 0$, следовательно, $x = 1$.

ОТВЕТ: Уравнение плоскости, проходящей перпендикулярно оси Ox через точку K , имеет вид $x = 1$.

2.2. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору. Нормальное уравнение плоскости

Пусть дана плоскость α (см. рис. 7), точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$, принадлежащая плоскости, и ненулевой вектор $\vec{n} = \{A; B; C\}$, перпендикулярный плоскости. Необходимо составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\vec{n}$.

Вектор $\vec{n}$ называется нормальным вектором плоскости.

Возьмем любую точку $M(x; y; z)$, принадлежащую плоскости α , и проведем вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$. Так как вектор $\vec{n}$ перпендикулярен плоскости α , а вектор $\overrightarrow{M_0M}$ принадлежит этой плоскости, то векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{n}$ перпендикулярны. Следовательно, их скалярное произведение равно нулю $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$. Или в координатной форме:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) называется уравнением плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{A; B; C\}$.

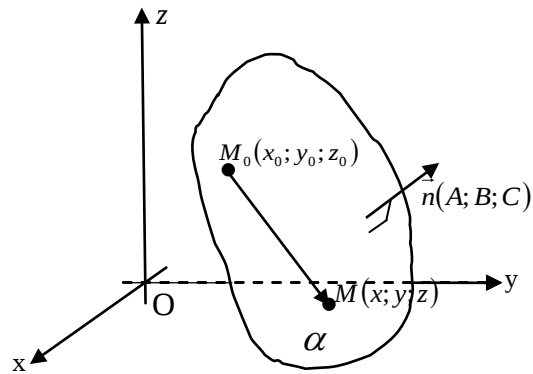


Рис. 7. Плоскость, проходящая через точку перпендикулярно вектору нормали

Если коэффициентам A, B, C придавать различные значения, то будут получаться плоскости, проходящие через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Совокупность плоскостей, проходящих через данную точку, называется связкой плоскостей, а уравнение плоскости, проходящей через данную точку в координатной форме, – уравнением связки плоскостей.

Если в уравнении $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$ в качестве нормального вектора плоскости взять единичный вектор $\vec{n}^0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \{\cos(\alpha); \cos(\beta); \cos(\gamma)\}$, где $\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma)$ – направляющие косинусы, то уравнение плоскости примет вид:

$$\vec{n}^0 \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0.$$

Это нормальное уравнение плоскости. Или в координатной форме:

$$\begin{aligned} (\cos(\alpha); \cos(\beta); \cos(\gamma)) \cdot (x - x_0; y - y_0; z - z_0) &= 0; \\ \cos(\alpha) \cdot (x - x_0) + \cos(\beta) \cdot (y - y_0) + \cos(\gamma) \cdot (z - z_0) &= 0. \end{aligned}$$

Это нормальное уравнение плоскости в координатной форме.

ПРИМЕР.

Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $K(2; 4; 6)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{-4; 1; -7\}$.

РЕШЕНИЕ:

В уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно нормали (2), подставить координаты вектора нормали и точки K . После преобразовать его.

$$\begin{aligned} -4 \cdot (x - 2) + 1 \cdot (y - 4) - 7 \cdot (z - 6) &= 0; \\ 4x - y + 7z - 46 &= 0. \end{aligned}$$

Это уравнение плоскости, проходящей через точку K , перпендикулярно вектору нормали.

ОТВЕТ: $4x - y + 7z - 46 = 0$ – уравнение плоскости, проходящей через точку K перпендикулярно вектору нормали.

2.3. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Через три точки пространства, не лежащие на одной прямой, можно построить единственную плоскость. Найдем уравнение плоскости α , проходящей через три данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, не лежащие на одной прямой (см. рис. 8).

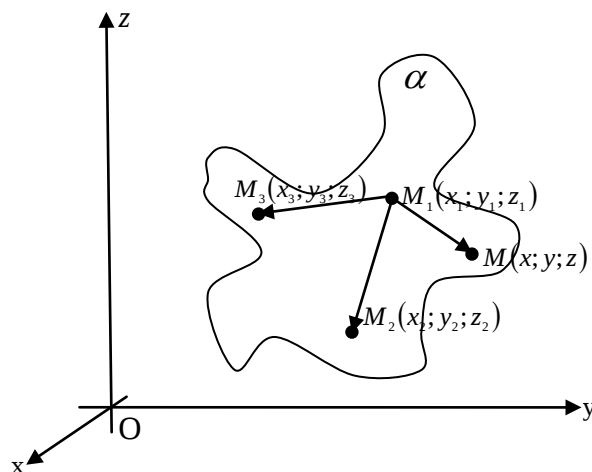


Рис. 8. Плоскость, проходящая через три точки, не лежащие на одной прямой

На плоскости α взять точку $M(x; y; z)$ и составить векторы:

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\},$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\},$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}.$$

Векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ принадлежат одной плоскости, следовательно, они компланарны. По условию компланарности векторов $(\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_1M_2}) \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$, т. е.

$$(\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_1M_2}) \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Это уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.

ПРИМЕР.

Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(0; 1; 2)$, $B(-3; 5; 2)$, $C(-6; -5; -4)$, не лежащие на одной прямой.

РЕШЕНИЕ:

В уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой (3), подставить координаты точек. $x_1 = 0$, $y_1 = 1$, $z_1 = 2$, $x_2 = -3$, $y_2 = 5$, $z_2 = 2$, $x_3 = -6$, $y_3 = -5$, $z_3 = -4$.

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-2 \\ -3-0 & 5-1 & 2-2 \\ -6-0 & -5-1 & -4-2 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -6 & -6 \end{vmatrix} - (y-1) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -6 & -6 \end{vmatrix} + (z-2) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -6 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= -24x - 18y + 42z - 66;$$

$$-24x - 18y + 42z - 66 = 0;$$

$$4x + 3y - 7z + 11 = 0.$$

Это уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.

ОТВЕТ: Уравнение плоскости, проходящей через точки A , B , C , имеет вид: $4x + 3y - 7z + 11 = 0$.

2.4. Уравнение плоскости в отрезках на осях

Рассмотрим получение уравнения плоскости с помощью отсечения осей Ox , Oy , Oz отрезками a , b , c соответственно (см. рис. 9).

На оси Ox отсечем отрезок a и обозначим его OA , на оси Oy отсечем отрезок b и обозначим его OB , на оси Oz отсечем отрезок c и обозначим его OC . Так как точки A , B , C лежат на одной плоскости, то подставляя в уравнение (3) координаты точек A , B , C , получим уравнение плоскости:

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислив определитель, получим

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Это уравнение *плоскости в отрезках на осях*, где a , b , c – это величины отрезков, отсекаемых плоскостью от осей координат.

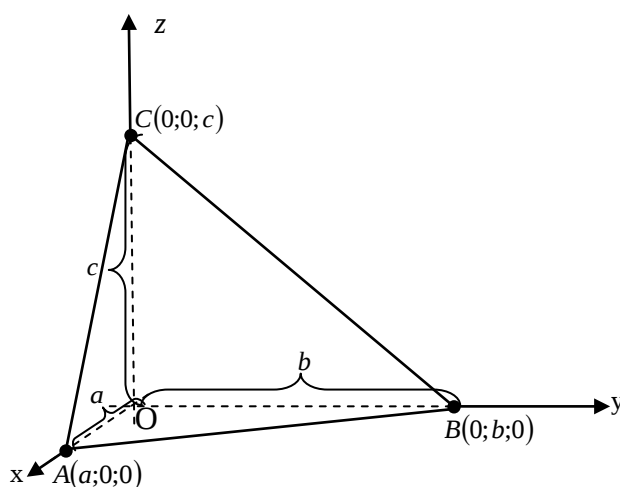


Рис. 9. Плоскость, проходящая через три точки и отсекающая отрезки на осях координат

ПРИМЕР.

Привести уравнение плоскости $2x - y + 3z - 4 = 0$ к уравнению плоскости в отрезках на осях и построить плоскость.

РЕШЕНИЕ:

Преобразовать уравнение плоскости таким образом, чтобы с левой стороны были переменные x, y, z , а с правой стороны – свободная константа.

$$2x - y + 3z - 4 = 0;$$

$$2x - y + 3z = 4.$$

Теперь левую и правую часть уравнения поделить на константу, чтобы с правой стороны осталась единица (т. е. необходимо поделить на 4).

$$2x - y + 3z = 4 : 4$$

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{4} + z \frac{3}{4} = 1.$$

Это уравнение прямой в отрезках, где $a = 2, b = -4, c = 4/3$.

Построим плоскость $Oxyz$ и отметим точки $(2; 0; 0), (0; -4; 0), (0; 0; 4/3)$ (см. рис. 10).

ОТВЕТ: Уравнение плоскости в отрезках имеет вид $\frac{x}{2} - \frac{y}{4} + z \frac{3}{4} = 1$.

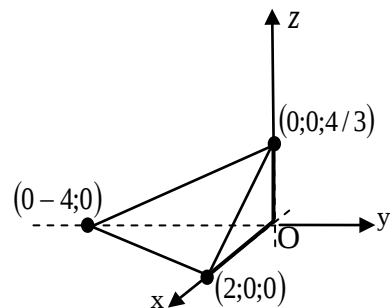


Рис. 10. Плоскость, проходящая через три точки и отсекающая отрезки на осях координат

2.5. Расстояние от точки до плоскости

Дана плоскость α , вектор нормали $\vec{n} = \{A, B, C\}$ и точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$, не принадлежащая плоскости (см. рис. 11). Необходимо вычислить расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости α . Обозначим это расстояние d .

От точки M_0 опустить перпендикуляр на плоскость α . Точку пересечения прямой и плоскости обозначить $M(x; y; z)$. Координаты полученного вектора $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$, а его длина равна расстоянию d . $d = |\overrightarrow{M_0M}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$. Векторы $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярны плоскости α , следовательно, они параллельны друг другу и угол между ними равен 0° или 180° . Вычислим скалярное произведение этих векторов

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = |\overrightarrow{M_0M}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \varphi = \pm d \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}. \text{ Или в координатной}$$

форме $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0)$. Приравняем данные уравнения и преобразуем полученное уравнение

$$\begin{aligned} \pm d \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} &= A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0); \\ \pm d \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} &= Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0). \end{aligned}$$

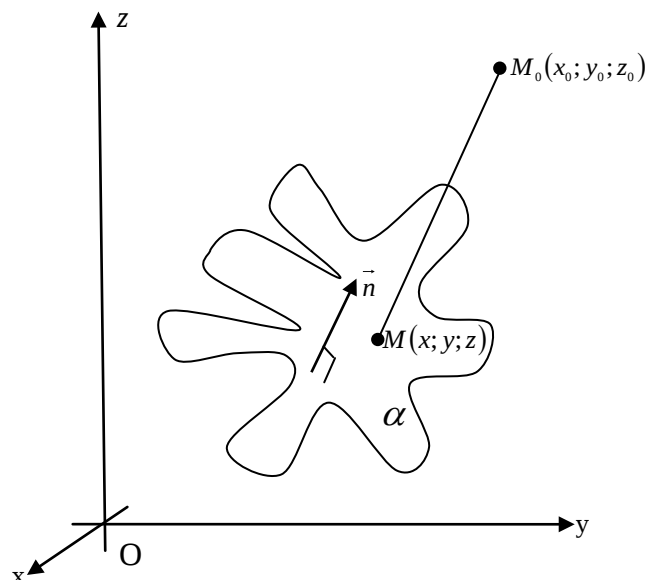


Рис. 11. Расстояние от точки до плоскости

Так как точка $M(x; y; z)$ принадлежит плоскости α , то ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, следовательно, $-D = Ax + By + Cz$. Сделать замену в уравнении, вычисляющем расстояние, и преобразовать полученное уравнение

$$\begin{aligned} \pm d \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} &= -D - (Ax_0 + By_0 + Cz_0); \\ d &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Эта формула позволяет вычислить расстояние от точки с координатами $(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости с координатами вектора нормали $\{A; B; C\}$.

ПРИМЕР.

Вычислить расстояние от точки $K(2; 3; 4)$ до плоскости $2x - y + 3z - 4 = 0$.

РЕШЕНИЕ:

Расстояние от точки до плоскости вычисляется по формуле (4). Координаты точки на плоскости: $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, $z_0 = 4$. Константы уравнения плоскости: $A = 2$, $B = -1$, $C = 3$, $D = -4$. Подставим эти значения в формулу.

$$d = \frac{|2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 4 - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{9}{14} \sqrt{14} \approx 2,41 \text{ ед.}$$

ОТВЕТ: Расстояние от точки K до плоскости равно 2,41 ед.

2.6. Угол между плоскостями.

Условие параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

Пусть дана плоскость α_1 с общим уравнением плоскости $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$, вектором нормали $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ и плоскость α_2 с общим уравнением плоскости $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$, вектором нормали $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ (см. рис. 12а).

Углом между плоскостями называется любой из двух смежных двугранных углов, образованных этими плоскостями.

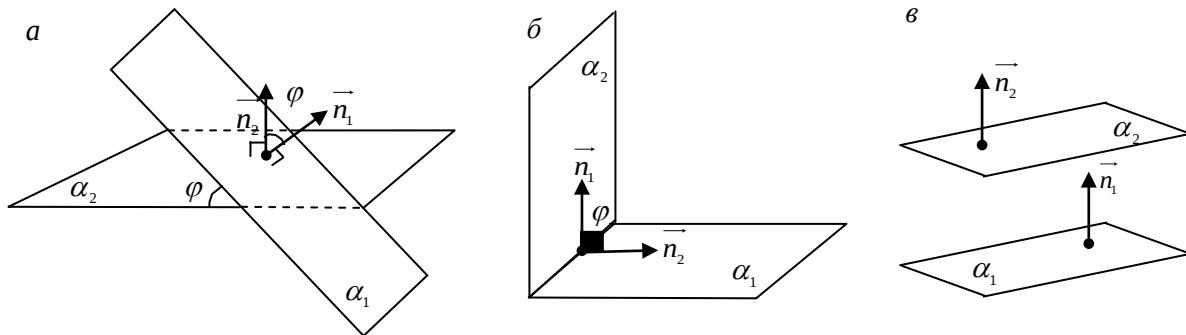


Рис. 12. Угол между двумя плоскостями в пространстве:

а – плоскости пересекаются под тупым или острым углом;

б – угол между плоскостями прямой;

в – угол между плоскостями 0° , 180° или 360° (плоскости параллельны)

Для нахождения угла между плоскостями достаточно найти угол между их нормальными векторами. Таким образом будет найден один из углов между плоскостями.

Из определения скалярного произведения векторов следует,
 $\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$ или в координатной форме

$$\cos \varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (5)$$

Условие перпендикулярности плоскостей. Если две плоскости перпендикулярны (см. рис. 12б), то их нормальные векторы перпендикулярны ($\cos(90^\circ) = 0$). Следовательно,

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0. \quad (6)$$

Условие параллельности плоскостей. Если две плоскости

параллельны, то их нормальные векторы коллинеарны (см. рис. 12в), следовательно, между координатами векторов существует соответствие

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Две плоскости совпадают, если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$.

ПРИМЕР.

Найти угол между плоскостями $\alpha_1 - 2x + 3y - 4z = 7$ и $\alpha_2 - x + y - 2z = 7$.

РЕШЕНИЕ:

Угол между плоскостями α_1, α_2 вычисляется по формуле (5). Координаты вектора нормали плоскости α_1 равны $\{2; 3; -4\}$, координаты вектора нормали плоскости α_2 равны $\{-1; 1; -2\}$, т. е. $A_1 = 2, B_1 = 3, C_1 = -4, A_2 = -1, B_2 = 1, C_2 = -2$. Подставим значения координат векторов нормали в формулу (5):

$$\cos \varphi = \frac{2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + (-4) \cdot (-2)}{\sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (-2)^2}} = \frac{9}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{6}} = \frac{9}{\sqrt{174}} \approx 0,682.$$

ОТВЕТ: Угол между плоскостями α_1, α_2 равен $\varphi \approx 46,98^\circ$.

ПРИМЕР.

Определить, при каком значении k плоскость $3x - 5y + kz + 3 = 0$ перпендикулярна плоскости $x + 3y + 2z + 5 = 0$.

РЕШЕНИЕ:

Координаты вектора нормали первой плоскости $\vec{n}_1 = \{3; 7; 2\}$, координаты вектора нормали второй плоскости $\vec{n}_2 = \{1; -1; k\}$. Подставим координаты векторов $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ в условие перпендикулярности плоскостей (6): $3 \cdot 1 + 7 \cdot (-1) + 2 \cdot k = 0$. Следовательно, $k = 2$.

ОТВЕТ: Плоскости $3x - 5y + kz + 3 = 0$ и $x + 3y + 2z + 5 = 0$ взаимно перпендикулярны при $k = 2$.

ПРИМЕР.

Составить уравнение плоскости α_1 , проходящей через точку $K(0; 2; 3)$ параллельно плоскости $\alpha_2 - x + 3y + 2z + 5 = 0$.

РЕШЕНИЕ:

Так как плоскость α_1 параллельна плоскости α_2 , то их нормальные векторы коллинеарны. Следовательно, вектор нормали плоскости α_2 может иметь координаты $\{1; 3; 2\}$.

Воспользоваться общим уравнением плоскости (2):

$$1 \cdot (x - 0) + 3 \cdot (y - 2) + 2 \cdot (z - 3) = 0;$$

$$x + 3y + 2z - 12 = 0.$$

ОТВЕТ: Уравнение плоскости, проходящей через точку K , параллельно плоскости α_2 имеет вид $x + 3y + 2z - 12 = 0$.

ПРИМЕР:

Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; -1; 3)$ и параллельной векторам $\vec{a} = \{1; 2; 3\}$ и $\vec{b} = \{4; 0; 5\}$.

РЕШЕНИЕ:

Координаты вектора нормали плоскости α можно найти из определения векторного произведения векторов. Векторное произведение двух векторов есть третий вектор, перпендикулярный к векторам-сомножителям, следовательно,

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 10\vec{i} + 7\vec{j} - 8\vec{k}.$$

Подставить координаты вектора нормали и точки M в общее уравнение плоскости (2):

$$10 \cdot (x - 2) + 7 \cdot (y + 1) - 8 \cdot (z - 3) = 0;$$

$$10x + 7y - 8z + 11 = 0.$$

ОТВЕТ: Уравнение плоскости, проходящей через точку M и параллельной векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеет вид $10x + 7y - 8z + 11 = 0$.

ПРИМЕР.

Составить уравнение плоскости α_2 , проходящей через точки $A(2; 4; -1)$ и $B(9; 1; 1)$ и перпендикулярной плоскости α_1 , заданной уравнением $3x + y - 2z + 1 = 0$.

РЕШЕНИЕ:

На рисунке 13 схематично изображены плоскости α_1 и α_2 . Чтобы составить уравнение плоскости α_2 , необходимо найти координаты ее вектора нормали. Через точки A , B , принадлежащие плоскости α_2 , проведем вектор $\overrightarrow{AB}$. Из условий задачи следует, вектор $\vec{n}_1$ перпендикулярен вектору

$\overrightarrow{AB} = \{7; -3; 2\}$. Следовательно, координаты вектора нормали $\vec{n}_2$ можно найти из определения векторного произведения векторов $\vec{n}_2 = \vec{n}_1 \times \overrightarrow{AB}$:

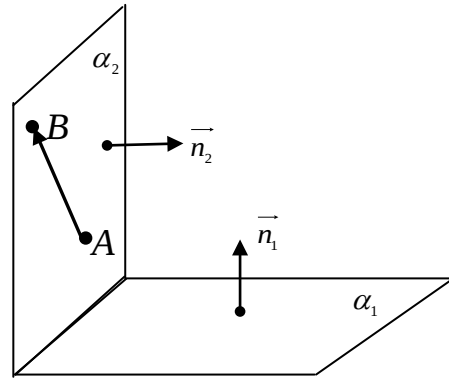


Рис. 13. Две взаимно перпендикулярные плоскости

$$\vec{n}_2 = \vec{n}_1 \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 7 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot (2 - 6) - \vec{j} \cdot (6 + 14) + \vec{k} \cdot (-9 - 7) = -4\vec{i} - 20\vec{j} - 16\vec{k}.$$

Следовательно, $\vec{n}_2 = (-4; -20; -16)$.

Воспользуемся общим уравнением плоскости (2). Координаты точки, принадлежащей данной плоскости, могут быть взяты как координаты точки A , так и координаты точки B .

$$\begin{aligned} -4 \cdot (x - 2) - 20 \cdot (y - 4) - 16 \cdot (z + 1) &= 0; \\ x + 5y + 4z - 18 &= 0. \end{aligned}$$

ОТВЕТ: Уравнение плоскости, проходящей через точки A , B , перпендикулярно плоскости α_1 и имеет вид $x + 5y + 4z - 18 = 0$.

3. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

3.1. Формы записи уравнения прямой на плоскости

Формы записи уравнения прямой на плоскости известны из школьной программы. Перечислим основные из них.

Общим уравнением линии (кривой) на плоскости Oxy называется такое уравнение первой степени $F(x; y) = 0$ с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты x , y каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Переменные x , y называются текущими координатами точек линии.

Простейшим примером линии является прямая. Общее уравнение прямой первой степени относительно x и y имеет вид:

$$Ax + By + C = 0,$$

где A , B , C – действительные числа, такие что $A^2 + B^2 > 0$.

Рассмотрим частные случаи общего уравнения прямой:

1) $C = 0$, $B \neq 0$. Уравнение прямой примет вид $Ax + By = 0$ или $y = -\frac{A}{B}x$ (см. рис. 14, прямая AA_1). Прямая проходит через начало координат;

2) $B = 0$, $A \neq 0$. Уравнение прямой примет вид $Ax + C = 0$ или $x = -\frac{C}{A}$ (см. рис. 14, прямая BB_1). Прямая параллельна оси Oy и перпендикулярна оси Ox ;

3) $A = 0$, $B \neq 0$. Уравнение прямой примет вид $By + C = 0$ или

$y = -\frac{C}{B}$ (см. рис. 14, прямая CC_1). Прямая параллельна оси Ox и перпендикулярна оси Oy ;

4) $C = 0$, $B = 0$. Уравнение прямой примет вид $Ax = 0$ (см. рис. 14, прямая DD_1). Прямая проходит вдоль оси Oy ;

5) $C = 0$, $A = 0$. Уравнение прямой примет вид $Bx = 0$ (см. рис. 14, прямая EE_1). Прямая проходит вдоль оси Ox ;

6) $B \neq 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$. Уравнение прямой примет вид $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$.

Если $b = -\frac{C}{B}$, $k = \operatorname{tg}(\alpha) = -\frac{A}{B}$, то уравнение прямой примет вид $y = \operatorname{tg}\alpha + b$ или $y = kx + b$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом, где число $k = \operatorname{tg}(\alpha)$ называется угловым коэффициентом прямой. Вывод данного уравнения легко получить из рисунка 14, он был рассмотрен в курсе школьной программы математики (точка M – точка, принадлежащая прямой).

- Уравнение прямой в отрезках (см. рис. 15)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где a – отрезок, отсекаемый прямой l от оси Ox ,

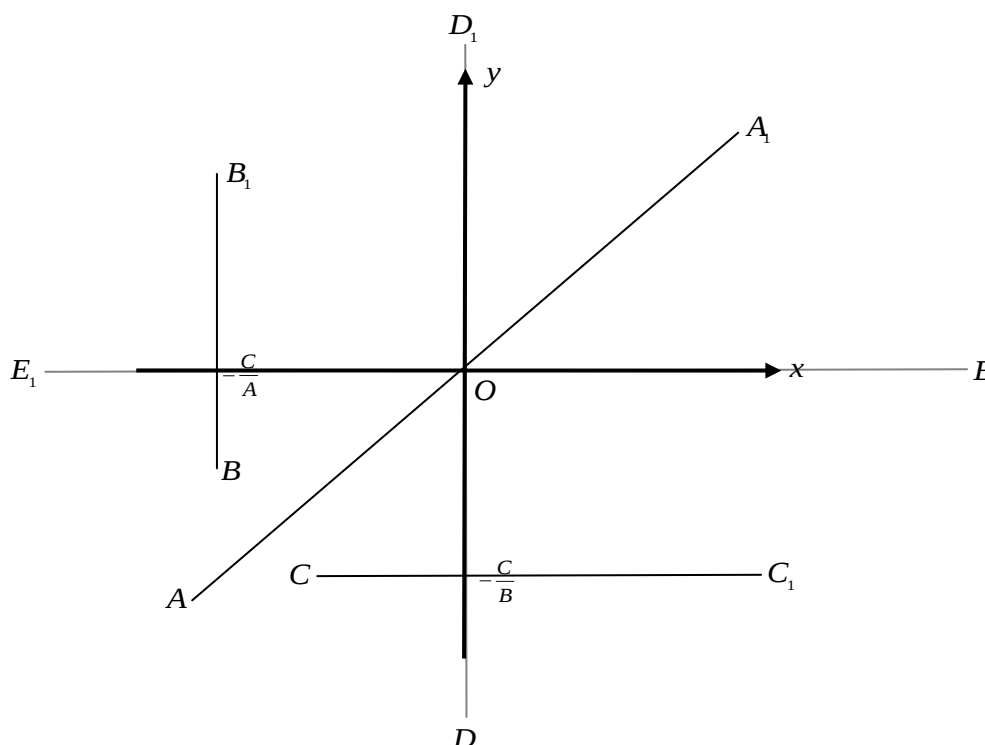


Рис. 14. Частные случаи общего уравнения прямой:

AA_1 – прямая проходит через начало координат;

BB_1 – прямая параллельна оси Oy и перпендикулярна оси Ox ;

CC_1 – прямая параллельна оси Ox и перпендикулярна оси Oy ;

DD_1 – прямая проходит вдоль оси Oy ;

EE_1 – прямая проходит вдоль оси Ox

b – отрезок, отсекаемый прямой l от оси Oy .

- Уравнение прямой l , проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0)$ в данном направлении (см. рис. 15)

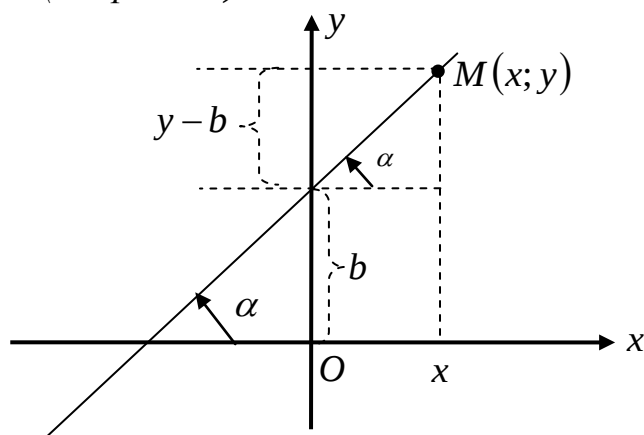


Рис. 15. Прямая на плоскости, заданная через угловой коэффициент

$$y = y_0 + k \cdot (x - x_0).$$

- Уравнение прямой l , проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ (см. рис. 16)

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

- Уравнение прямой l , проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно заданному вектору $\vec{n} = (A; B)$ (см. рис. 16)

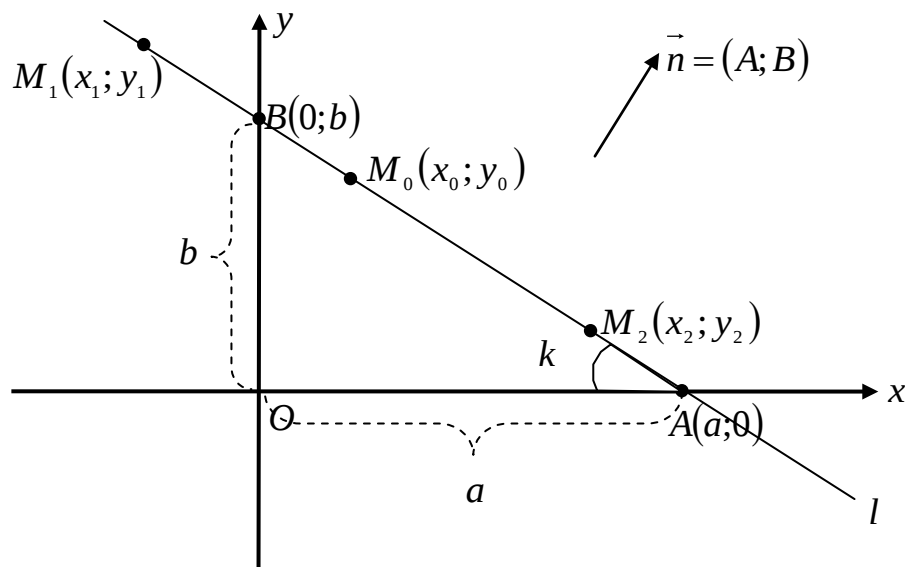


Рис. 16. Прямая на плоскости

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0.$$

- Полярное уравнение прямой (см. рис. 17)

$$r \cdot \cos(\varphi - \alpha) = p,$$

где p – расстояние от полюса O до данной прямой;
 α – угол между полярной осью OP и прямой l ;
 r – полярный радиус;
 φ – полярный угол.

- Нормальное уравнение прямой (см. рис. 18)

$$x \cdot \cos(\alpha) + y \cdot \sin(\alpha) - p = 0,$$

где α – угол между осью абсцисс и p .

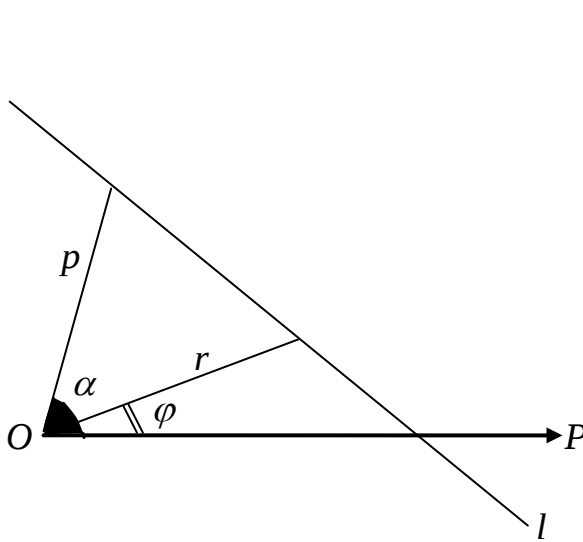


Рис. 17. Прямая на плоскости в полярной системе координат

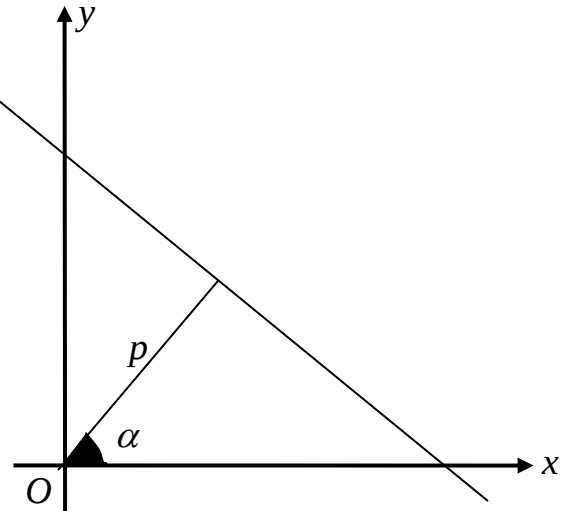


Рис. 18. Прямая на плоскости, заданная нормальным уравнением

Угол между прямыми l_1 и l_2 (см. рис. 19). Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых.

Угол между двумя прямыми можно вычислить, зная их угловые коэффициенты

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2},$$

где k_1 – угловой коэффициент прямой l_1 ;

k_2 – угловой коэффициент прямой l_2

Условие параллельности двух прямых: $k_1 = k_2$.

Условие перпендикулярности двух прямых: $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Расстояние от точки до прямой (см. рис. 20):

$$d = \frac{|Ax_3 + By_3 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

где $(x_1; y_1)$ – координаты точки, от которой необходимо вычислить расстояние до прямой.

Вид уравнения прямой, для которой вычисляют расстояние $Ax + By + C = 0$,

где A, B – константы.

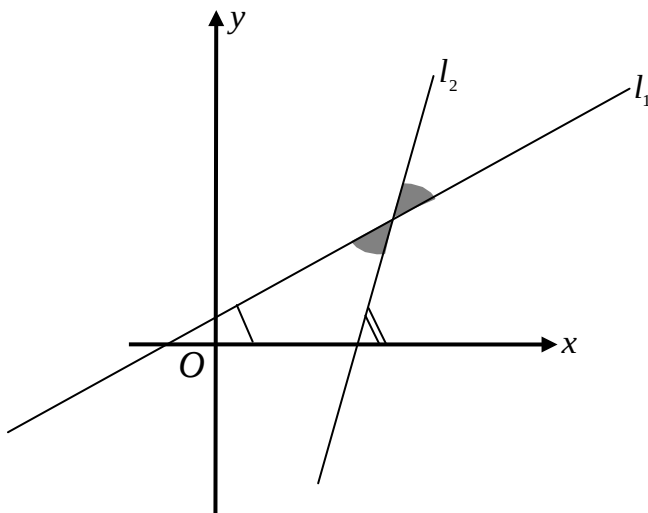


Рис. 19. Угол между двумя прямыми на плоскости

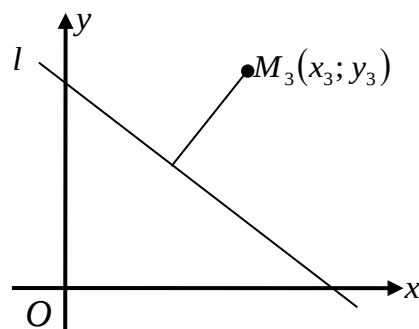


Рис. 20. Расстояние от точки до прямой

3.2. Уравнение прямой в пространстве. Уравнение прямой в векторной форме

Положение прямой в пространстве можно задать точкой, принадлежащей прямой, и направляющим вектором. Направляющий вектор — это вектор, параллельный прямой. На рисунке 21 изображена прямая l , положение которой можно задать точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и направляющим вектором $\vec{s} = \{m, n, p\}$.

Возьмем на прямой l произвольную точку $M(x; y; z)$ и проведем вектор $\overrightarrow{M_0M}$, тогда его координаты $\{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$. Так как прямая l параллельна направляющему вектору $\vec{s}$, то векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{s}$ коллинеарны. Следовательно, для любого положения точки M справедливо равенство:

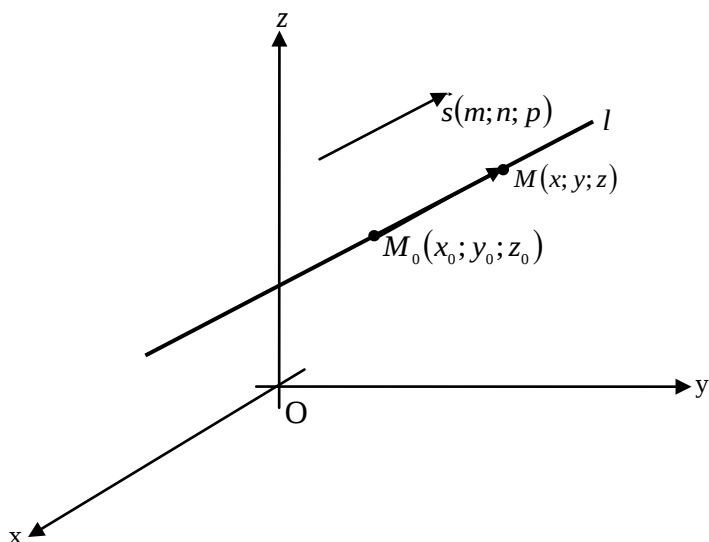


Рис. 21. Прямая l и направляющий вектор $\vec{s}$ в пространстве

$\overrightarrow{MM_0} = \vec{s} \cdot t$.

Это уравнение прямой в векторной форме, где t — параметр, зависящий от координат точки M .

3.3. Параметрическое и каноническое уравнение прямой

Запишем уравнение прямой в векторной форме через координаты векторов

$$(x - x_0) \cdot \underline{i} + (y - y_0) \cdot \underline{j} + (z - z_0) \cdot \underline{k} = (m \cdot \underline{i} + n \cdot \underline{j} + p \cdot \underline{k}) \cdot t$$

$$(x - x_0) \cdot \underline{i} + (y - y_0) \cdot \underline{j} + (z - z_0) \cdot \underline{k} = mt \cdot \underline{i} + nt \cdot \underline{j} + pt \cdot \underline{k}$$

Равенство справедливо, когда равны левые и правые части. Следовательно,

$$(7) \quad \begin{cases} x - x_0 = mt \\ y - y_0 = nt \\ z - z_0 = pt \end{cases} \text{ Из этих уравнений следует } \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} - \text{параметрическое уравнение прямой.}$$

$$(8) \quad \text{И } \begin{cases} \frac{x - x_0}{m} = t \\ \frac{y - y_0}{n} = t \\ \frac{z - z_0}{p} = t \end{cases} \text{ Исключая параметр } t, \text{ получаем}$$

$$(8) \quad \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} - \text{каноническое уравнение прямой.}$$

В этих уравнениях точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – фиксированная точка, принадлежащая прямой, и вектор $\vec{s} = \{m; n; p\}$ – направляющий вектор прямой. Координаты вектора $\vec{s}$ называются угловыми коэффициентами прямой. Если направляющий вектор единичный, то $m = \cos \alpha$, $n = \cos \beta$, $p = \cos \gamma$, где α , β , γ – углы, образованные вектором с осями Ox , Oy , Oz .

Замечание. В каноническом уравнении прямой числа m , n , p могут принимать любые значения, кроме одновременного равенства нулю.

Если дано каноническое уравнение прямой, перпендикулярной оси Oy – $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{p}$, направляющий вектор которой $\vec{s} = (m, 0, p)$ перпендикулярен оси Oy , то параллельная вектору $\vec{s}$ прямая перпендикулярна этой же оси Oy . А каноническое уравнение прямой

$$\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{0} \text{ перпендикулярно плоскости } Oxz.$$

ПРИМЕР.

Записать уравнение прямой l , проходящей через точку $A(2; 3; -1)$ параллельно вектору $\vec{s} = \{-3; 7; 1\}$, в параметрическом и каноническом виде. Определить, принадлежит ли точка $B(-1; -4; -12)$ прямой l .

РЕШЕНИЕ:

Используем уравнения прямой в параметрическом виде (7) и каноническом виде (8). По условию задачи $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, $z_0 = -1$, $m = -3$, $n = 7$, $p = 1$. Следовательно, уравнение прямой l в параметрической форме записи имеет вид:

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 3 + 7t, \\ z = -1 + t \end{cases}$$

в канонической форме записи имеет вид:

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y-3}{7} = \frac{z+1}{1}.$$

Если точка $B(-1; -4; -12)$ принадлежит прямой l , то при подстановке ее координат (вместо $(x; y; z)$) в уравнение прямой должно получиться верное равенство. Проверить это условие.

$$\frac{-1-2}{-3} \neq \frac{-4-3}{7} \neq \frac{-12+1}{1}. \text{ Равенство не выполняется, следовательно,}$$

точка B не принадлежит прямой l .

ОТВЕТ: Уравнение прямой l , проходящей через точку A , в

параметрической форме записи имеет вид $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 3 + 7t, \\ z = -1 + t \end{cases}$ в канонической

форме записи имеет вид $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-3}{7} = \frac{z+1}{1}$. Точка B не принадлежит прямой l .

ПРИМЕР.

Составить параметрическое и каноническое уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $M_0(-1; -3; -5)$.

РЕШЕНИЕ:

Любую прямую можно провести через две точки. Прямая всегда параллельна направляющему вектору. Следовательно, координаты направляющего вектора совпадут с координатами вектора $\overrightarrow{OM_0} = \{-1-0; -3-0; -5-0\} = \{-1; -3; -5\}$.

Подставить исходные данные в уравнение (7), тогда уравнение

прямой в параметрической форме записи будет иметь вид

$$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = -3 - 3t \\ z = -5 - 5t \end{cases}$$

В канонической форме записи (8) уравнение прямой будет иметь вид

$$\frac{x - (-1)}{-1} = \frac{y - (-3)}{-3} = \frac{z - (-5)}{-5} \text{ или } \frac{x + 1}{-1} = \frac{y + 3}{-3} = \frac{z + 5}{-5}.$$

ОТВЕТ: Уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку M_0 , в канонической форме записи имеет вид $\frac{x + 1}{-1} = \frac{y + 3}{-3} = \frac{z + 5}{-5}$, в

параметрической форме записи имеет вид $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = -3 - 3t \\ z = -5 - 5t \end{cases}$.

ПРИМЕР.

Составить уравнение прямой l_3 в параметрическом виде, проходящей через точку $M_0(-1; 3; 4)$ перпендикулярно прямым l_1 и l_2 .

Уравнение прямой l_1 имеет вид $\frac{x - 1}{3} = \frac{y + 2}{4} = \frac{z - 3}{-2}$, уравнение прямой l_2

имеет вид $\begin{cases} x = 2 - 7t \\ y = -3 + 2t \\ z = 6 - 7t \end{cases}$.

РЕШЕНИЕ:

Из условий задачи следует: направляющий вектор прямой l_1 имеет координаты $\{3; 4; -2\}$, направляющий вектор прямой l_2 имеет координаты $\{-7; 2; -7\}$.

Так как прямая l_3 перпендикулярна прямым l_1 и l_2 , то ее направляющий вектор можно вычислить из определения векторного произведения векторов.

$$\begin{aligned} \vec{s}_3 = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & -2 \\ -7 & 2 & -7 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -7 & -7 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot (-28 + 4) - \\ &- \vec{j} \cdot (-21 - 14) + \vec{k} \cdot (6 + 28) = -24\vec{i} + 35\vec{j} + 34\vec{k}. \end{aligned}$$

Тогда уравнение прямой l_3 , проходящей через точку $M_0(-1; 3; 4)$ параллельно вектору $\vec{s}_3 = \{-24; 35; 34\}$, имеет вид $\begin{cases} x = -1 - 24t \\ y = 3 + 35t \\ z = 4 + 34t \end{cases}$.

ОТВЕТ: Уравнение прямой, проходящей через точку M_0 перпендикулярно прямым l_1, l_2 , имеет вид
$$\begin{cases} x = -1 - 24t \\ y = 3 + 35t \\ z = 4 + 34t \end{cases}.$$

3.4. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Рассмотрим прямую l (см. рис. 22) в пространстве, проходящую через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ с направляющим вектором $\vec{s}$, равным вектору $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$. Тогда координаты вектора $\vec{s}$ равны:

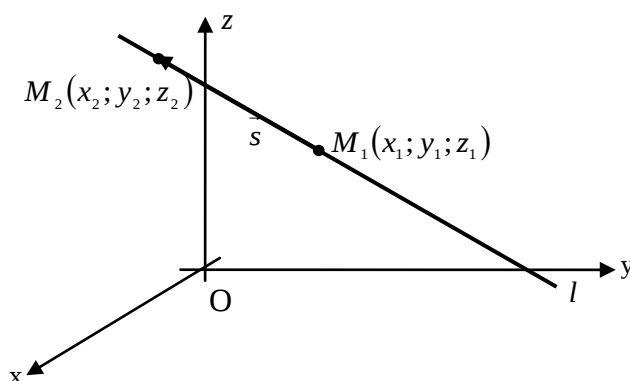


Рис. 22. Прямая l и направляющий вектор $\vec{s}$ в пространстве

$m = x_2 - x_1$, $n = y_2 - y_1$, $p = z_2 - z_1$. Каноническое уравнение прямой для точки M_1 имеет вид $\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$, подставить в это уравнение координаты направляющего вектора, тогда

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (9)$$

Это каноническое уравнение прямой, проходящей через две точки в пространстве.

ПРИМЕР.

Найти уравнение прямой в пространстве, проходящей через точки $A(2; 4; 6)$ и $B(-1; 0; -3)$.

РЕШЕНИЕ:

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки (9). Координаты точки A – это координаты точки $(x_1; y_1; z_1)$, координаты точки B – это координаты точки $(x_2; y_2; z_2)$. Подставить координаты точек A, B в исходное уравнение

$$\frac{x-2}{-1-2} = \frac{y-4}{0-4} = \frac{z-6}{-3-6} \quad \text{или} \quad \frac{x-2}{-3} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z-6}{-9}.$$

ОТВЕТ: Уравнение прямой, проходящей через точки A, B , имеет вид $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z-6}{-9}$.

3.5. Общее уравнение прямой в пространстве

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей (см. рис. 23).

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad \text{— общее}$$

уравнение прямой,

где плоскость α задана уравнением $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и нормальным вектором $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$, плоскость β задана уравнением $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ и нормальным вектором $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$

Так как прямая l перпендикулярна векторам $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, то из определения векторного произведения векторов следует, $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ или

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}. \quad (10)$$

ПРИМЕР.

Составить уравнение прямой, проходящей через пересечение двух плоскостей $\begin{cases} 2x + y + 3z + 5 = 0 \\ 7y + 6z + 4 = 0 \end{cases}$, и точку $A(-3; 2; 6)$.

РЕШЕНИЕ:

Из условий задачи следует $\vec{n}_1 = \{2; 1; 3\}$, $\vec{n}_2 = \{0; 7; 6\}$. Координаты направляющего вектора можно вычислить по формуле (10).

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -15\vec{i} - 12\vec{j} + 14\vec{k}.$$

Запишем уравнение прямой, проходящей через точку

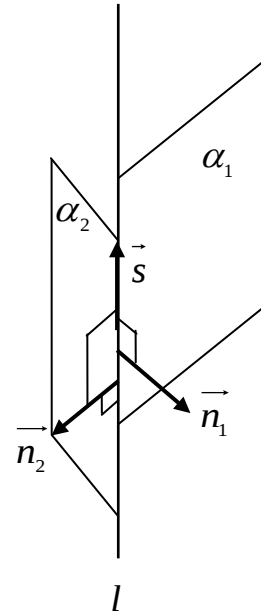


Рис. 23. Прямая l в пространстве, заданная как линия пересечения двух непараллельных плоскостей

$A(-3; 2; 6)$ параллельно вектору $\vec{s} = \{-15; -12; 14\}$, в параметрическом или каноническом виде: $\frac{x+3}{-15} = \frac{y-2}{-12} = \frac{z-6}{14}$.

ОТВЕТ: Уравнение прямой, проходящей через пересечение двух плоскостей и точку A , имеет вид $\frac{x+3}{-15} = \frac{y-2}{-12} = \frac{z-6}{14}$.

3.6. Угол между двумя прямыми.

Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Углом между двумя прямыми в пространстве называется любой из углов, образованных двумя прямыми.

Рассмотрим две пересекающиеся в пространстве прямые l_1, l_2 (см. рис. 24) и соответствующие им направляющие векторы $\vec{s}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$, $\vec{s}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$. Так как прямые параллельны своим направляющим векторам, то угол между прямыми l_1, l_2 – это угол между их направляющими векторами $\vec{s}_1, \vec{s}_2$.

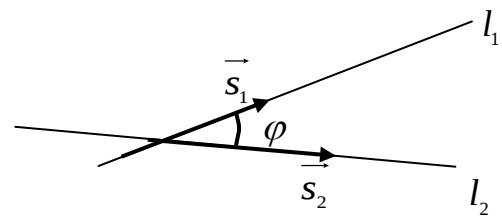


Рис. 24. Пересечение прямых l_1 и l_2 в пространстве

Из определения скалярного произведения векторов следует:

$$\cos \phi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \quad (11)$$

Если прямые l_1, l_2 параллельны, то коллинеарны их направляющие векторы и пропорциональны координаты векторов

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} = \lambda. \quad (12)$$

Если прямые l_1, l_2 перпендикулярны, то перпендикулярны их направляющие векторы, т. е. $\phi = 90^\circ$, следовательно,

$$m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2 = 0. \quad (13)$$

ПРИМЕР.

Вычислить угол между двумя прямыми $\frac{x+3}{-15} = \frac{y-2}{-12} = \frac{z-6}{14}$ и

$\begin{cases} x = -1 - 24t \\ y = 3 + 35t \\ z = 4 + 34t \end{cases}$ и ответить на вопрос, параллельны или перпендикулярны прямые.

РЕШЕНИЕ:

Из условий задачи следует: координаты первого направляющего вектора равны $\{-15; -12; 14\}$, координаты второго направляющего вектора равны $\{-24; 35; 34\}$. Угол между двумя прямыми в пространстве вычислим, используя формулу (11). Подставим координаты направляющих векторов в формулу $\cos \phi = \frac{-15 \cdot (-24) - 12 \cdot 35 + 14 \cdot 34}{\sqrt{(-15)^2 + (-12)^2 + (14)^2} \cdot \sqrt{(-24)^2 + (35)^2 + (34)^2}} \approx 0,3218$.

ОТВЕТ: $\phi \approx 71, 23^\circ$. Следовательно, прямые не параллельны и не перпендикулярны.

ПРИМЕР.

Доказать, что прямые $\frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-5}{2}$ и $\frac{x}{2} = \frac{y+6}{-3} = \frac{z-7}{4}$ перпендикулярны.

РЕШЕНИЕ:

Две прямые перпендикулярны тогда, когда угол между ними равен 90° , выполняется соотношение (13).

Из условий задачи следует: координаты направляющего вектора первой прямой $\vec{s}_1 = \{5; 6; 2\}$, координаты направляющего вектора второй прямой $\vec{s}_2 = \{2; -3; 4\}$. Подставить их в условие (13)

$$\begin{aligned} 5 \cdot 2 + 6 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 &= 0; \\ 10 - 18 + 8 &= 0; \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Равенство выполняется, следовательно, прямые перпендикулярны.

ОТВЕТ: Прямые $\frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-5}{2}$, $\frac{x}{2} = \frac{y+6}{-3} = \frac{z-7}{4}$ перпендикулярны.

3.7. Условие принадлежности двух прямых одной плоскости

Даны две прямые l_1 и l_2 (см. рис. 25), заданные каноническими уравнениями $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$, $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$. Прямым соответствуют направляющие векторы $\vec{s}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$ и $\vec{s}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$ соответственно (см. рис. 23). Пусть прямая l_1 проходит через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$, прямая l_2 проходит через точку $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Проведем радиус-векторы из точки O в точку M_1 ($\vec{r}_1$) и из точки O в точку M_2 ($\vec{r}_2$), тогда, по правилу разности векторов, $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$. Прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости, если векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$, компланарны, т. е. их смешанное произведение равно нулю

$$(\overrightarrow{M_1 M_2} \times \vec{s}_1) \cdot \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (14)$$

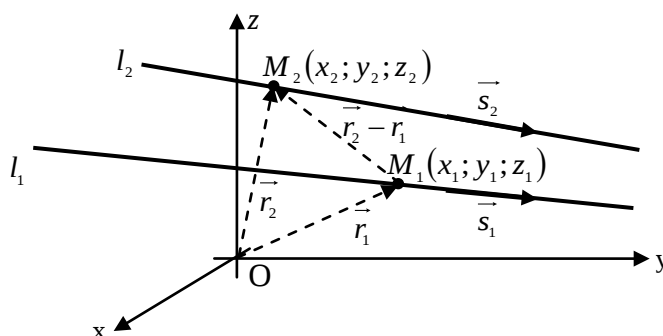


Рис. 25. Прямые l_1 и l_2 , лежащие в одной плоскости

ПРИМЕР.

Проверить, принадлежат ли прямые $\frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-5}{2}$, $\frac{x}{2} = \frac{y+6}{-3} = \frac{z-7}{4}$ одной плоскости или нет.

РЕШЕНИЕ:

Две прямые принадлежат одной плоскости, если выполняется условие (14). Из условий задачи следует: направляющий вектор первой прямой имеет координаты $\vec{s}_1 = \{5; 6; 2\}$, точка, принадлежащая прямой, имеет координаты $(-2; 1; 5)$. Направляющий вектор второй прямой имеет координаты $\vec{s}_2 = \{2; -3; 4\}$, точка, принадлежащая второй прямой, имеет координаты $(0; -6; 7)$. Подставить координаты направляющих векторов и точек в условие (14) и провести вычисления.

$$\begin{vmatrix} 0 - (-2) & -6 - 1 & 7 - 5 \\ 5 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -7 & 2 \\ 5 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 118 \neq 0.$$

Определитель не равен нулю, следовательно, прямые не принадлежат одной плоскости.

ОТВЕТ: Прямые $\frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-5}{2}$, $\frac{x}{2} = \frac{y+6}{-3} = \frac{z-7}{4}$ не принадлежат одной плоскости.

3.8. Расстояние между двумя точками в пространстве

В пространстве $Oxyz$ даны две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$

(см. рис. 26). Необходимо вычислить расстояние между ними.

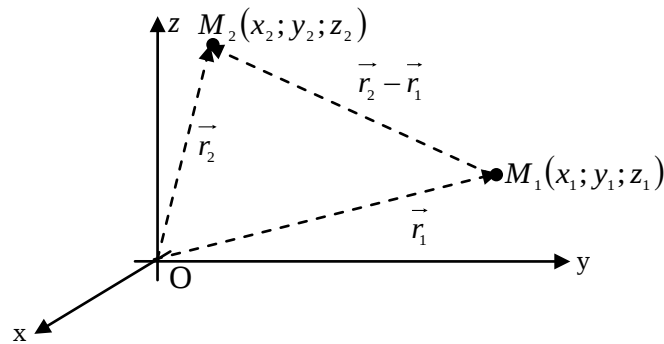


Рис. 26. Расстояние между двумя точками в пространстве

Построим радиус-вектор $\vec{r}_1$, соединив начало координат с точкой M_1 , и радиус-вектор $\vec{r}_2$, соединив начало координат с точкой M_2 . Тогда по правилу разности векторов $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$, а длина вектора равна

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (15)$$

По этой формуле вычисляется расстояние между точками M_1 и M_2 в пространстве.

ПРИМЕР.

Вычислить расстояние между точками $A(-2; 1; 5)$ и $B(0; -6; 7)$ в пространстве

РЕШЕНИЕ:

Используя формулу (15), вычислим расстояние между точками A и B .

$$|AB| = \sqrt{(0 - (-2))^2 + (-6 - 1)^2 + (7 - 5)^2} = \sqrt{(2)^2 + (-7)^2 + (2)^2} = \sqrt{57} \approx 7,55 \text{ ед.}$$

ОТВЕТ: Расстояние между точками A и B в пространстве приблизительно равно 7,55 ед.

3.9. Деление отрезка в заданном соотношении

Пусть дан отрезок M_1M_2 , концы которого имеют координаты $M_1(x_1; y_1; z_1)$, и точка $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Необходимо найти соотношение, позволяющее делить отрезок в заданном соотношении λ и вычислять координаты точки деления – точки $M(x; y; z)$ (см. рис. 27).

Необходимо построить векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ и вычислить их координаты.

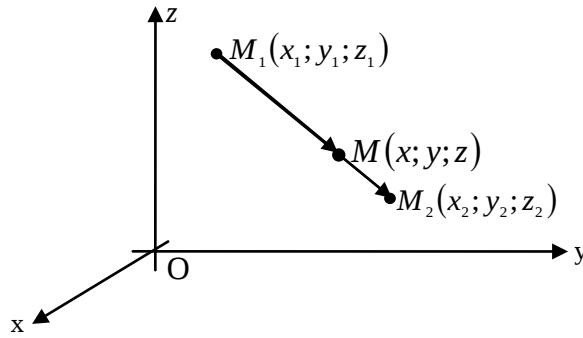


Рис. 27. Точки M , M_1 и M_2 в пространстве

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1) \cdot \vec{i} + (y - y_1) \cdot \vec{j} + (z - z_1) \cdot \vec{k},$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j} + (z_2 - z_1) \cdot \vec{k}.$$

Векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ лежат на одном отрезке, значит, между координатами векторов существует соотношение $\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{M_1M_2}$. Подставляем координаты векторов в соотношение:

$$(x - x_1) \cdot \vec{i} + (y - y_1) \cdot \vec{j} + (z - z_1) \cdot \vec{k} = \lambda \cdot ((x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j} + (z_2 - z_1) \cdot \vec{k}).$$

Равенство справедливо, когда левая часть равна правой, т. е.

$$(x - x_1) = \lambda \cdot (x_2 - x_1)$$

$$(y - y_1) = \lambda \cdot (y_2 - y_1), \text{ следовательно,}$$

$$(z - z_1) = \lambda \cdot (z_2 - z_1)$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (16)$$

Это формулы деления отрезка в соотношении λ .

Если отрезок необходимо поделить пополам, то $\lambda = 1$.

ПРИМЕР.

Найти координаты точек, делящих отрезок AB пополам и в соотношении 1:9, если концы отрезка имеют координаты $A(-2; 1; 5)$, $B(0; -6; 7)$.

РЕШЕНИЕ:

Координаты точек, делящих отрезок в заданном соотношении, вычисляются по формулам (16).

Из условий задач следует: $x_1 = -2$, $y_1 = 1$, $z_1 = 5$, $x_2 = 0$, $y_2 = -6$, $z_2 = 7$. При делении отрезка пополам $\lambda = 1$, при делении отрезка в соотношении 1:9 $\lambda = 9$.

Вычислим координаты точки, делящей отрезок пополам ($\lambda = 1$):

$$x = \frac{-2 + 1 \cdot 0}{1 + 1} = \frac{-2}{2} = -1;$$

$$y = \frac{1 + 1 \cdot (-6)}{1 + 1} = \frac{1 - 6}{2} = \frac{-5}{2} = -2,5;$$

$$z = \frac{5+1 \cdot 7}{1+1} = \frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Вычислить координаты точки, делящей отрезок в соотношении 1:9.

$$x_3 = \frac{-2+9 \cdot 0}{1+9} = \frac{-2}{10} = -0,2;$$

$$y_3 = \frac{1+9 \cdot (-6)}{1+9} = \frac{-53}{10} = -5,3;$$

$$z_3 = \frac{5+9 \cdot 7}{1+9} = \frac{68}{10} = 6,8.$$

ОТВЕТ: Координаты точки, делящей отрезок AB пополам, – $(-2; -2,5; 6)$, координаты точки, делящей отрезок AB в соотношении 1:9, – $(-0,2; -5,3; 6,8)$.

3.10. Расстояние от точки до прямой

Пусть дана прямая l , заданная каноническим уравнением $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$, точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$, принадлежащая прямой l , направляющий вектор прямой $\vec{s} = \{m; n; p\}$ и точка $M(x; y; z)$, не лежащая на прямой l (см. рис. 28). Необходимо вычислить расстояние от точки M до прямой l . Это расстояние является длиной перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую (d).

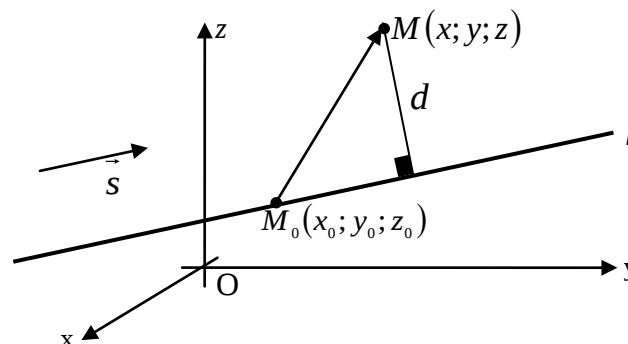


Рис. 28. Точки M_0 , M в пространстве

Проведем вектор $\overrightarrow{M_0M}$, соединяющий точки M_0 , M , и вычислим его координаты $\overrightarrow{M_0M} = (x-x_0) \cdot \vec{i} + (y-y_0) \cdot \vec{j} + (z-z_0) \cdot \vec{k}$. Опустим перпендикуляр из точки M на прямую l . По свойству проекции расстояние d – это проекция вектора $\overrightarrow{M_0M}$ на направляющий вектор, тогда

$$d = \left| \text{пр}_{\vec{s}} \overrightarrow{M_0M} \right| = \frac{|\vec{s} \cdot \overrightarrow{M_0M}|}{|\vec{s}|} = \frac{|(x-x_0) \cdot m + (y-y_0) \cdot n + p \cdot (z-z_0)|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

$$d = \left| \frac{(x-x_0) \cdot m + (y-y_0) \cdot n + p \cdot (z-z_0)}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \right|$$

4. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

4.1. Угол между прямой и плоскостью

Углом между прямой и плоскостью называется любой угол из двух смежных углов (см. рис. 29а), образованных прямой и ее проекцией на плоскость.

Пусть задана плоскость α общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ с нормальным вектором $\vec{n} = \{A; B; C\}$ и прямая l каноническим уравнением $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ с направляющим вектором $\vec{s} = \{m; n; p\}$. Обозначим φ угол между прямой l и плоскостью α , а θ – угол между векторами $\vec{n} = \{A; B; C\}$ и $\vec{s} = \{m; n; p\}$. Тогда из определения скалярного произведения

векторов следует, $\cos(\theta) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}$. Или в координатной форме

$$\cos(\theta) = \frac{|A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Если угол $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$, то $\cos \theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \varphi$. И если $\sin \varphi \geq 0$, то

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (17)$$

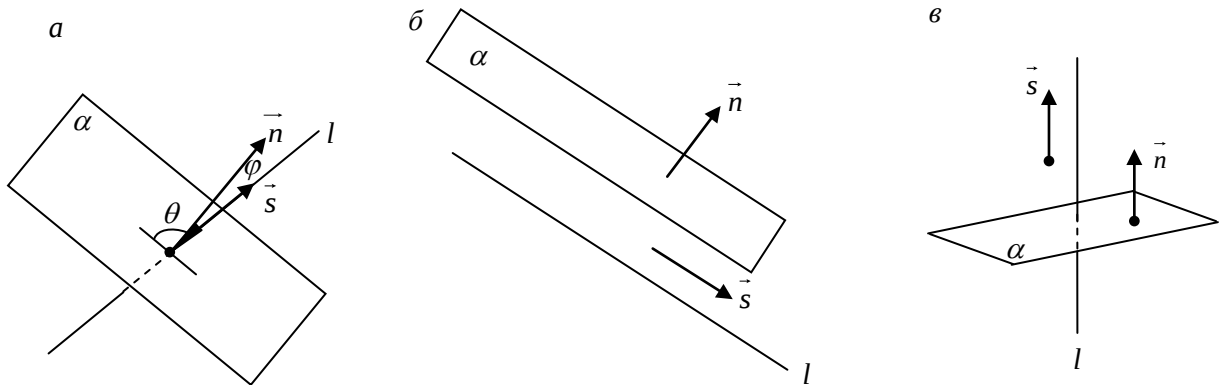


Рис. 29. Угол между прямой и плоскостью в пространстве:

а – угол между прямой и плоскостью тупой или острый;

б – угол между прямой и плоскостью прямой;

в – угол между прямой и плоскостью 0° , 180° или 360°

Условие параллельности прямой и плоскости.

Если прямая и плоскость параллельны (см. рис. 29б), то векторы $\vec{s} \perp \vec{n}$, следовательно, $A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p = 0$.

Условие перпендикулярности прямой и плоскости.

Если прямая и плоскость перпендикулярны (см. рис. 29в), то векторы $\vec{s}$, $\vec{n}$ коллинеарны. Следовательно, $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} = \lambda$.

ПРИМЕР.

Вычислить угол между прямой $\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-5}{6}$ и плоскостью $x - 5y + 3z - 1 = 0$.

РЕШЕНИЕ:

Угол между прямой и плоскостью можно вычислить по формуле (17). Из условия задачи следует $m = 2$, $n = 4$, $p = 6$, $A = 1$, $B = -5$, $C = 3$. Подставим эти значения в формулу (17) и вычислим угол между прямой и плоскостью.

$$\sin \varphi = \frac{|1 \cdot 2 - 5 \cdot 4 + 3 \cdot 6|}{\sqrt{1^2 + (-5)^2 + (3)^2} \cdot \sqrt{(2)^2 + (4)^2 + (6)^2}} = 0. \text{ Следовательно,}$$

$$\varphi = \arcsin(0) = \arcsin(0^0) = 0.$$

ОТВЕТ: Угол между прямой и плоскостью 0^0 . Прямая и плоскость параллельны.

ПРИМЕР.

Составить уравнение прямой, перпендикулярной плоскости α , заданной уравнением $x - 5y + 3z - 1 = 0$. Точка пересечения прямой и плоскости имеет координаты $A(-2; 1; 5)$.

РЕШЕНИЕ:

Так как прямая и плоскость перпендикулярны, то направляющий вектор прямой и вектор нормали плоскости коллинеарны. В частном случае они могут совпадать. Следовательно, координаты направляющего вектора совпадают с координатами вектора нормали и равны $(1; -5; 3)$.

Запишем уравнение прямой, проходящей через точку A , в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 - 5t \\ z = 5 + 3t \end{cases}$$

ОТВЕТ: Уравнение прямой, проходящей через точку A , перпендикулярно плоскости α в параметрической форме записи имеет вид

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 - 5t \\ z = 5 + 3t \end{cases}$$

4.2. Пересечение прямой с плоскостью. Условие принадлежности прямой плоскости

Дано уравнение прямой l в параметрическом виде
$$\begin{cases} x = x_0 + m \cdot t \\ y = y_0 + n \cdot t \\ z = z_0 + p \cdot t \end{cases}$$
 с

направляющим вектором $\vec{s} = \{m; n; p\}$ и плоскость α , заданная общим уравнением плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ и вектором нормали $\vec{n} = \{A; B; C\}$. Необходимо найти точку пересечения прямой l с плоскостью α .

В точке пересечения прямой и плоскости их координаты совпадают. Следовательно, в уравнение плоскости вместо x, y, z можно подставить данные координаты прямой:

$$A \cdot (x_0 + mt) + B \cdot (y_0 + nt) + C \cdot (z_0 + pt) + D = 0 \quad (*)$$

Выразим из уравнения параметр t :

$$t = -\frac{A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D}{A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p}.$$

Подставляя параметр t в уравнение прямой, вычисляются координаты точки пересечения прямой с плоскостью.

Если прямая и плоскость параллельны, т. е. не пересекаются, то $A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p = 0$. Следовательно, уравнение (*) решения не имеет.

Если $A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D = 0$, то любая точка прямой является точкой пересечения прямой с плоскостью, т. е. прямая лежит в плоскости.

Условие принадлежности прямой плоскости:

$$\begin{cases} A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p = 0 \\ A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D = 0 \end{cases}$$

5. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

Линии, определяемые алгебраическими уравнениями второй степени относительно переменных, называются кривыми второго порядка.

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

где A, B, C – действительные числа, хотя бы одно из чисел A, B, C не равно нулю, x, y – переменные.

Общее уравнение второго порядка определяет на плоскости (исключая случаи вырождения и распада) окружность, эллипс, гипербола, парабола. Если $A = C$, то общее уравнение второго порядка теряет смысл. Рассмотрим уравнения второго порядка.

1. Окружность.

Окружностью радиуса R с центром в точке M_0 называется множество всех точек M плоскости, удовлетворяющих условию $M_0M = R$ (см. рис. 30).

Рассмотрим декартову систему координат Oxy , в ней точку $M_0(x_0; y_0)$ и точку $M(x; y)$ – точку, лежащую на окружности. Расстояние от точки M_0 до точки M обозначим R , $M_0M = R$ или в координатной форме

$$|M_0M| = R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2};$$
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (18)$$

Это каноническое уравнение окружности с центром в точке M_0 .

Это уравнение – частный случай кривой второго порядка, в которой $A = C$, отсутствует слагаемое, содержащее произведение переменных.

Замечание.

Если центр окружности совпадает с началом координат, то каноническое уравнение окружности имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$.

ПРИМЕР.

Записать уравнение окружности, центр которой смещен относительно начала координат на 7 единиц по оси абсцисс и на 4 единицы относительно оси ординат, точка $(2; 4)$ лежит на окружности.

РЕШЕНИЕ:

Из условий задач следует: центр окружности расположен в точке $(7; 4)$. Подставим координаты точки, лежащей на окружности, и центра окружности в формулу (18) и вычислим радиус окружности $R = \sqrt{(2 - 7)^2 + (4 - 4)^2} = 5$. Тогда уравнение окружности в канонической форме записи имеет вид:

$$(x - 7)^2 + (y - 4)^2 = 5^2.$$

ОТВЕТ: Каноническое уравнение окружности с центром в точке $(7; 4)$ имеет вид $(x - 7)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$.

2. Эллипс.

Эллипсом (см. рис. 31) называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами (F_1, F_2), есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

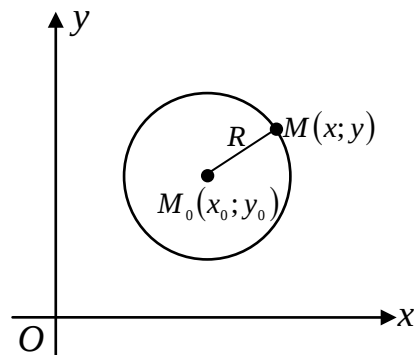


Рис. 30. Окружность на координатной плоскости

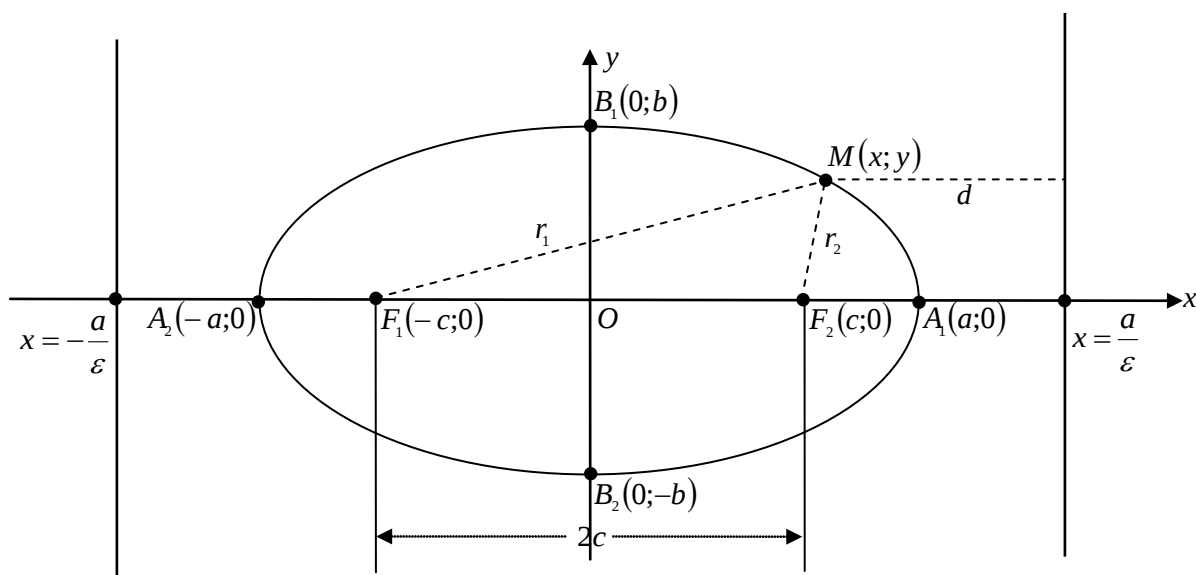


Рис. 31. Эллипс

Рассмотрим декартову систему координат Ox . Фокусы обозначим F_1 и F_2 , расстояние между ними $2c$. Пусть фокусы лежат на оси Ox , начало координат совпадает с серединой отрезка $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$, сумма расстояний от произвольной точки эллипса $M(x; y)$ до фокусов равна $2a$. Из определения эллипса следует $MF_1 + MF_2 = 2a$ или в координатной форме $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$, следовательно, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$.

Произведем замену $a^2 - c^2 = b^2$, тогда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ — каноническое уравнение эллипса,}$$

$$-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b.$$

Точка $O(0; 0)$ называется центром эллипса. Точки $A_1(a; 0)$, $A_2(-a; 0)$ — точки, в которых ось Ox пересекает эллипс, называются вершинами эллипса. Точки $B_1(0; b)$, $B_2(0; -b)$ — точки, в которых ось Oy пересекает эллипс, также называются вершинами эллипса. Длина $2a$ называется большой полуосью эллипса, длина $2b$ называется малой полуосью эллипса.

Форма эллипса зависит от соотношения $\frac{b}{a}$. Если $a = b$, то в частном случае получается уравнение окружности.

Отношение $\frac{c}{a}$ половины расстояния между фокусами к половине расстояния большой полуоси эллипса называется эксцентриситетом

$$\text{эллипса } \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Длины отрезков $F_1M = r_1$ и $MF_2 = r_2$ называют фокальными радиусами точки M .

$r_1 + r_2 = 2a$, следовательно, $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$.

Прямые $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ называются директрисами эллипса.

Теорема

Если r – расстояние от произвольной точки эллипса до какого-нибудь фокуса, d – расстояние от этой же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть

постоянная величина, равная эксцентриситету эллипса $\varepsilon = \frac{r}{d}$.

Если центр эллипса находится в точке $M_0(x_0; y_0)$, а оси эллипса параллельны осям координат, то уравнение эллипса имеет вид $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ или $\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$ (см. рис. 32).

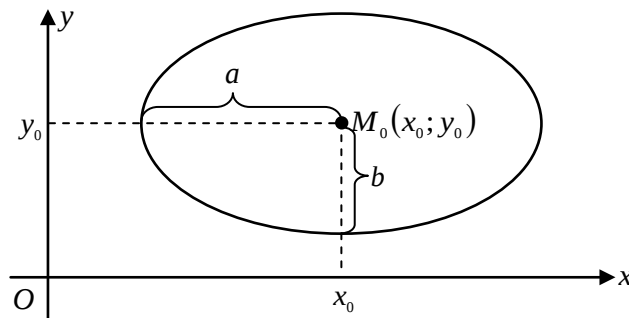


Рис. 32. Эллипс, смещенный относительно начала координат

3. Гипербола.

Гиперболой (см. рис. 33) называют множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Пусть F_1, F_2 – фокусы, расстояние между ними $F_1F_2 = 2c$, модуль разности расстояний от каждой точки гиперболы до фокусов $A_1A_2 = 2a$.

По определению гиперболы $|MF_1 - MF_2| = 2a$ или $MF_1 - MF_2 = \pm 2a$. В координатной форме $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$ или $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$, произведем замену $b^2 = c^2 - a^2$, тогда

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ — каноническое уравнение гиперболы.}$$

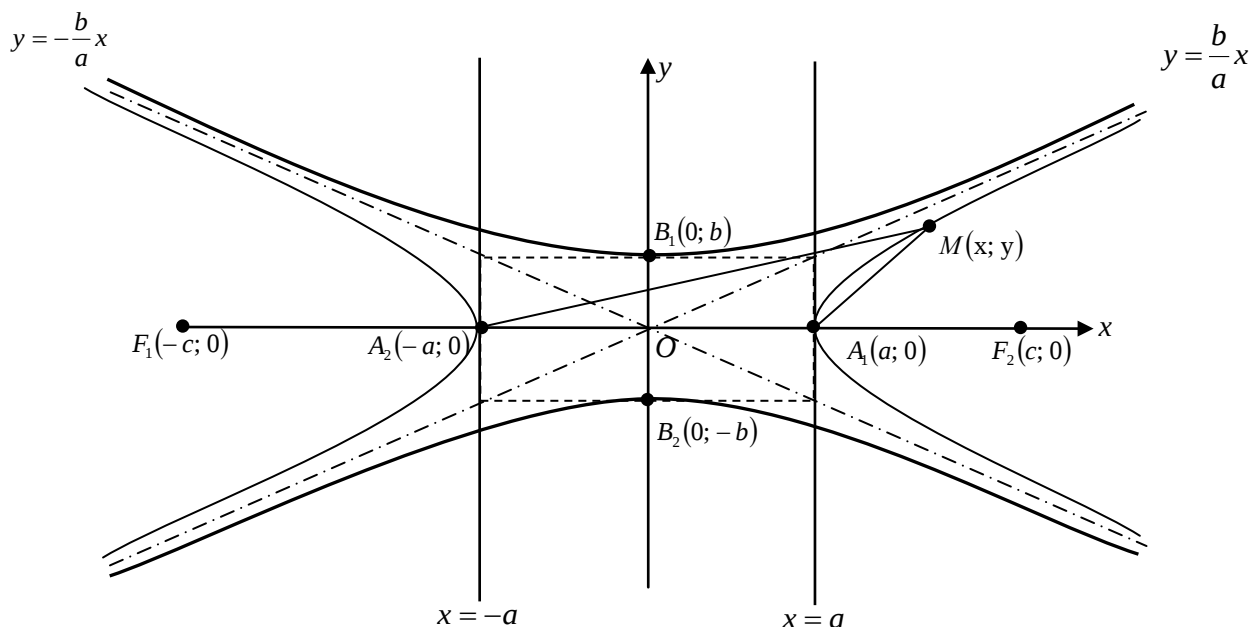


Рис. 33. Гипербола

Каноническое уравнение гиперболы является линией второго порядка. Так как переменные x , y имеют четные степени, то график гиперболы симметричен относительно осей Ox , Oy и точки $O(0;0)$ — центр гиперболы. Точки пересечения гиперболы с осью Ox ($A_1(a; 0)$, $A_2(-a; 0)$) называются вершинами гиперболы. Ось Oy гиперболу не пересекает никогда. Отрезок $A_1A_2 = 2a$ называется действительной осью гиперболы, отрезок $OA_1 = OA_2 = a$ называется действительной полуосью гиперболы. Отрезок $B_1B_2 = 2b$ называется мнимой осью гиперболы. Отрезок $B_1O = B_2O = b$ называется мнимой полуосью гиперболы. Прямоугольник со сторонами $2a$, $2b$ называется основным прямоугольником гиперболы.

Из канонического уравнения гиперболы следует:

1. $|x| \geq a$, т. е. точки гиперболы расположены справа от прямой $x = a$ — правая ветвь гиперболы и слева от прямой $x = -a$ — левая ветвь гиперболы.

2. Если $|x|$ возрастает, то $|y|$ возрастает, т. е. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ постоянное значение, равное единице.

Гипербола имеет две асимптоты $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение между

фокусами к величине действительной оси гиперболы.

Математическое обозначение ε .

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Прямые $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ называются директрисами гиперболы.

Расстояния $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ называют фокальными радиусами. Для правой ветви гиперболы $r_1 = \varepsilon x + a$, $r_2 = \varepsilon x - a$, для левой ветви гиперболы $r_1 = -(\varepsilon x + a)$, $r_2 = -(\varepsilon x - a)$.

Гипербола называется равносторонней, если ее полуоси равны.

Гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ называются сопряженными гиперболами. На рисунке 30 они изображены «толстыми» кривыми.

Если центр гиперболы находится в точке $M_0(x_0; y_0)$, а оси гиперболы параллельны осям координат, то каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ или $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$.

3. Парабола.

Параболой (см. рис. 34) называется множество всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от заданной точки, называемой фокусом, и заданной прямой, называемой директрисой.

Расстояние от фокуса F до директрисы называется параметром параболы. Математическое обозначение p . $p > 0$.

$$y^2 = 2px \text{ — каноническое уравнение параболы.}$$

В каноническом уравнении параболы переменная y имеет четную степень, значит, парабола симметрична относительно оси Ox . Ось Ox является осью симметрии параболы. Так как $p > 0$, то из канонического уравнения параболы следует $x \geq 0$. При неограниченном возрастании переменной x $|y|$ также неограниченно возрастает. Точка $O(0; 0)$ называется вершиной параболы, отрезок $FM = r$ называется фокальным радиусом точки M .

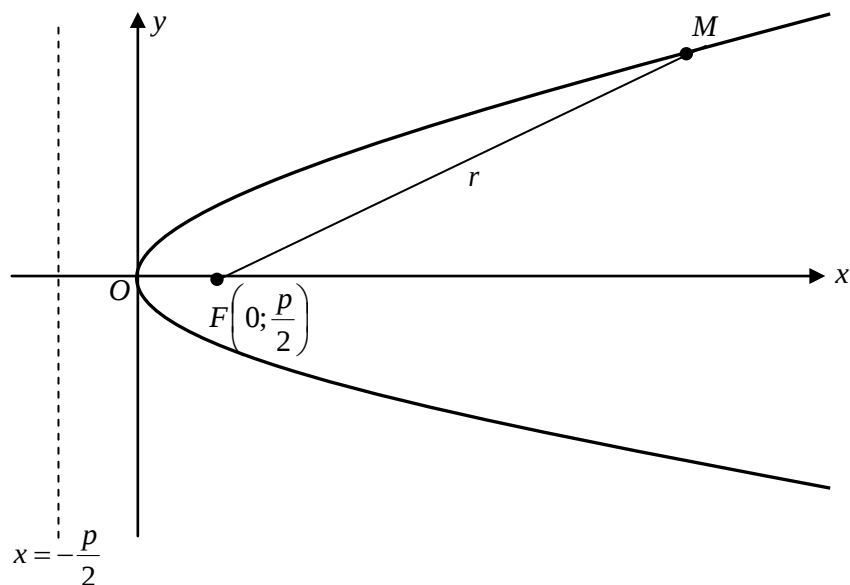


Рис. 34. Парабола

Уравнения $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$ являются уравнениями параболы на плоскости (см. рис. 35).

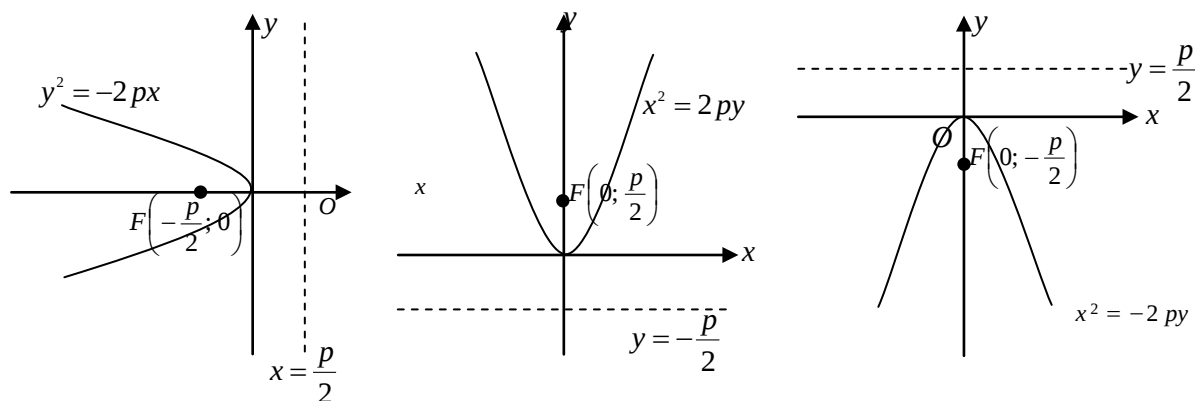


Рис. 35. Виды уравнения параболы на плоскости

Если вершина параболы лежит в точке $M_0(x_0; y_0)$, то канонические уравнения параболы имеют вид:

$$\begin{aligned}(y - y_0)^2 &= 2p \cdot (x - x_0); \\ (y - y_0)^2 &= -2p \cdot (x - x_0); \\ (x - x_0)^2 &= 2p \cdot (y - y_0); \\ (x - x_0)^2 &= -2p \cdot (y - y_0).\end{aligned}$$

6. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

6.1. Цилиндрические поверхности второго порядка

Поверхность, образованная движением прямой l , которая перемещается в пространстве, сохраняя постоянное направление и

пересекая каждый раз некоторую кривую k , называется цилиндрической поверхностью. Кривая k называется направляющей цилиндра, прямая l называется образующей цилиндра (см. рис. 36).

Поверхности, составленные из прямых линий, называются линейчатыми.

Теорема

Уравнение цилиндра, образующие которого параллельны оси Oz , имеет вид $F(x; y) = 0$.

Если уравнение цилиндра имеет вид $F(x; z) = 0$, то образующие цилиндра параллельны оси Oy . Если уравнение цилиндра имеет вид $F(y; z) = 0$, то образующие цилиндра параллельны оси Ox . Название цилиндра определяется названием направляющей.

Цилиндр называется эллиптическим, если направляющей в пространстве является эллипс.

Цилиндр называется круговым, если направляющей в пространстве является окружность.

Цилиндр называется параболическим, если направляющей в пространстве является парабола.

Цилиндр называется гиперболическим, если направляющей в пространстве является гипербола.

Примеры цилиндров второго порядка приведены на рисунках 37, 38.

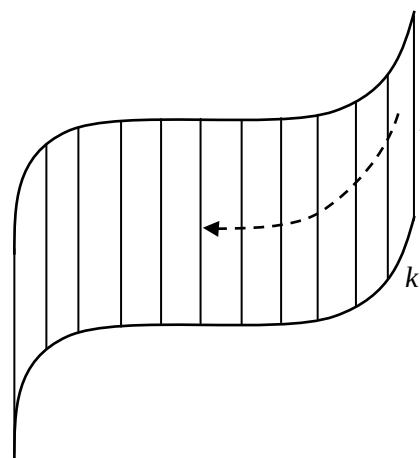


Рис. 36. Цилиндрическая поверхность в пространстве

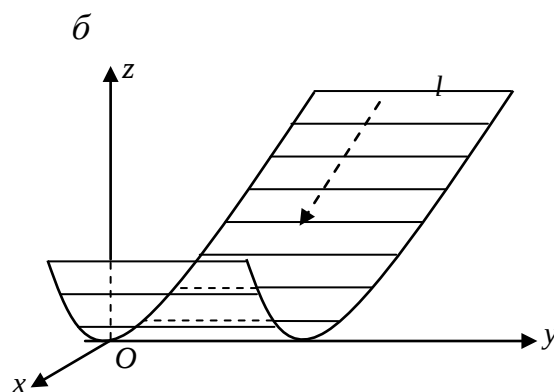
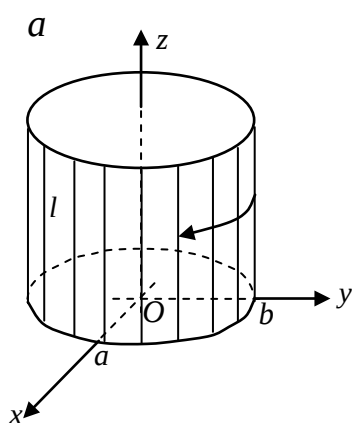


Рис. 37. Цилиндрические поверхности второго порядка:

a – эллиптический цилиндр;

$б$ – параболический цилиндр

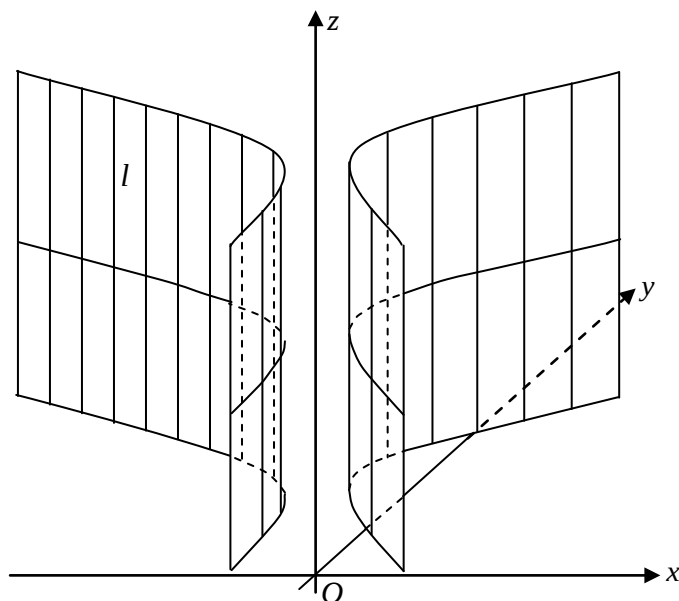


Рис. 38. Гиперболический цилиндр

6.2. Поверхности вращения. Конические поверхности

Поверхность, образованная вращением плоской кривой вокруг оси, лежащей в ее плоскости, называется поверхностью вращения (см. рис. 39). Поверхность, образованная прямыми линиями, проходящими через данную точку P и пересекающими данную плоскую линию l (не проходящую через точку P), называется конической поверхностью. Линия l называется направляющей конуса, точка P – ее вершиной. Прямая, описывающая поверхность, называется образующей.

Если прямая l лежит в плоскости Oyz , то уравнение кривой имеет вид $\begin{cases} F(y; z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$, а уравнение поверхности, образованной вращением кривой l вокруг оси Oz , имеет вид $F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}; z) = 0$. Если кривая l вращается вокруг оси Oy , то уравнение поверхности вращения имеет вид $F(y; \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0$. Если кривая l вращается вокруг оси Ox , то уравнение поверхности вращения имеет вид $F(x; \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$.

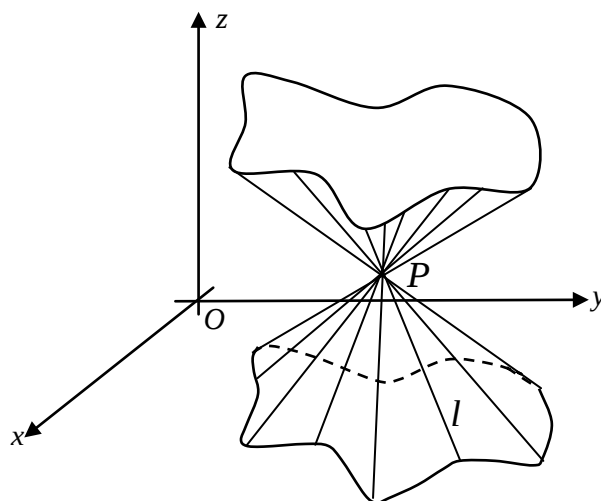


Рис. 39. Коническая поверхность

6.3. Канонические уравнения поверхностей второго порядка

Рассмотрим алгебраические поверхности второго порядка.

Алгебраическим уравнением поверхности второй степени называется уравнение вида

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Kz + L = 0,$$

где хотя бы один из коэффициентов A, B, C, D, E, F не равен нулю.

Поверхностью второго порядка в трехмерном пространстве $Oxyz$ называется множество точек, координаты $(x; y; z)$ которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второго порядка относительно переменных $(x; y; z)$.

Простейшими алгебраическими поверхностями второго порядка являются сфера, конус, эллипсоид, гиперболоид и параболоид.

Сферой радиуса R в трехмерном пространстве называется множество всех точек трехмерного пространства, находящихся на расстоянии R от некоторой точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, которая называется центром сферы (см. рис. 40).

Каноническое уравнение сферы с центром в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Если точка $M(x; y; z)$ лежит вне сферы, то ее координаты удовлетворяют неравенству

$$\frac{(x - x_0)^2}{R^2} + \frac{(y - y_0)^2}{R^2} + \frac{(z - z_0)^2}{R^2} - 1 > 0.$$

Если точка $M(x; y; z)$ лежит внутри сферы, то ее координаты удовлетворяют неравенству

$$\frac{(x - x_0)^2}{R^2} + \frac{(y - y_0)^2}{R^2} + \frac{(z - z_0)^2}{R^2} - 1 < 0.$$

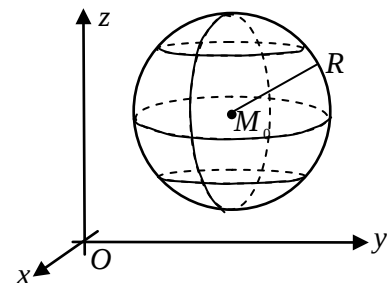


Рис. 40. Сфера

Эллипсоидом в трехмерном пространстве (см. рис. 41) называется множество всех точек трехмерного пространства $M(x; y; z)$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1.$$

Величины a, b, c называются полуосями эллипсоида. Точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ является центром симметрии эллипсоида и называется центром эллипсоида. Если точка $M(x; y; z)$ лежит внутри эллипсоида, то ее

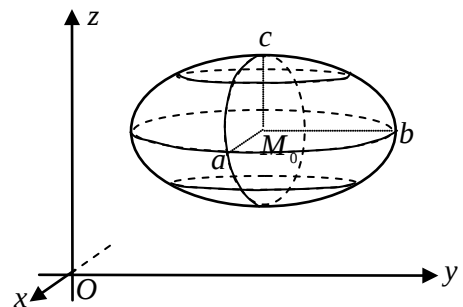


Рис. 41. Эллипсоид

координаты удовлетворяют неравенству $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} < 1$.

Если полуоси не равны между собой ($a \neq b \neq c$), то эллипсоид называется трехосным. Если две полуоси равны между собой, то получается эллипсоид вращения. Если все полуоси равны между собой, то получается сфера.

Однополостным гиперболоидом в трехмерном пространстве (см. рис. 42а) называется множество всех точек трехмерного пространства $M(x; y; z)$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1.$$

Точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ является центром симметрии однополостного гиперболоида и называется центром однополостного гиперболоида. Если точка $M(x; y; z)$ лежит внутри однополостного гиперболоида, то ее координаты удовлетворяют неравенству $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} < 1$.

Двухполостным гиперболоидом в трехмерном пространстве (см. рис. 42б) называется множество всех точек трехмерного пространства $M(x; y; z)$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

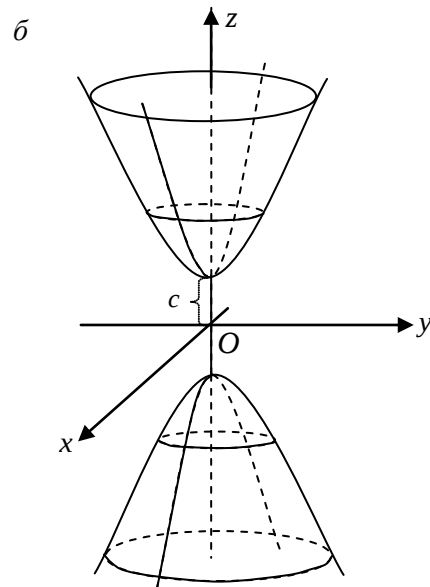
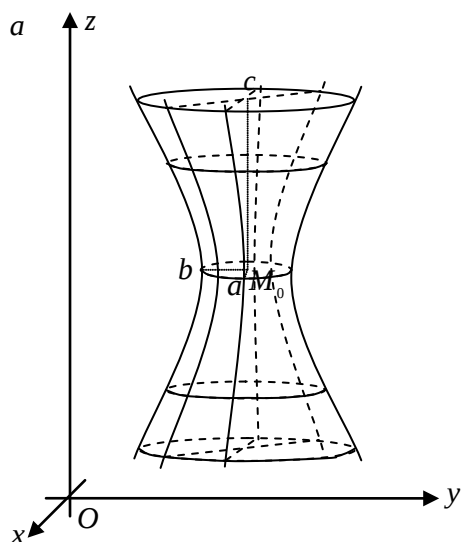


Рис. 42. Гиперболоид:

a – однополостный гиперболоид;

б – двухполостный гиперболоид

Эллиптическим параболоидом в трехмерном пространстве (см. рис. 43а) называется множество всех точек трехмерного пространства $M(x; y; z)$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \text{ где } p > 0, q > 0.$$

Гиперболическим параболоидом в трехмерном пространстве (см. рис. 43б) называется множество всех точек трехмерного пространства $M(x; y; z)$, координаты которых удовлетворяют уравнению

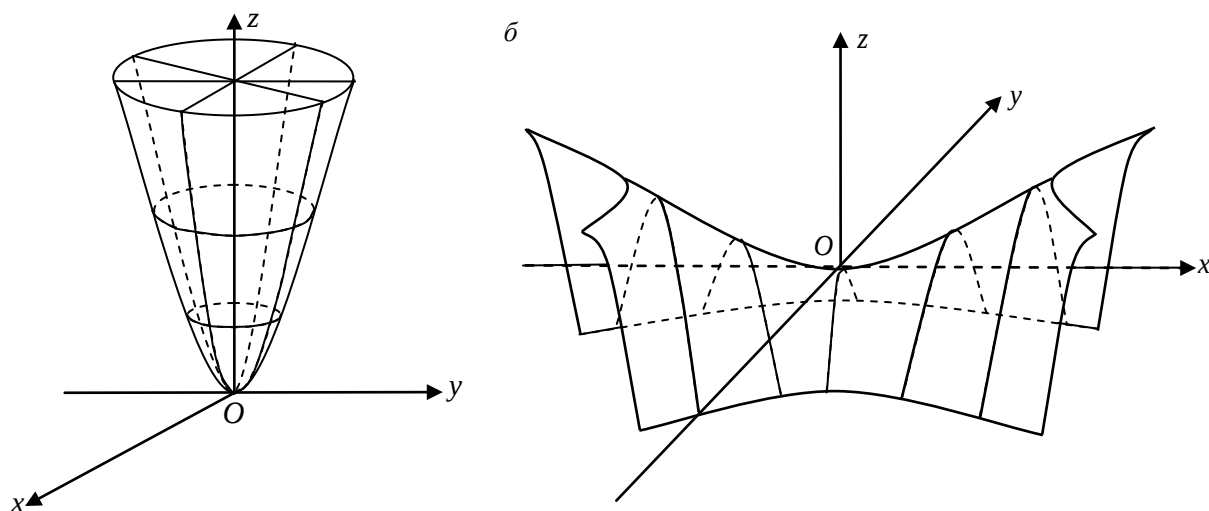


Рис. 43. а – эллиптический параболоид;
б – гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z.$$

Конусом второго порядка в трехмерном пространстве (см. рис. 44) называется множество всех точек трехмерного пространства $M(x; y; z)$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

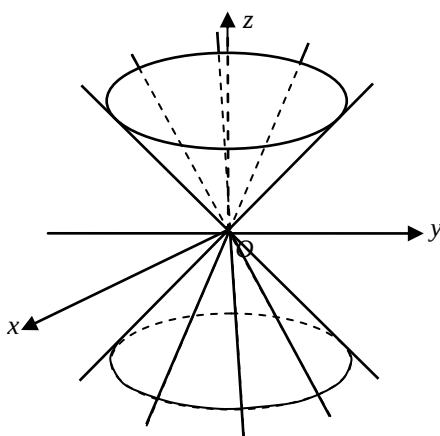


Рис. 44. Конус второго порядка

7. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ ПО ГЛАВЕ «АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

1. Дать понятие системы координат.
2. Рассказать способ задания декартовой системы координат в пространстве.
3. Дать понятие полярной системы координат.
4. Написать формулы, связывающие координаты прямоугольной и полярной систем координат.
5. Что называется преобразованием систем координат?
6. Рассказать алгоритм преобразования координат при переходе из одной системы координат в другую систему координат.
7. Дать понятия: кардиода, гиперболической спирали, улитки Паскаля, розы, лемниската Бернулли, архимедовой спирали, записать их уравнения в полярных координатах.
8. Написать общее уравнение плоскости и неполные уравнения плоскости в пространстве.
9. Дать определение нормального вектора.
10. Написать уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
11. Написать нормальное уравнение плоскости.
12. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки.
13. Написать уравнение плоскости в отрезках на осях координат.
14. Написать формулу, вычисляющую расстояния от точки до плоскости.
15. Написать формулу вычисления угла между плоскостями.
16. Написать условие параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
17. Написать общее уравнение линии на плоскости и его частные случаи.
18. Дать определение текущих координат точек линии.
19. На плоскости написать и изобразить графически: уравнение прямой в отрезках, уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении, уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно заданному вектору, уравнение прямой, проходящей через две точки.
20. Написать полярное, нормальное уравнение прямой.
21. Написать формулу вычисления угла между прямыми на плоскости и в пространстве.
22. Написать условие параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости и в пространстве.
23. Дать определение направляющего вектора.
24. Написать общее уравнение прямой в пространстве.

25. Написать уравнение прямой в векторной форме в пространстве.
26. Написать параметрическое и каноническое уравнение прямой в пространстве.
27. Написать уравнение прямой, проходящей через две точки в пространстве.
28. Написать условие принадлежности двух прямых одной плоскости.
29. Написать формулу вычисления расстояния между двумя точками в пространстве.
30. Написать формулу деления отрезка в заданном соотношении в пространстве.
31. Написать формулу вычисления расстояния от точки до прямой в пространстве.
32. Дать определение угла между прямой и плоскостью в пространстве. Написать формулу вычисления угла между прямой и плоскостью в пространстве.
33. Написать условие параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве.
34. Записать условие принадлежности прямой плоскости.
35. Дать определение кривой второго порядка и записать ее уравнение.
36. Дать определение, написать вывод уравнений, свойства и алгоритм построения уравнений второго порядка.
37. Дать определение цилиндрической поверхности, направляющей и образующей цилиндра.
38. Дать определения эллиптического, кругового, параболического и гиперболического цилиндра. Изобразить их графически.
39. Дать определение поверхности вращения, конической поверхности, направляющего конуса и его вершины. Изобразить поверхность вращения графически.
40. Дать определение алгебраического уравнения поверхности второй степени и записать его.
41. Дать определение поверхности второго порядка.
42. Дать определение, написать вывод уравнений, свойства и алгоритм построения простейших поверхностей второго порядка методом сечений.
43. Рассказать технические приложения геометрических свойств кривых.

8. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ГЛАВЕ «АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

ВАРИАНТ № 1

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1; 2; 3)$ перпендикулярно оси Ox .

2. Составить уравнение плоскости α , проходящей через точку $Y(1; 3; 5)$ параллельно плоскости β , проходящей через три точки $A(4; 3; 0)$, $B(3; 4; 7)$, $C(-3; 2; 5)$, не лежащие на одной прямой. Уравнение плоскости α привести к уравнению плоскости в отрезках и построить схематично график плоскости α .

3. Вычислить угол между плоскостями $2x + 7y + 3z + 4 = 0$ и $2x - 7y + 3z - 5 = 0$, ответить на вопрос, параллельны или перпендикулярны плоскости.

4. Вычислить расстояние между точками $A(4; 3; 0)$, $B(3; 4; 7)$ и координаты точки, делящей полученный отрезок в соотношении 7:1.

5. Вычислить расстояние от точки $A(1; 2; 3)$ до плоскости α $2x - 3y + z - 4 = 0$.

6. На плоскости составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(2; 3)$ и $B(6; 7)$. Привести его к уравнению прямой в отрезках и построить график.

7. Записать уравнение прямой l , проходящей через точку $A(2; 0; 6)$ и начало координат, в параметрическом и каноническом виде. Определить, принадлежит ли точка $C(-1; -4; 3)$ прямой l .

8. Составить уравнение прямой l_3 , проходящей через точку $M_0(-1; 3; 4)$ перпендикулярно прямым l_1 и l_2 . Вычислить угол между прямыми l_1 , l_3 . Проверить условие перпендикулярности и параллельности прямых l_2 , l_3 . Вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l_1 . Проверить принадлежность прямых l_1 , l_2 одной плоскости. Уравнение прямой l_1 имеет вид $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{-2}$, уравнение прямой l_2 имеет вид $\frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+1}{0}$.

9. Составить уравнение прямой, проходящей через пересечение двух плоскостей $\begin{cases} 8x - 6y + 1z - 4 = 0 \\ 2x + 7y - 5z + 8 = 0 \end{cases}$ и точку $A(-3; 2; 6)$.

10. Вычислить угол между прямой $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{-2}$ и плоскостью $2x + 7y - 5z + 8 = 0$.

11. Записать уравнение окружности, центр которой смещен относительно начала координат на 2 единицы по оси абсцисс и на 3 единицы относительно оси ординат, точка $(3; 4)$ лежит на окружности.

12. Дано уравнение гиперболы $25 \cdot (x - 4)^2 - 64y^2 = 49$. Привести уравнение гиперболы к каноническому виду и вычислить: длины полуосей, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис.

ВАРИАНТ № 2

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2; 5; 3)$ перпендикулярно оси Oy .

2. Составить уравнение плоскости α , проходящей через точку $Y(1; 3; 5)$ параллельно плоскости β , проходящей через три точки $D(-2; 5; 1)$, $E(-4; 5; 0)$, $F(-5; 0; 2)$, не лежащие на одной прямой. Уравнение плоскости α привести к уравнению плоскости в отрезках и построить схематично график плоскости α .

3. Вычислить угол между плоскостями $3x + 7y + 3z + 4 = 0$ и $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$, ответить на вопрос, параллельны или перпендикулярны плоскости.

4. Вычислить расстояние между точками $D(-2; 5; 1)$, $E(-4; 5; 0)$ и координаты точки, делящей полученный отрезок в соотношении 6:1.

5. Вычислить расстояние от точки $A(2; 5; 3)$ до плоскости α $2x - 3y + z - 4 = 0$.

6. На плоскости составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1; 5)$ с углом наклона между осью Ox и прямой 60° . Привести полученное уравнение прямой к виду уравнения прямой в отрезках и построить график.

7. Записать уравнение прямой l , проходящей через точки $A(2; 0; 6)$ и $B(3; 5; 1)$, в параметрическом и каноническом виде. Определить, принадлежит ли точка $C(-1; -4; 3)$ прямой l .

8. Составить уравнение прямой l_3 , проходящей через точку $M_0(-1; 3; 4)$ перпендикулярно прямым l_1 и l_2 . Вычислить угол между прямыми l_1 , l_3 . Вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l_1 . Проверить условие перпендикулярности и параллельности прямых l_2 , l_3 . Проверить принадлежность прямых l_1 , l_2 одной плоскости. Уравнение прямой l_1 имеет вид $\frac{x+5}{3} = \frac{y+2}{7} = \frac{z+6}{-2}$, уравнение прямой l_2 имеет вид $\frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-1}{7}$.

9. Составить уравнение прямой, проходящей через пересечение двух плоскостей $\begin{cases} 3x - 2y + 5z - 4 = 0 \\ 9x + 2y - 1z + 8 = 0 \end{cases}$ и точку $A(-3; 2; 6)$.

10. Вычислить угол между прямой $\frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-1}{7}$ и плоскостью $9x + 2y - 1z + 8 = 0$.

11. Записать каноническое уравнение эллипса, центр которого расположен в точке $(-1; 7)$, эксцентриситет равен 0,5, расстояние между директрисами равно 15.

12. Найти вершину, фокус, уравнение директрисы параболы $y = 7x^2 + 2x - 4$.

ВАРИАНТ № 3

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1; 3; 3)$ перпендикулярно оси Oz .

2. Составить уравнение плоскости α , проходящей через точку $Y(1; 3; 5)$ параллельно плоскости β , проходящей через три точки $G(1; -2; 3)$, $H(3; -2; 5)$, $I(1; -4; 7)$, не лежащие на одной прямой. Уравнение плоскости α привести к уравнению плоскости в отрезках и построить схематично график плоскости α .

3. Вычислить угол между плоскостями $x - 3y + 6z + 5 = 0$ и $3x - 9y + 18z - 1 = 0$, ответить на вопрос, параллельны или перпендикулярны плоскости.

4. Вычислить расстояние между точками $G(1; -2; 3)$, $H(3; -2; 5)$ и координаты точки, делящей полученный отрезок в соотношении 4:1.

5. Вычислить расстояние от точки $A(1; 3; 3)$ до плоскости α $2x - 3y + z - 4 = 0$.

6. На плоскости составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1; 5)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (3; 7)$. Записать полученное уравнение прямой в виде уравнения прямой в отрезках и построить график.

7. Записать уравнение прямой l , проходящей через точку $A(2; 3; -1)$ параллельно вектору $\vec{s} = \{-3; 7; 1\}$, в параметрическом и каноническом виде. Определить, принадлежит ли точка $B(-1; -4; -12)$ прямой l .

8. Составить уравнение прямой l_3 , проходящей через точку $M_0(-1; 3; 4)$ перпендикулярно прямым l_1 и l_2 . Вычислить угол между прямыми l_1 , l_3 . Вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l_1 . Проверить условие перпендикулярности и параллельности прямых l_2 , l_3 . Проверить принадлежность прямых l_1 , l_2 одной плоскости. Уравнение прямой l_1 имеет вид $\frac{x+4}{3} = \frac{y+5}{0} = \frac{z-1}{-2}$, уравнение прямой l_2 имеет вид $\frac{x}{1} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-1}{2}$.

9. Составить уравнение прямой, проходящей через пересечение двух плоскостей $\begin{cases} 4x - 5y + 2z - 7 = 0 \\ 10x + 6y - z + 8 = 0 \end{cases}$ и точку $A(-3; 2; 6)$.

10. Вычислить угол между прямой $\frac{x}{1} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-1}{2}$ и плоскостью $10x + 6y - z + 8 = 0$.

11. Записать уравнение окружности, центр которой смещен относительно начала координат на 1 единицу по оси абсцисс и на 5 единиц относительно оси ординат, точка $(2; 3)$ лежит на окружности.

12. Составить каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между фокусами равно 15, действительная полуось равна 5.

ВАРИАНТ № 4

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-1; 3; -3)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{2; 4; 6\}$.

2. Составить уравнение плоскости α , проходящей через точку $Y(1; 3; 5)$ параллельно плоскости β , проходящей через три точки $J(8; 4; 2)$, $K(-6; 0; 15)$, $L(9; -8; -1)$, не лежащие на одной прямой. Уравнение плоскости α привести к уравнению плоскости в отрезках и построить схематично график плоскости α .

3. Вычислить угол между плоскостями $2x - 4y + 7z + 4 = 0$ и $3x + 5y + 2z = 0$. Ответить на вопрос, параллельны или перпендикулярны плоскости.

4. Вычислить расстояние между точками $K(-6; 0; 15)$, $L(9; -8; -1)$ и координаты точки, делящей полученный отрезок в соотношении 9:1.

5. Вычислить расстояние от точки $A(-1; 3; -3)$ до плоскости α $2x - 3y + z - 4 = 0$.

6. На плоскости составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $A(1; 4)$. Привести его к уравнению прямой в отрезках и построить график.

7. Записать уравнение прямой l , проходящей через точку $A(-1; 3; 5)$ и начало координат, в параметрическом и каноническом виде. Определить, принадлежит ли точка $C(-1; -4; 3)$ прямой l .

8. Составить уравнение прямой l_3 , проходящей через точку $M_0(-1; 3; 4)$ перпендикулярно прямым l_1 и l_2 . Вычислить угол между прямыми l_1 , l_3 . Вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l_1 . Проверить условие перпендикулярности и параллельности прямых l_2 , l_3 . Проверить принадлежность прямых l_1 , l_2 одной плоскости. Уравнение прямой l_1 имеет вид $\frac{x+5}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+6}{5}$, уравнение прямой l_2 имеет вид $\frac{x-2}{4} = \frac{y+7}{3} = \frac{z}{2}$.

9. Составить уравнение прямой, проходящей через пересечение двух плоскостей $\begin{cases} -3x + 2y + 6z + 4 = 0 \\ 7x - 2y - 1z + 8 = 0 \end{cases}$ и точку $A(-3; 2; 6)$.

10. Вычислить угол между прямой $\frac{x-2}{4} = \frac{y+7}{3} = \frac{z}{2}$ и плоскостью $7x - 2y - 1z + 8 = 0$.

11. Записать каноническое уравнение эллипса, центр которого расположен в точке $(3; 5)$, расстояние между фокусами равно 7, большая ось равна 19.

12. Найти вершину, фокус, уравнение директрисы параболы $x = 2y^2 - 6y - 9$.

ВАРИАНТ № 5

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2; 0; 1)$ перпендикулярно оси Ox .

2. Составить уравнение плоскости α , проходящей через точку $Y(1; 3; 5)$ параллельно плоскости β , проходящей через три точки $B(-1; 1; 0)$, $F(0; -1; 1)$, $A(1; 0; -1)$, не лежащие на одной прямой. Уравнение плоскости α привести к уравнению плоскости в отрезках и построить схематично график плоскости α .

3. Вычислить угол между плоскостями $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} - 7 = 0$ и $2x - y + 6z + 3 = 0$. Ответить на вопрос, параллельны или перпендикулярны плоскости.

4. Вычислить расстояние между точками $B(-1; 1; 0)$, $F(0; -1; 1)$ и координаты точки, делящей полученный отрезок в соотношении 8:1.

5. Вычислить расстояние от точки $A(2; 0; 1)$ до плоскости α $2x - 3y + z - 4 = 0$.

6. На плоскости составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; -8)$ с углом наклона между осью Ox и прямой 45° . Полученное уравнение прямой записать в виде уравнения прямой в отрезках и построить график.

7. Записать уравнение прямой l , проходящей через точки $A(2; 8; 7)$ и $B(-3; 2; 1)$, в параметрическом и каноническом виде. Определить, принадлежит ли точка $C(-1; -4; 3)$ прямой l .

8. Составить уравнение прямой l_3 , проходящей через точку $M_0(-1; 3; 4)$ перпендикулярно прямым l_1 и l_2 . Вычислить угол между прямыми l_1 , l_3 . Вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l_1 . Проверить условие перпендикулярности и параллельности прямых l_2 , l_3 . Проверить принадлежность прямых l_1 , l_2 одной плоскости. Уравнение прямой l_1 имеет вид $\frac{x+7}{-5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{2}$, уравнение прямой l_2 имеет вид $\frac{x+7}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+6}{5}$.

9. Составить уравнение прямой, проходящей через пересечение двух плоскостей $\begin{cases} 7x + 9y + z - 5 = 0 \\ 5x + 3y - 8z + 8 = 0 \end{cases}$ и точку $A(-3; 2; 6)$.

10. Вычислить угол между прямой $\frac{x+7}{-5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{2}$ и плоскостью $5x + 3y - 8z + 8 = 0$.

11. Записать уравнение окружности, центр которой смещен относительно начала координат на -3 единицы по оси абсцисс и на 4 единицы относительно оси ординат, точка $(10; 4)$ лежит на окружности.

12. Составить каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между директрисами равно 18 , действительная полуось гиперболы равна двум.

ВАРИАНТ № 6

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3; 2; 1)$ перпендикулярно оси Oy .

2. Составить уравнение плоскости α , проходящей через точку $Y(1; 3; 5)$ параллельно плоскости β , проходящей через три точки $D(0; 1; 2)$, $C(0; -1; 1)$, $E(1; 0; -1)$, не лежащие на одной прямой. Уравнение плоскости α привести к уравнению плоскости в отрезках и построить схематично график плоскости α .

3. Вычислить угол между плоскостями $x - y + z + 4 = 0$ и $2x - 4y + 5z - 9 = 0$. Ответить на вопрос, параллельны или перпендикулярны плоскости.

4. Вычислить расстояние между точками $D(0; 1; 2)$, $Y(1; 3; 5)$ и координаты точки, делящей полученный отрезок в соотношении $5:1$.

5. Вычислить расстояние от точки $A(3; 2; 1)$ до плоскости α $2x - 3y + z - 4 = 0$.

6. На плоскости составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1; 5)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (2; 1)$. Записать полученное уравнение прямой в виде уравнения прямой в отрезках и построить график.

7. Записать уравнение прямой l , проходящей через точку $A(1; 3; 2)$ параллельно вектору $\vec{s} = \{-3; 7; 1\}$, в параметрическом и каноническом виде. Определить, принадлежит ли точка $B(-1; -4; -12)$ прямой l .

8. Составить уравнение прямой l_3 , проходящей через точку $M_0(-1; 3; 4)$ перпендикулярно прямым l_1 и l_2 . Вычислить угол между прямыми l_1 , l_3 . Вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l_1 . Проверить условие перпендикулярности и параллельности прямых l_2 , l_3 . Проверить принадлежность прямых l_1 , l_2 одной плоскости. Уравнение прямой l_1 имеет вид $\frac{x-1}{11} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-9}{2}$, уравнение прямой l_2 имеет вид $\frac{x-2}{9} = \frac{y+5}{8} = \frac{z+2}{7}$.

9. Составить уравнение прямой, проходящей через пересечение двух плоскостей $\begin{cases} 3x + 4y - 5z + 2 = 0 \\ 4x - 9y + 5z - 4 = 0 \end{cases}$ и точку $A(-3; 2; 6)$.

10. Вычислить угол между прямой $\frac{x-2}{9} = \frac{y+5}{8} = \frac{z+2}{7}$ и плоскостью $4x - 9y + 5z - 4 = 0$.

11. Записать каноническое уравнение эллипса, центр которого расположен в точке $(8; 9)$, эксцентриситет равен $0,1$, большая полуось равна 7 .

12. Составить уравнение директрисы и параболы, симметричной относительно оси Ox , имеющей вершину в начале координат, проходящей через точку $(-7; 16)$.

ВАРИАНТ № 7

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1; -2; 3)$ перпендикулярно оси Oz .

2. Составить уравнение плоскости α , проходящей через точку $Y(1; 3; 5)$ параллельно плоскости β , проходящей через три точки $B(3; 5; 1)$, $C(-1; 0; 2)$, $D(-7; 1; 5)$, не лежащие на одной прямой. Уравнение плоскости α привести к уравнению плоскости в отрезках и построить схематично график плоскости α .

3. Вычислить угол между плоскостями $-4x + 14y - 6z + 4 = 0$ и $4x - 14y + 6z - 4 = 0$. Ответить на вопрос, параллельны или перпендикулярны плоскости.

4. Вычислить расстояние между точками $A(1; -2; 3)$, $C(-1; 0; 2)$ и координаты точки, делящей полученный отрезок пополам.

5. Вычислить расстояние от точки $A(1; -2; 3)$ до плоскости α $2x - 3y + z - 4 = 0$.

6. На плоскости составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(3; -1)$ и $B(8; 1)$. Привести его к уравнению прямой в отрезках и построить график.

7. Записать уравнение прямой l , проходящей через точку $A(-1; -2; -3)$ и начало координат, в параметрическом и каноническом виде. Определить, принадлежит ли точка $C(-1; -4; 3)$ прямой l .

8. Составить уравнение прямой l_3 , проходящей через точку $M_0(-1; 3; 4)$ перпендикулярно прямым l_1 и l_2 . Вычислить угол между прямыми l_1 , l_3 . Вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l_1 . Проверить условие перпендикулярности и параллельности прямых l_2 , l_3 . Проверить принадлежность пря-

мых l_1, l_2 одной плоскости. Уравнение прямой l_1 имеет вид $\frac{x+4}{0} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{-2}$, уравнение прямой l_2 имеет вид $\frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{-9} = \frac{z+1}{6}$.

9. Составить уравнение прямой, проходящей через пересечение двух плоскостей $\begin{cases} 3x+4y+5z+2=0 \\ 4x+2y+7z+4=0 \end{cases}$ и точку $A(-3; 2; 6)$.

10. Вычислить угол между прямой $\frac{x+4}{0} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{-2}$ и плоскостью $3x+4y+5z+2=0$.

11. Записать уравнение окружности, центр которой смещен относительно начала координат на 6 единиц по оси абсцисс и на 1 единицу относительно оси ординат, точка $(2; 9)$ лежит на окружности.

12. Составить каноническое уравнение гиперболы, если мнимая полуось гиперболы равна 4, уравнение асимптот $y = \pm 2,5x$.

ВАРИАНТ № 8

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-5; 2; 0)$ перпендикулярно оси $\vec{n} = \{1; -2; 3\}$.

2. Составить уравнение плоскости α , проходящей через точку $Y(1; 3; 5)$ параллельно плоскости β , проходящей через три точки $C(1; 2; 3)$, $D(3; 2; -1)$, $E(-1; -2; -3)$, не лежащие на одной прямой. Уравнение плоскости α привести к уравнению плоскости в отрезках и построить схематично график плоскости α .

3. Вычислить угол между плоскостями $-x+3y-5z+4=0$ и $4x+7y+z=0$. Ответить на вопрос, параллельны или перпендикулярны плоскости.

4. Вычислить расстояние между точками $C(1; 2; 3)$, $A(-5; 2; 0)$ и координаты точки, делящей полученный отрезок в соотношении 7:1.

5. Вычислить расстояние от точки $A(-5; 2; 0)$ до плоскости α $2x-3y+z-4=0$.

6. На плоскости составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1; 3)$ с углом наклона между осью Ox и прямой 30° . Записать полученное уравнение прямой в виде уравнения прямой в отрезках и построить график.

7. Записать уравнение прямой l , проходящей через точки $A(1; 3; 5)$ и $B(2; 4; -1)$, в параметрическом и каноническом виде. Определить, принадлежит ли точка $C(-1; -4; 3)$ прямой l .

8. Составить уравнение прямой l_3 , проходящей через точку $M_0(-1; 3; 4)$ перпендикулярно прямым l_1 и l_2 . Вычислить угол между прямыми l_1, l_3 . Вы-

числить расстояние от точки M_0 до прямой l_1 . Проверить условие перпендикулярности и параллельности прямых l_2, l_3 . Проверить принадлежность прямых l_1, l_2 одной плоскости. Уравнение прямой l_1 имеет вид $\frac{x+3}{7} = \frac{y+6}{-4} = \frac{z-1}{2}$, уравнение прямой l_2 имеет вид $\frac{x+7}{-4} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-3}{1}$.

9. Составить уравнение прямой, проходящей через пересечение двух плоскостей $\begin{cases} 7x+4z+1=0 \\ -5x+5y-3z+9=0 \end{cases}$ и точку $A(-3; 2; 6)$.

10. Вычислить угол между прямой $\frac{x+7}{-4} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-3}{1}$ и плоскостью $-5x+5y-3z+9=0$.

11. Дано уравнение эллипса $2x^2 + 8y^2 = 1568$. Вычислить: длины полуосей эллипса, координаты фокусов, эксцентриситет эллипса, уравнение директрис и расстояние между ними.

12. Составить уравнение директрисы и параболы, симметричной относительно оси Oy , имеющей вершину в начале координат, проходящей через точку $(-7; 16)$.

ВАРИАНТ № 9

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(12; 2; 6)$ перпендикулярно оси Ox .

2. Составить уравнение плоскости α , проходящей через точку $Y(1; 3; 5)$ параллельно плоскости β , проходящей через три точки $A(-2; -3; -1)$, $B(3; -2; -1)$, $K(3; 2; 4)$, не лежащие на одной прямой. Уравнение плоскости α привести к уравнению плоскости в отрезках и построить схематично график плоскости α .

3. Вычислить угол между плоскостями $2x+3y+z+4=0$ и $-4x+7y-13z=0$. Ответить на вопрос, параллельны или перпендикулярны плоскости.

4. Вычислить расстояние между точками $A(12; 2; 6)$, $Y(1; 3; 5)$ и координаты точки, делящей полученный отрезок в соотношении 9:1.

5. Вычислить расстояние от точки $A(12; 2; 6)$ до плоскости α $2x-3y+z-4=0$.

6. На плоскости составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(6; 1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (3; 5)$. Записать полученное уравнение прямой в виде уравнения прямой в отрезках и построить график.

7. Записать уравнение прямой l , проходящей через точку $A(1; 3; 5)$, параллельно вектору $\vec{s} = \{-3; 7; 1\}$, в параметрическом и каноническом виде. Определить, принадлежит ли точка $B(-1; -4; -12)$ прямой l .

8. Составить уравнение прямой l_3 , проходящей через точку $M_0(-1; 3; 4)$ перпендикулярно прямым l_1 и l_2 . Вычислить угол между прямыми l_1 , l_3 . Вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l_1 . Проверить условие перпендикулярности и параллельности прямых l_2 , l_3 . Проверить принадлежность прямых l_1 , l_2 одной плоскости. Уравнение прямой l_1 имеет вид $\frac{x+8}{3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{2}$, уравнение прямой l_2 имеет вид $\frac{x+9}{4} = \frac{y+2}{-9} = \frac{z+1}{7}$.

9. Составить уравнение прямой, проходящей через пересечение двух плоскостей $\begin{cases} 9x + 2y - z + 5 = 0 \\ 5x - 2y + 7z - 3 = 0 \end{cases}$ и точку $A(-3; 2; 6)$.

10. Вычислить угол между прямой $\frac{x+9}{4} = \frac{y+2}{-9} = \frac{z+1}{7}$ и плоскостью $5x - 2y + 7z - 3 = 0$.

11. Записать уравнение окружности, центр которой смещен относительно начала координат на 8 единиц по оси абсцисс и на 3 единицы относительно оси ординат, точка $(8; 4)$ лежит на окружности.

12. Составить каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между фокусами равно 22, уравнение асимптот $y = \pm x$.

ВАРИАНТ № 10

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1; -7; 9)$ перпендикулярно оси Oy .

2. Составить уравнение плоскости α , проходящей через точку $Y(1; 3; 5)$ параллельно плоскости β , проходящей через три точки $L(4; 5; 6)$, $M(1; -1; 12)$, $N(5; 4; 5)$, не лежащие на одной прямой. Уравнение плоскости α привести к уравнению плоскости в отрезках и построить схематично график плоскости α .

3. Вычислить угол между плоскостями $7x + 3y + 14z = 0$ и $x + y + 2z = 0$. Ответить на вопрос, параллельны или перпендикулярны плоскости.

4. Вычислить расстояние между точками $L(4; 5; 6)$, $M(1; -1; 12)$ и координаты точки, делящей полученный отрезок в соотношении 3:1.

5. Вычислить расстояние от точки $A(1; -7; 9)$ до плоскости α $2x - 3y + z - 4 = 0$.

6. На плоскости составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(5; 0)$ и $B(0; 4)$. Полученное уравнение прямой записать в виде уравнения прямой в отрезках и построить график.

7. Записать уравнение прямой l , проходящей через точку $A(-4; -5; -6)$ и начало координат, в параметрическом и каноническом виде. Определить, принадлежит ли точка $C(-1; -4; 3)$ прямой l .

8. Составить уравнение прямой l_3 , проходящей через точку $M_0(-1; 3; 4)$ перпендикулярно прямым l_1 и l_2 . Вычислить угол между прямыми l_1 , l_3 . Вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l_1 . Проверить условие перпендикулярности и параллельности прямых l_2 , l_3 . Проверить принадлежность прямых l_1 , l_2 одной плоскости. Уравнение прямой l_1 имеет вид $\frac{x+3}{5} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-1}{-3}$, уравнение прямой l_2 имеет вид $\frac{x+3}{2} = \frac{y}{-5} = \frac{z+6}{11}$.

9. Составить уравнение прямой, проходящей через пересечение двух плоскостей $\begin{cases} 4x - 5y + 2z - 7 = 0 \\ 5x - 3y + 10z = 0 \end{cases}$ и точку $A(-3; 2; 6)$.

10. Вычислить угол между прямой $\frac{x+3}{2} = \frac{y}{-5} = \frac{z+6}{11}$ и плоскостью $4x - 5y + 2z - 7 = 0$.

11. Записать каноническое уравнение эллипса, центр которого расположен в точке $(1; 3)$, расстояние между фокусами равно 15, малая полуось равна 20.

12. Найти вершину, фокус, уравнение директрисы параболы $y = 6x^2 - 7x + 5$.

ВАРИАНТ № 11

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1; 3; 9)$ перпендикулярно оси Oz .

2. Составить уравнение плоскости α , проходящей через точку $Y(1; 3; 5)$ параллельно плоскости β , проходящей через три точки $O(3; 5; 1)$, $P(-2; 7; 1)$, $R(2; 1; 0)$, не лежащие на одной прямой. Уравнение плоскости α привести к уравнению плоскости в отрезках и построить схематично график плоскости α .

3. Вычислить угол между плоскостями $x + 2y + 3z + 7 = 0$ и $4x - 5y + 6z = 7$. Ответить на вопрос, параллельны или перпендикулярны плоскости.

4. Вычислить расстояние между точками $O(3; 5; 1)$, $P(-2; 7; 1)$ и координаты точки, делящей полученный отрезок в соотношении 1:1.

5. Вычислить расстояние от точки $A(1; 3; 9)$ до плоскости α $2x - 3y + z - 4 = 0$.

6. На плоскости составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(4; 12)$ с углом наклона между осью Ox и прямой 90° . Записать полученное уравнение прямой в виде уравнения прямой в отрезках и построить график.

7. Записать уравнение прямой l , проходящей через точки $A(-2; 0; 3)$ и $B(6; -7; 1)$, в параметрическом и каноническом виде. Определить, принадлежит ли точка $C(-1; -4; 3)$ прямой l .

8. Составить уравнение прямой l_3 , проходящей через точку $M_0(-1; 3; 4)$ перпендикулярно прямым l_1 и l_2 . Вычислить угол между прямыми l_1 , l_3 . Вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l_1 . Проверить условие перпендикулярности и параллельности прямых l_2 , l_3 . Проверить принадлежность прямых l_1 , l_2 одной плоскости. Уравнение прямой l_1 имеет вид $\frac{x-3}{9} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+7}{5}$, уравнение прямой l_2 имеет вид $\frac{x+2}{9} = \frac{y+4}{1} = \frac{z+5}{1}$.

9. Составить уравнение прямой, проходящей через пересечение двух плоскостей $\begin{cases} 2x - 4y + 3z - 1 = 0 \\ 5x + 3y - 8z + 7 = 0 \end{cases}$ и точку $A(-3; 2; 6)$.

10. Вычислить угол между прямой $\frac{x+2}{9} = \frac{y+4}{1} = \frac{z+5}{1}$ и плоскостью $2x - 4y + 3z - 1 = 0$.

11. Записать уравнение окружности, центр которой смещен относительно начала координат на 10 единиц по оси абсцисс и на 5 единиц относительно оси ординат, точка $(2; 7)$ лежит на окружности.

12. Найти каноническое уравнение гиперболы с фокусами на оси Ox , проходящей через точки $M(6; -1)$, $K(-8; -2\sqrt{2})$.

ВАРИАНТ № 12

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-7; 15; 3)$ перпендикулярно оси $\vec{n} = \{-3; 5; 4\}$.

2. Составить уравнение плоскости α , проходящей через точку $Y(1; 3; 5)$ параллельно плоскости β , проходящей через три точки $S(2; 7; -1)$, $T(1; -6; 9)$, $U(2; 5; -4)$, не лежащие на одной прямой. Уравнение плоскости α привести к уравнению плоскости в отрезках и построить схематично график плоскости α .

3. Вычислить угол между плоскостями $3x - 4y + z + 2 = 0$ и $-5x - 2y + 7z - 3 = 0$. Ответить на вопрос, параллельны или перпендикулярны плоскости.

4. Вычислить расстояние между точками $S(2; 7; -1)$, $T(1; -6; 9)$ и координаты точки, делящей полученный отрезок в соотношении 5:1.

5. Вычислить расстояние от точки $A(-7; 15; 3)$ до плоскости α $2x - 3y + z - 4 = 0$.

6. На плоскости составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1; 5)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (7; 9)$. Привести уравнение прямой к виду уравнения прямой в отрезках и построить график.

7. Записать уравнение прямой l , проходящей через точку $A(-4; -5; -6)$ параллельно вектору $\vec{s} = \{-3; 7; 1\}$, в параметрическом и каноническом виде. Определить, принадлежит ли точка $B(-1; -4; -12)$ прямой l .

8. Составить уравнение прямой l_3 , проходящей через точку $M_0(-1; 3; 4)$ перпендикулярно прямым l_1 и l_2 . Вычислить угол между прямыми l_1 , l_3 . Вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l_1 . Проверить условие перпендикулярности и параллельности прямых l_2 , l_3 . Проверить принадлежность прямых l_1 , l_2 одной плоскости. Уравнение прямой l_1 имеет вид $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{7} = \frac{z+6}{1}$, уравнение прямой l_2 имеет вид $\frac{x}{-5} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{14}$.

9. Составить уравнение прямой, проходящей через пересечение двух плоскостей $\begin{cases} x+8y+3z+10=0 \\ 7x+6y+9z+8=0 \end{cases}$ и точку $A(-3; 2; 6)$.

10. Вычислить угол между прямой $\frac{x}{-5} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{14}$ и плоскостью $7x+6y+9z+8=0$.

11. Записать каноническое уравнение эллипса, центр которого расположен в точке $(-1; 2)$, эксцентриситет равен 0,2, большая полуось равна 8.

12. Найти вершину, фокус, уравнение директрисы параболы $x = 3y^2 + 8y + 6$.

ВАРИАНТ № 13

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(8; 4; 2)$ перпендикулярно оси Ox .

2. Составить уравнение плоскости α , проходящей через точку $Y(1; 3; 5)$ параллельно плоскости β , проходящей через три точки $V(3; 8; -1)$, $W(-1; 4; 6)$, $X(5; -2; 6)$, не лежащие на одной прямой. Уравнение плоскости α привести к уравнению плоскости в отрезках и построить схематично график плоскости α .

3. Вычислить угол между плоскостями $4x+y+5z+6=0$ и $3x-7y+9z=4$. Ответить на вопрос, параллельны или перпендикулярны плоскости.

4. Вычислить расстояние между точками $A(8; 4; 2)$, $W(-1; 4; 6)$ и координаты точки, делящей полученный отрезок в соотношении 17:1.

5. Вычислить расстояние от точки $A(8; 4; 2)$ до плоскости α $2x-3y+z-4=0$.

6. На плоскости составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(0; 2)$ и начало координат. Записать полученное уравнение прямой в виде уравнения прямой в отрезках и построить график.

7. Записать уравнение прямой l , проходящей через точку $A(-7; -8; -9)$ и начало координат, в параметрическом и каноническом виде. Определить, принадлежит ли точка $C(-1; -4; 3)$ прямой l .

8. Составить уравнение прямой l_3 , проходящей через точку $M_0(-1; 3; 4)$ перпендикулярно прямым l_1 и l_2 . Вычислить угол между прямыми l_1, l_3 . Вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l_1 . Проверить условие перпендикулярности и параллельности прямых l_2, l_3 . Проверить принадлежность прямых l_1, l_2 одной плоскости. Уравнение прямой l_1 имеет вид $\frac{x+16}{9} = \frac{y+5}{5} = \frac{z+1}{2}$, уравнение прямой l_2 имеет вид $\frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{9} = \frac{z+7}{5}$.

9. Составить уравнение прямой, проходящей через пересечение двух плоскостей $\begin{cases} 3x+5y+1z+5=0 \\ 4x+6y+9=0 \end{cases}$ и точку $A(-3; 2; 6)$.

10. Вычислить угол между прямой $\frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{9} = \frac{z+7}{5}$ и плоскостью $3x+5y+1z+5=0$.

11. Записать уравнение окружности, центр которой смещен относительно начала координат на 15 единиц по оси абсцисс и на -3 единицы относительно оси ординат, точка $(6; 4)$ лежит на окружности.

12. Составить каноническое уравнение гиперболы $9 \cdot (x-3)^2 - 16 \cdot (y+1)^2 = 169$ и уравнение асимптот.

ВАРИАНТ № 14

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3; 5; -6)$ перпендикулярно оси Oy .

2. Составить уравнение плоскости α , проходящей через точку $Y(1; 3; 5)$ параллельно плоскости β , проходящей через три точки $A(9; 1; 1)$, $B(3; 5; 0)$, $C(4; 7; -2)$, не лежащие на одной прямой. Уравнение плоскости α привести к уравнению плоскости в отрезках и построить схематично график плоскости α .

3. Вычислить угол между плоскостями $5x+9,5y+7z-2=0$ и $x-2y+2z+7=0$. Ответить на вопрос, параллельны или перпендикулярны плоскости.

4. Вычислить расстояние между точками $A(9; 1; 1)$, $B(3; 5; 0)$ и координаты точки, делящей полученный отрезок в соотношении $5:1$.

5. Вычислить расстояние от точки $A(3; 5; -6)$ до плоскости α $2x-3y+z-4=0$.

6. На плоскости составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(6; 0)$ с углом наклона между осью Ox и прямой 120° . Записать полученное уравнение прямой в виде уравнения прямой в отрезках и построить график.

7. Записать уравнение прямой l , проходящей через точки $A(8; 12; 3)$ и $B(5; -4; -1)$, в параметрическом и каноническом виде. Определить, принадлежит ли точка $C(-1; -4; 3)$ прямой l .

8. Составить уравнение прямой l_3 , проходящей через точку $M_0(-1; 3; 4)$ перпендикулярно прямым l_1 и l_2 . Вычислить угол между прямыми l_1 , l_3 . Вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l_1 . Проверить условие перпендикулярности и параллельности прямых l_2 , l_3 . Проверить принадлежность прямых l_1 , l_2 одной плоскости. Уравнение прямой l_1 имеет вид $\frac{x-2}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z-7}{0}$, уравнение прямой l_2 имеет вид $\frac{x+3}{6} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-8}{1}$.

9. Составить уравнение прямой, проходящей через пересечение двух плоскостей $\begin{cases} -9x + y - z + 4 = 0 \\ -2y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$ и точку $A(-3; 2; 6)$.

10. Вычислить угол между прямой $\frac{x+3}{6} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-8}{1}$ и плоскостью $-9x + y - z + 4 = 0$.

11. Записать каноническое уравнение эллипса, центр которого расположен в точке $(0; 1)$, эксцентриситет равен $0,3$, расстояние между директрисами эллипса равно 16 .

12. Составить уравнение директрисы и параболы, симметричной относительно оси Ox , имеющей вершину в начале координат, проходящей через точку $(3; 15)$.

ВАРИАНТ № 15

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-11; 9; 2)$ перпендикулярно оси Oz .

2. Составить уравнение плоскости α , проходящей через точку $Y(1; 3; 5)$ параллельно плоскости β , проходящей через три точки $Z(3; 7; 6)$, $Q(-1; 2; 3)$, $C(4; 5; 7)$, не лежащие на одной прямой. Уравнение плоскости α привести к уравнению плоскости в отрезках и построить схематично график плоскости α .

3. Вычислить угол между плоскостями $7x + 14z - 3 = 0$ и $x + y + 2z = 3$. Ответить на вопрос, параллельны или перпендикулярны плоскости.

4. Вычислить расстояние между точками $Z(3; 7; 6)$, $Q(-1; 2; 3)$ и координаты точки, делящей полученный отрезок в соотношении $7:1$.

5. Вычислить расстояние от точки $A(-11; 9; 2)$ до плоскости α $2x - 3y + z - 4 = 0$.

6. На плоскости составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1; 5)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (12; 15)$. Записать полученное

уравнение прямой в виде уравнения прямой в отрезках и построить график.

7. Записать уравнение прямой l , проходящей через точку $A(8; 12; 3)$ параллельно вектору $\vec{s} = \{-3; 7; 1\}$, в параметрическом и каноническом виде. Определить, принадлежит ли точка $B(-1; -4; -12)$ прямой l .

8. Составить уравнение прямой l_3 , проходящей через точку $M_0(-1; 3; 4)$ перпендикулярно прямым l_1 и l_2 . Вычислить угол между прямыми l_1 , l_3 . Вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l_1 . Проверить условие перпендикулярности и параллельности прямых l_2 , l_3 . Проверить принадлежность прямых l_1 , l_2 одной плоскости. Уравнение прямой l_1 имеет вид $\frac{x+5}{7} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{4}$, уравнение прямой l_2 имеет вид $\frac{x-7}{3} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z-8}{1}$.

9. Составить уравнение прямой, проходящей через пересечение двух плоскостей $\begin{cases} 3x + 2y + 5z + 9 = 0 \\ 5x + 8y + 6z + 12 = 0 \end{cases}$ и точку $A(-3; 2; 6)$.

10. Вычислить угол между прямой $\frac{x-7}{3} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z-8}{1}$ и плоскостью $3x + 2y + 5z + 9 = 0$.

11. Записать уравнение окружности, центр которой смещен относительно начала координат на -9 единиц по оси абсцисс и не смещен относительно оси ординат, точка $(2; 14)$ лежит на окружности.

12. Дано уравнение гиперболы $36 \cdot (x+2)^2 - 16y^2 = 625$. Привести уравнение гиперболы к каноническому виду и вычислить: длины полуосей, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис.

ВАРИАНТ № 16

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-8; 11; 2)$ перпендикулярно оси $\vec{n} = \{11; 0; -3\}$.

2. Составить уравнение плоскости α , проходящей через точку $Y(1; 3; 5)$ параллельно плоскости β , проходящей через три точки $A(4; 3; 0)$, $D(-2; 5; 1)$, $G(1; -2; 3)$, не лежащие на одной прямой. Уравнение плоскости α привести к уравнению плоскости в отрезках и построить схематично график плоскости α .

3. Вычислить угол между плоскостями $2x - 3y + 7z + 1 = 0$ и $-2.5x + 3y + 2z - 1 = 0$. Ответить на вопрос, параллельны или перпендикулярны плоскости.

4. Вычислить расстояние между точками $A(4; 3; 0)$, $D(-2; 5; 1)$ и координаты точки, делящей полученный отрезок в соотношении $1:1$.

5. Вычислить расстояние от точки $A(-8; 11; 2)$ до плоскости α $2x - 3y + z - 4 = 0$.

6. На плоскости составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(5; 6)$ и $B(-4; 1)$. Привести его к уравнению прямой в отрезках и построить график.

7. Записать уравнение прямой l , проходящей через точку $A(-10; -11; -12)$ и начало координат, в параметрическом и каноническом виде. Определить, принадлежит ли точка $C(-1; -4; 3)$ прямой l .

8. Составить уравнение прямой l_3 , проходящей через точку $M_0(-1; 3; 4)$ перпендикулярно прямым l_1 и l_2 . Вычислить угол между прямыми l_1 , l_3 . Вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l_1 . Проверить условие перпендикулярности и параллельности прямых l_2 , l_3 . Проверить принадлежность прямых l_1 , l_2 одной плоскости. Уравнение прямой l_1 имеет вид $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{-2}$, уравнение прямой l_2 имеет вид $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z+5}{-9}$.

9. Составить уравнение прямой, проходящей через пересечение двух плоскостей $\begin{cases} -x + 2y - 3z + 4 = 0 \\ 5x - 6y + 7z - 8 = 0 \end{cases}$ и точку $A(-3; 2; 6)$.

10. Вычислить угол между прямой $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z+5}{-9}$ и плоскостью $5x - 6y + 7z - 8 = 0$.

11. Дано уравнение эллипса $64x^2 + 81y^2 = 1000$. Записать уравнение эллипса в каноническом виде, вычислить: длины его полуосей, координаты фокусов, эксцентриситет эллипса, уравнение директрис и расстояние между ними.

12. Составить уравнение директрисы и параболы, симметричной относительно оси Oy , имеющей вершину в начале координат, проходящей через точку $(3; 15)$.

ВАРИАНТ № 17

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(0; 3; 5)$ перпендикулярно оси Ox .

2. Составить уравнение плоскости α , проходящей через точку $Y(1; 3; 5)$ параллельно плоскости β , проходящей через три точки $J(8; 4; 2)$, $B(-1; 1; 0)$, $D(0; 1; 2)$, не лежащие на одной прямой. Уравнение плоскости α привести к уравнению плоскости в отрезках и построить схематично график плоскости α .

3. Вычислить угол между плоскостями $\frac{x}{7} + 9y + \frac{z}{3} - 3 = 0$ и $2x - y + 3z - 7 = 0$. Ответить на вопрос, параллельны или перпендикулярны плоскости.

4. Вычислить расстояние между точками $J(8; 4; 2)$, $B(-1; 1; 0)$ и координаты точки, делящей полученный отрезок в соотношении 3:1.

5. Вычислить расстояние от точки $A(0; 3; 5)$ до плоскости α $2x - 3y + z - 4 = 0$.

6. На плоскости составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 3)$ с углом наклона между осью Ox и прямой 135° . Записать полученное уравнение прямой в виде уравнения прямой в отрезках и построить график.

7. Записать уравнение прямой l , проходящей через точки $A(3; 4; 8)$ и $B(2; 0; 12)$, в параметрическом и каноническом виде. Определить, принадлежит ли точка $C(-1; -4; 3)$ прямой l .

8. Составить уравнение прямой l_3 , проходящей через точку $M_0(-1; 3; 4)$ перпендикулярно прямым l_1 и l_2 . Вычислить угол между прямыми l_1 , l_3 . Вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l_1 . Проверить условие перпендикулярности и параллельности прямых l_2 , l_3 . Проверить принадлежность прямых l_1 , l_2 одной плоскости. Уравнение прямой l_1 имеет вид $\frac{x-7}{9} = \frac{y+2}{12} = \frac{z+4}{1}$, уравнение прямой l_2 имеет вид $\frac{x+8}{1} = \frac{y-3}{9} = \frac{z+2}{1}$.

9. Составить уравнение прямой, проходящей через пересечение двух плоскостей $\begin{cases} 8x + 9y + 2z = 0 \\ 2x + 2y - z + 8 = 0 \end{cases}$ и точку $A(-3; 2; 6)$.

10. Вычислить угол между прямой $\frac{x-7}{9} = \frac{y+2}{12} = \frac{z+4}{1}$ и плоскостью $2x + 2y + z + 8 = 0$.

11. Записать уравнение окружности, центр которой смещен относительно начала координат на 7 единиц по оси абсцисс и на -4 единицы относительно оси ординат, точка $(13; 4)$ лежит на окружности.

12. Составить каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между фокусами равно 20, действительная полуось равна 6.

ВАРИАНТ № 18

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(9; 1; 1)$ перпендикулярно оси Oy .

2. Составить уравнение плоскости α , проходящей через точку $Y(1; 3; 5)$ параллельно плоскости β , проходящей через три точки $C(1; 2; 3)$, $A(-2; -3; -1)$, $L(4; 5; 6)$, не лежащие на одной прямой. Уравнение плоскости

α привести к уравнению плоскости в отрезках и построить схематично график плоскости α .

3. Вычислить угол между плоскостями $\frac{x}{2} - \frac{y}{7} + \frac{z}{3} + 4 = 0$ и $2x - y + 3z = 0$. Ответить на вопрос, параллельны или перпендикулярны плоскости.

4. Вычислить расстояние между точками $C(1; 2; 3)$, $A(-2; -3; -1)$ и координаты точки, делящей полученный отрезок в соотношении 9:1.

5. Вычислить расстояние от точки $A(9; 1; 1)$ до плоскости α $2x - 3y + z - 4 = 0$.

6. На плоскости составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1; 5)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (-1; 2)$. Записать полученное уравнение прямой в виде уравнения прямой в отрезках и построить график.

7. Записать уравнение прямой l , проходящей через точку $A(0; -11; -12)$ параллельно вектору $\vec{s} = \{-3; 7; 1\}$, в параметрическом и каноническом виде. Определить, принадлежит ли точка $B(-1; -4; -12)$ прямой l .

8. Составить уравнение прямой l_3 , проходящей через точку $M_0(-1; 3; 4)$ перпендикулярно прямым l_1 и l_2 . Вычислить угол между прямыми l_1 , l_3 . Вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l_1 . Проверить условие перпендикулярности и параллельности прямых l_2 , l_3 . Проверить принадлежность прямых l_1 , l_2 одной плоскости. Уравнение прямой l_1 имеет вид

$$\frac{x-8}{7} = \frac{y-3}{9} = \frac{z-3}{-2}, \quad \text{уравнение прямой } l_2 \text{ имеет вид}$$
$$\frac{x+9}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+5}{-7}.$$

9. Составить уравнение прямой, проходящей через пересечение двух плоскостей $\begin{cases} 8x - 5y + 8z - 2 = 0 \\ 4x + 7y - 5z + 8 = 0 \end{cases}$ и точку $A(-3; 2; 6)$.

10. Вычислить угол между прямой $\frac{x+9}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+5}{-7}$ и плоскостью $8x - 5y + 8z - 2 = 0$.

11. Записать каноническое уравнение эллипса, центр которого расположен в точке $(2; 6)$, эксцентриситет равен 0,4, большая полуось равна 9.

12. Найти вершину, фокус, уравнение директрисы параболы $y = 15x^2 - 8x + 2$.

ВАРИАНТ № 19

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(0; 2; 3)$ перпендикулярно оси Oz .

2. Составить уравнение плоскости α , проходящей через точку $Y(1; 3; 5)$ параллельно плоскости β , проходящей через три точки $M(1; -1; 12)$, $O(3; 5; 1)$, $S(2; 7; -1)$, не лежащие на одной прямой. Уравнение плоскости α привести к уравнению плоскости в отрезках и построить схематично график плоскости α .

3. Вычислить угол между плоскостями $9x + y + z + 2 = 0$ и $14x + y - 127z = 3$. Ответить на вопрос, параллельны или перпендикулярны плоскости.

4. Вычислить расстояние между точками $M(1; -1; 12)$, $O(3; 5; 1)$ и координаты точки, делящей полученный отрезок в соотношении 12:1.

5. Вычислить расстояние от точки $A(0; 2; 3)$ до плоскости α $2x - 3y + z - 4 = 0$.

6. На плоскости составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(8; 7)$ и $B(-1; 3)$. Записать полученное уравнение прямой в виде уравнения прямой в отрезках и построить график.

7. Записать уравнение прямой l , проходящей через точку $A(-13; -14; -6)$ и начало координат, в параметрическом и каноническом виде. Определить, принадлежит ли точка $C(-1; -4; 3)$ прямой l .

8. Составить уравнение прямой l_3 , проходящей через точку $M_0(-1; 3; 4)$ перпендикулярно прямым l_1 и l_2 . Вычислить угол между прямыми l_1 , l_3 . Вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l_1 . Проверить условие перпендикулярности и параллельности прямых l_2 , l_3 . Проверить принадлежность прямых l_1 , l_2 одной плоскости. Уравнение прямой l_1 имеет вид $\frac{x-7}{5} = \frac{y-9}{11} = \frac{z-3}{-2}$, уравнение прямой l_2 имеет вид $\frac{x+2}{12} = \frac{y-3}{8} = \frac{z-5}{4}$.

9. Составить уравнение прямой, проходящей через пересечение двух плоскостей $\begin{cases} 8x + 9y + 2z + 2 = 0 \\ 4x + 7y + z + 8 = 0 \end{cases}$ и точку $A(-3; 2; 6)$.

10. Вычислить угол между прямой $\frac{x+2}{12} = \frac{y-3}{8} = \frac{z-5}{4}$ и плоскостью $4x + 7y + z + 8 = 0$.

11. Записать уравнение окружности, центр которой смещен относительно начала координат на 5 единиц по оси абсцисс и на 8 единиц относительно оси ординат, точка $(11; 12)$ лежит на окружности.

12. Составить каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между директрисами равно 20, действительная полуось гиперболы равна 3.

ВАРИАНТ № 20

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(0; 1; 3)$ перпендикулярно оси $\vec{n} = \{9; 8; -1\}$.

2. Составить уравнение плоскости α , проходящей через точку $Y(1; 3; 5)$ параллельно плоскости β , проходящей через три точки $V(3; 8; -1)$, $Z(3; 7; 6)$, $A(4; 3; 0)$, не лежащие на одной прямой. Уравнение плоскости α привести к уравнению плоскости в отрезках и построить схематично график плоскости α .

3. Вычислить угол между плоскостями $3x - 4y + 2z = 1$ и $-\frac{x}{3} + \frac{y}{4} - \frac{z}{2} = 1$.

Ответить на вопрос, параллельны или перпендикулярны плоскости.

4. Вычислить расстояние между точками $V(3; 8; -1)$, $Z(3; 7; 6)$ и координаты точки, делящей полученный отрезок в соотношении 5:1.

5. Вычислить расстояние от точки $A(0; 1; 3)$ до плоскости α $2x - 3y + z - 4 = 0$.

6. На плоскости составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1; 6)$ с углом наклона между осью Ox и прямой 150° . Записать полученное уравнение прямой в виде уравнения прямой в отрезках и построить график.

7. Записать уравнение прямой l , проходящей через точки $A(7; 9; 13)$ и $B(-2; 6; 5)$, в параметрическом и каноническом виде. Определить, принадлежит ли точка $C(-1; -4; 3)$ прямой l .

8. Составить уравнение прямой l_3 , проходящей через точку $M_0(-1; 3; 4)$ перпендикулярно прямым l_1 и l_2 . Вычислить угол между прямыми l_1 , l_3 . Вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l_1 . Проверить условие перпендикулярности и параллельности прямых l_2 , l_3 . Проверить принадлежность прямых l_1 , l_2 одной плоскости. Уравнение прямой l_1 имеет вид

$$\frac{x+7}{-3} = \frac{y+8}{-11} = \frac{z+9}{-2}, \quad \text{уравнение прямой } l_2 \text{ имеет вид}$$
$$\frac{x+2}{4} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-5}{9}.$$

9. Составить уравнение прямой, проходящей через пересечение двух плоскостей $\begin{cases} 2x + 2y + 9z = 0 \\ 7x + 8y + z + 3 = 0 \end{cases}$ и точку $A(-3; 2; 6)$.

10. Вычислить угол между прямой $\frac{x+2}{4} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-5}{9}$ и плоскостью $2x + 2y + 9z = 0$.

11. Записать каноническое уравнение эллипса, центр которого расположен в точке $(0; 2)$, эксцентриситет равен $0,9$, расстояние между директрисами эллипса 46 .

12. Найти вершину, фокус, уравнение директрисы параболы $x = -3y^2 + 9y + 4$.

ВАРИАНТ № 21

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1; 0; 3)$ перпендикулярно оси Ox .

2. Составить уравнение плоскости α , проходящей через точку $Y(1; 3; 5)$ параллельно плоскости β , проходящей через три точки $R(2; 1; 0)$, $U(2; 5; -4)$, $X(5; -2; 6)$, не лежащие на одной прямой. Уравнение плоскости α привести к уравнению плоскости в отрезках и построить схематично график плоскости α .

3. Вычислить угол между плоскостями $4x + y + 5z + 3 = 0$ и $x + 8y - 2,4z = 0$. Ответить на вопрос, параллельны или перпендикулярны плоскости.

4. Вычислить расстояние между точками $R(2; 1; 0)$, $U(2; 5; -4)$ и координаты точки, делящей полученный отрезок в соотношении $15:1$.

5. Вычислить расстояние от точки $A(1; 0; 3)$ до плоскости α $2x - 3y + z - 4 = 0$.

6. На плоскости составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1; 5)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (-3; 4)$. Записать полученное уравнение прямой в виде уравнения прямой в отрезках и построить график.

7. Записать уравнение прямой l , проходящей через точку $A(-13; 4; -6)$ параллельно вектору $\vec{s} = \{-3; 7; 1\}$, в параметрическом и каноническом виде. Определить, принадлежит ли точка $B(-1; -4; -12)$ прямой l .

8. Составить уравнение прямой l_3 , проходящей через точку $M_0(-1; 3; 4)$ перпендикулярно прямым l_1 и l_2 . Вычислить угол между прямыми l_1 , l_3 . Вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l_1 . Проверить условие перпендикулярности и параллельности прямых l_2 , l_3 . Проверить принадлежность прямых l_1 , l_2 одной плоскости. Уравнение прямой l_1 име-

ет вид $\frac{x+4}{3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-1}{1}$, уравнение прямой l_2 имеет вид $\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z-5}{-9}$.

9. Составить уравнение прямой, проходящей через пересечение двух плоскостей $\begin{cases} -2x - 4y - 3z = 0 \\ 5x - 3y - 8z - 7 = 0 \end{cases}$ и точку $A(-3; 2; 6)$.

10. Вычислить угол между прямой $\frac{x+4}{3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-1}{1}$ и плоскостью $-2x - 4y - 3z = 0$.

11. Записать уравнение окружности, центр которой смещен относительно начала координат на 2 единицы по оси абсцисс и на 1 единицу относительно оси ординат, точка $(9; 10)$ лежит на окружности.

12. Составить каноническое уравнение гиперболы, если мнимая полуось гиперболы равна 2, уравнение асимптот $y = \pm x$.

ВАРИАНТ № 22

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(0; 4; -7)$ перпендикулярно оси Oy .

2. Составить уравнение плоскости α , проходящей через точку $Y(1; 3; 5)$ параллельно плоскости β , проходящей через три точки $B(3; 4; 7)$, $E(-4; 5; 0)$, $H(3; -2; 5)$, не лежащие на одной прямой. Уравнение плоскости α привести к уравнению плоскости в отрезках и построить схематично график плоскости α .

3. Вычислить угол между плоскостями $x - y + 3z + 5 = 0$ и $7x - 2y + 3z + 4 = 0$. Ответить на вопрос, параллельны или перпендикулярны плоскости.

4. Вычислить расстояние между точками $B(3; 4; 7)$, $E(-4; 5; 0)$ и координаты точки, делящей полученный отрезок в соотношении 6:1.

5. Вычислить расстояние от точки $A(0; 4; -7)$ до плоскости α $2x - 3y + z - 4 = 0$.

6. На плоскости составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(5; 12)$ и начало координат. Записать полученное уравнение прямой в виде уравнения прямой в отрезках и построить график.

7. Записать уравнение прямой l , проходящей через точку $A(3; 8; 5)$ и начало координат, в параметрическом и каноническом виде. Определить, принадлежит ли точка $C(-1; -4; 3)$ прямой l .

8. Составить уравнение прямой l_3 , проходящей через точку $M_0(-1; 3; 4)$ перпендикулярно прямым l_1 и l_2 . Вычислить угол между пря-

мыми l_1, l_3 . Вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l_1 . Проверить условие перпендикулярности и параллельности прямых l_2, l_3 . Проверить принадлежность прямых l_1, l_2 одной плоскости. Уравнение прямой l_1 имеет вид $\frac{x-6}{3} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-4}{1}$, уравнение прямой l_2 имеет вид $\frac{x+5}{7} = \frac{y+3}{8} = \frac{z+1}{9}$.

9. Составить уравнение прямой, проходящей через пересечение двух плоскостей $\begin{cases} x - y + 3z - 10 = 0 \\ -7x + 6y - 9z + 8 = 0 \end{cases}$ и точку $A(-3; 2; 6)$.

10. Вычислить угол между прямой $\frac{x+5}{7} = \frac{y+3}{8} = \frac{z+1}{9}$ и плоскостью $-7x + 6y - 9z + 8 = 0$.

11. Записать каноническое уравнение эллипса, центр которого расположен в точке $(3; 2)$, расстояние между фокусами равно 7, малая полуось равна 18.

12. Составить уравнение директрисы и параболы, симметричной относительно оси Ox , имеющей вершину в начале координат, проходящей через точку $(19; 3)$.

ВАРИАНТ № 23

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(16; 3; 0)$ перпендикулярно оси Oz .

2. Составить уравнение плоскости α , проходящей через точку $Y(1; 3; 5)$ параллельно плоскости β , проходящей через три точки $K(-6; 0; 15)$, $F(0; -1; 1)$, $C(0; -1; 1)$, не лежащие на одной прямой. Уравнение плоскости α привести к уравнению плоскости в отрезках и построить схематично график плоскости α .

3. Вычислить угол между плоскостями $-4,5x - 4y + 3z + 1 = 0$ и $2x + 3y + 7z = 0$. Ответить на вопрос, параллельны или перпендикулярны плоскости.

4. Вычислить расстояние между точками $K(-6; 0; 15)$, $F(0; -1; 1)$ и координаты точки, делящей полученный отрезок в соотношении 5:1.

5. Вычислить расстояние от точки $A(16; 3; 0)$ до плоскости α $2x - 3y + z - 4 = 0$.

6. На плоскости составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 0)$ с углом наклона между осью Ox и прямой 180° . Записать полученное уравнение прямой в виде уравнения прямой в отрезках и построить график.

7. Записать уравнение прямой l , проходящей через точки $A(-1; -3; 6)$ и $B(0; 5; 4)$, в параметрическом и каноническом виде. Определить, принадлежит ли точка $C(-1; -4; 3)$ прямой l .

8. Составить уравнение прямой l_3 , проходящей через точку $M_0(-1; 3; 4)$ перпендикулярно прямым l_1 и l_2 . Вычислить угол между прямыми l_1 , l_3 . Вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l_1 . Проверить условие перпендикулярности и параллельности прямых l_2 , l_3 . Проверить принадлежность прямых l_1 , l_2 одной плоскости. Уравнение прямой l_1 имеет вид $\frac{x-9}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-1}{-2}$, уравнение прямой l_2 имеет вид $\frac{x}{4} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z}{1}$.

9. Составить уравнение прямой, проходящей через пересечение двух плоскостей $\begin{cases} -3x - 5y - 1z + 5 = 0 \\ 4x + 11y - 9 = 0 \end{cases}$ и точку $A(-3; 2; 6)$.

10. Вычислить угол между прямой $\frac{x-9}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-1}{-2}$ и плоскостью $4x + 11y - 9 = 0$.

11. Записать уравнение окружности, центр которой смещен относительно начала координат на 3 единицы по оси абсцисс и не смещен относительно оси ординат, точка $(7; 8)$ лежит на окружности.

12. Составить каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между фокусами равно 18, уравнение асимптот $y = \pm 3x$.

ВАРИАНТ № 24

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(12; 18; 1)$ перпендикулярно оси $\vec{n} = \{2; -3; -4\}$.

2. Составить уравнение плоскости α , проходящей через точку $Y(1; 3; 5)$ параллельно плоскости β , проходящей через три точки $A(0; 1; 7)$, $B(2; 4; -1)$, $C(-3; 0; 2)$, не лежащие на одной прямой. Уравнение плоскости α привести к уравнению плоскости в отрезках и построить схематично график плоскости α .

3. Вычислить угол между плоскостями $2x + 3z + 4 = 0$ и $4x - y + 8z + 3 = 0$. Ответить на вопрос, параллельны или перпендикулярны плоскости.

4. Вычислить расстояние между точками $A(0; 1; 7)$, $B(2; 4; -1)$ и координаты точки, делящей полученный отрезок в соотношении 3:1.

5. Вычислить расстояние от точки $A(12; 18; 1)$ до плоскости α $2x - 3y + z - 4 = 0$.

6. На плоскости составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1; 5)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (3; -7)$. Записать полученное

уравнение прямой в виде уравнения прямой в отрезках и построить график.

7. Записать уравнение прямой l , проходящей через точку $A(3; 8; 5)$ параллельно вектору $\vec{s} = \{-3; 7; 1\}$, в параметрическом и каноническом виде. Определить, принадлежит ли точка $B(-1; -4; -12)$ прямой l .

8. Составить уравнение прямой l_3 , проходящей через точку $M_0(-1; 3; 4)$ перпендикулярно прямым l_1 и l_2 . Вычислить угол между прямыми l_1 , l_3 . Вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l_1 . Проверить условие перпендикулярности и параллельности прямых l_2 , l_3 . Проверить принадлежность прямых l_1 , l_2 одной плоскости. Уравнение прямой l_1 имеет вид $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{-2}$, уравнение прямой l_2 имеет вид $\frac{x-7}{6} = \frac{y-8}{2} = \frac{z+5}{1}$.

9. Составить уравнение прямой, проходящей через пересечение двух плоскостей $\begin{cases} -9x + 3y - 4 = 0 \\ -7x + 2y - 5z + 1 = 0 \end{cases}$ и точку $A(-3; 2; 6)$.

10. Вычислить угол между прямой $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{-2}$ и плоскостью $-7x + 2y - 5z + 1 = 0$.

11. Записать каноническое уравнение эллипса, центр которого расположен в точке $(5; 1)$, эксцентриситет равен 0,6, большая полуось равна 100.

12. Составить уравнение директрисы и параболы, симметричной относительно оси Oy , имеющей вершину в начале координат, проходящей через точку $(19; 3)$.

ВАРИАНТ № 25

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3; 15; 2)$ перпендикулярно оси Ox .

2. Составить уравнение плоскости α , проходящей через точку $Y(1; 3; 5)$ параллельно плоскости β , проходящей через три точки $D(3; 2; -1)$, $B(3; -2; -1)$, $N(5; 4; 5)$, не лежащие на одной прямой. Уравнение плоскости α привести к уравнению плоскости в отрезках и построить схематично график плоскости α .

3. Вычислить угол между плоскостями $5x + 6y - 13z + 3 = 0$ и $4x + y + 2z = 7$. Ответить на вопрос, параллельны или перпендикулярны плоскости.

4. Вычислить расстояние между точками $D(3; 2; -1)$, $B(3; -2; -1)$ и координаты точки, делящей полученный отрезок в соотношении 9:1.

5. Вычислить расстояние от точки $A(3; 15; 2)$ до плоскости α $2x - 3y + z - 4 = 0$.

6. На плоскости составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(6; 1)$ и $B(5; 0)$. Записать полученное уравнение прямой в виде уравнения прямой в отрезках и построить график.

7. Записать уравнение прямой l , проходящей через точку $A(-2; 10; 1)$ и начало координат, в параметрическом и каноническом виде. Определить, принадлежит ли точка $C(-1; -4; 3)$ прямой l .

8. Составить уравнение прямой l_3 , проходящей через точку $M_0(-1; 3; 4)$ перпендикулярно прямым l_1 и l_2 . Вычислить угол между прямыми l_1 , l_3 . Вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l_1 . Проверить условие перпендикулярности и параллельности прямых l_2 , l_3 . Проверить принадлежность прямых l_1 , l_2 одной плоскости. Уравнение прямой l_1 имеет вид $\frac{x-7}{0} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-3}{9}$, уравнение прямой l_2 имеет вид $\frac{x-1}{5} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{2}$.

9. Составить уравнение прямой, проходящей через пересечение двух плоскостей $\begin{cases} 9x + 3y + 4 = 0 \\ 7x - 2y + 5z + 1 = 0 \end{cases}$ и точку $A(-3; 2; 6)$.

10. Вычислить угол между прямой $\frac{x-7}{0} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-3}{9}$ и плоскостью $9x + 3y + 4 = 0$.

11. Записать уравнение окружности, центр которой расположен в начале координат, точка $(5; 6)$ лежит на окружности.

12. Найти каноническое уравнение гиперболы с фокусами на оси Ox , проходящей через точки $M(3; -1)$, $K(-2\sqrt{2}; -4)$.

ВАРИАНТ № 26

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(7; 1; 9)$ перпендикулярно оси Oy .

2. Составить уравнение плоскости α , проходящей через точку $Y(1; 3; 5)$ параллельно плоскости β , проходящей через три точки $P(-2; 7; 1)$, $T(1; -6; 9)$, $W(-1; 4; 6)$, не лежащие на одной прямой. Уравнение плоскости α привести к уравнению плоскости в отрезках и построить схематично график плоскости α .

3. Вычислить угол между плоскостями $7x - 2y + 3z - 8 = 0$ и $-4x + \frac{y}{3} - \frac{z}{2} = 1$. Ответить на вопрос, параллельны или перпендикулярны плоскости.

4. Вычислить расстояние между точками $P(-2; 7; 1)$, $T(1; -6; 9)$ и координаты точки, делящей полученный отрезок в соотношении 6:1.

5. Вычислить расстояние от точки $A(7; 1; 9)$ до плоскости α $2x - 3y + z - 4 = 0$.

6. На плоскости составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1; 4)$ с углом наклона между осью Ox и прямой 210° . Записать полученное уравнение прямой в виде уравнения прямой в отрезках и построить график.

7. Записать уравнение прямой l , проходящей через точки $A(-15; 2; 7)$ и $B(0; 3; 0)$, в параметрическом и каноническом виде. Определить, принадлежит ли точка $C(-1; -4; 3)$ прямой l .

8. Составить уравнение прямой l_3 , проходящей через точку $M_0(-1; 3; 4)$ перпендикулярно прямым l_1 и l_2 . Вычислить угол между прямыми l_1 , l_3 . Вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l_1 . Проверить условие перпендикулярности и параллельности прямых l_2 , l_3 . Проверить принадлежность прямых l_1 , l_2 одной плоскости. Уравнение прямой l_1 имеет вид

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{-2}, \quad \text{уравнение прямой } l_2 \text{ имеет вид}$$
$$\frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+1}{0}.$$

9. Составить уравнение прямой, проходящей через пересечение двух плоскостей $\begin{cases} 9x + y + z + 4 = 0 \\ 2y + 3z + 5 = 0 \end{cases}$ и точку $A(-3; 2; 6)$.

10. Вычислить угол между прямой $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{-2}$ и плоскостью $2y + 3z + 5 = 0$.

11. Записать каноническое уравнение эллипса, центр которого расположен в точке $(0; 3)$, эксцентриситет равен 0,7, расстояние между директрисами эллипса равно 49.

12. Составить уравнение директрисы и параболы, симметричной относительно оси Ox , имеющей вершину в начале координат, проходящей через точку $(7; -8)$.

ВАРИАНТ № 27

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(8; 0; 3)$ перпендикулярно оси Oz .

2. Составить уравнение плоскости α , проходящей через точку $Y(1; 3; 5)$ параллельно плоскости β , проходящей через три точки $A(0; 4; 0)$, $B(15; 3; 1)$, $C(-8; 2; 1)$, не лежащие на одной прямой. Уравнение плоскости α

привести к уравнению плоскости в отрезках и построить схематично график плоскости α .

3. Вычислить угол между плоскостями $16x + 5y - 201,5z + 3 = 0$ и $23x + 7y + 2z - 4 = 0$. Ответить на вопрос, параллельны или перпендикулярны плоскости.

4. Вычислить расстояние между точками $A(0; 4; 0)$, $B(15; 3; 1)$ и координаты точки, делящей полученный отрезок в соотношении 7:1.

5. Вычислить расстояние от точки $A(8; 0; 3)$ до плоскости α $2x - 3y + z - 4 = 0$.

6. На плоскости составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1; 5)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (-6; 7)$. Записать полученное уравнение прямой в виде уравнения прямой в отрезках и построить график.

7. Записать уравнение прямой l , проходящей через точку $A(-15; 2; 7)$ параллельно вектору $\vec{s} = \{-3; 7; 1\}$, в параметрическом и каноническом виде. Определить, принадлежит ли точка $B(-1; -4; -12)$ прямой l .

8. Составить уравнение прямой l_3 , проходящей через точку $M_0(-1; 3; 4)$ перпендикулярно прямым l_1 и l_2 . Вычислить угол между прямыми l_1 , l_3 . Вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l_1 . Проверить условие перпендикулярности и параллельности прямых l_2 , l_3 . Проверить принадлежность прямых l_1 , l_2 одной плоскости. Уравнение прямой l_1 имеет вид $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{-2}$, уравнение прямой l_2 имеет вид $\frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+1}{0}$.

9. Составить уравнение прямой, проходящей через пересечение двух плоскостей $\begin{cases} -3x + 2y - 5z + 9 = 0 \\ 5x - 8y + 6z - 12 = 0 \end{cases}$ и точку $A(-3; 2; 6)$.

10. Вычислить угол между прямой $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{-2}$ и плоскостью $5x - 8y + 6z - 12 = 0$.

11. Записать уравнение окружности, центр которой смещен относительно начала координат на -3 единицы по оси абсцисс и на 5 единиц относительно оси ординат, точка $(3; 4)$ лежит на окружности.

12. Составить каноническое уравнение гиперболы $64 \cdot (x+1)^2 - 16 \cdot (y-5)^2 = 144$ и уравнение асимптот.

ВАРИАНТ № 28

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(0; 4; 0)$ перпендикулярно оси $\vec{n} = \{9; 1; 1\}$.

2. Составить уравнение плоскости α , проходящей через точку $Y(1; 3; 5)$ параллельно плоскости β , проходящей через три точки $C(-3; 2; 5)$, $F(-5; 0; 2)$, $I(1; -4; 7)$, не лежащие на одной прямой. Уравнение плоскости α привести к уравнению плоскости в отрезках и построить схематично график плоскости α .

3. Вычислить угол между плоскостями $18x - 6y + 9z + 4 = 0$ и $6x - 2y + 3z + 7 = 0$. Ответить на вопрос, параллельны или перпендикулярны плоскости.

4. Вычислить расстояние между точками $C(-3; 2; 5)$, $F(-5; 0; 2)$ и координаты точки, делящей полученный отрезок в соотношении 5:1.

5. Вычислить расстояние от точки $A(0; 4; -1)$ до плоскости α $2x - 3y + z - 4 = 0$.

6. На плоскости составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(-4; -11)$ и $B(3; 7)$. Полученное уравнение привести к виду уравнения прямой в отрезках и построить график.

7. Записать уравнение прямой l , проходящей через точку $A(0; -3; -1)$ и начало координат, в параметрическом и каноническом виде. Определить, принадлежит ли точка $C(-1; -4; 3)$ прямой l .

8. Составить уравнение прямой l_3 , проходящей через точку $M_0(-1; 3; 4)$ перпендикулярно прямым l_1 и l_2 . Вычислить угол между прямыми l_1 , l_3 . Вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l_1 . Проверить условие перпендикулярности и параллельности прямых l_2 , l_3 . Проверить принадлежность прямых l_1 , l_2 одной плоскости. Уравнение прямой l_1 имеет вид $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{-2}$, уравнение прямой l_2 имеет вид $\frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+1}{0}$.

9. Составить уравнение прямой, проходящей через пересечение двух плоскостей $\begin{cases} 7x - 2y + 9z - 4 = 0 \\ -5x + 8y - 7z + 10 = 0 \end{cases}$ и точку $A(-3; 2; 6)$.

10. Вычислить угол между прямой $\frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+1}{0}$ и плоскостью $7x - 2y + 9z - 4 = 0$.

11. Записать каноническое уравнение эллипса, центр которого расположен в точке $(7; -1)$, расстояние между фокусами равно 8, малая полуось равна 18.

12. Найти вершину, фокус, уравнение директрисы параболы $x = -3y^2 - 6y + 4$.

ВАРИАНТ № 29

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2; 1; 9)$ перпендикулярно оси Ox .

2. Составить уравнение плоскости α , проходящей через точку $Y(1; 3; 5)$ параллельно плоскости β , проходящей через три точки $E(-1; -2; -3)$, $K(3; 2; 4)$, $N(5; 4; 5)$, не лежащие на одной прямой. Уравнение плоскости α привести к уравнению плоскости в отрезках и построить схематично график плоскости α .

3. Вычислить угол между плоскостями $7x + 14y + 14z - 3 = 0$ и $5x + y + 10z + 3 = 0$. Ответить на вопрос, параллельны или перпендикулярны плоскости.

4. Вычислить расстояние между точками $E(-1; -2; -3)$, $K(3; 2; 4)$ и координаты точки, делящей полученный отрезок 7:1.

5. Вычислить расстояние от точки $A(2; 1; 9)$ до плоскости α $2x - 3y + z - 4 = 0$.

6. На плоскости составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1; 2)$ с углом наклона между осью Ox и прямой 225° . Записать составленное уравнение прямой в виде уравнения прямой в отрезках и построить график.

7. Записать уравнение прямой l , проходящей через точки $A(-9; 2; 1)$ и $B(-6; 2; 3)$, в параметрическом и каноническом виде. Определить, принадлежит ли точка $C(-1; -4; 3)$ прямой l .

8. Составить уравнение прямой l_3 , проходящей через точку $M_0(-1; 3; 4)$ перпендикулярно прямым l_1 и l_2 . Вычислить угол между прямыми l_1 , l_3 . Вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l_1 . Проверить условие перпендикулярности и параллельности прямых l_2 , l_3 . Проверить принадлежность прямых l_1 , l_2 одной плоскости. Уравнение прямой l_1 имеет вид

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{-2}, \quad \text{уравнение прямой } l_2 \text{ имеет вид}$$
$$\frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+1}{0}.$$

9. Составить уравнение прямой, проходящей через пересечение двух плоскостей $\begin{cases} 7x + 2y + 9z + 4 = 0 \\ 5x + 8y + 7z + 10 = 0 \end{cases}$ и точку $A(-3; 2; 6)$.

10. Вычислить угол между прямой $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{-2}$ и плоскостью $7x + 2y + 9z + 4 = 0$.

11. Записать уравнение окружности, центр которой смещен относительно начала координат на 1 единицу по оси абсцисс и на 6 единиц относительно оси ординат, точка $(1; 2)$ лежит на окружности.

12. Дано уравнение гиперболы $81 \cdot (x)^2 - 100y^2 = 14\,400$. Привести уравнение гиперболы к каноническому виду и вычислить: длины полуосей, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис.

ВАРИАНТ № 30

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(8; 0; 3)$ перпендикулярно оси Oz .

2. Составить уравнение плоскости α , проходящей через точку $Y(1; 3; 5)$ параллельно плоскости β , проходящей через три точки $L(9; -8; -1)$, $A(1; 0; -1)$, $E(1; 0; -1)$, не лежащие на одной прямой. Уравнение плоскости α привести к уравнению плоскости в отрезках и построить схематично график плоскости α .

3. Вычислить угол между плоскостями $4x + 5y + 3z + 1 = 0$ и $x - 2y + 2z + 7 = 0$. Ответить на вопрос, параллельны или перпендикулярны плоскости.

4. Вычислить расстояние между точками $A(8; 0; 3)$, $E(1; 0; -1)$ и координаты точки, делящей полученный отрезок в соотношении 2:1.

5. Вычислить расстояние от точки $A(8; 0; 3)$ до плоскости α $2x - 3y + z - 4 = 0$.

6. На плоскости составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1; 5)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (-2; 5)$. Записать полученное уравнение прямой в виде уравнения прямой в отрезках и построить график.

7. Записать уравнение прямой l , проходящей через точку $A(0; -3; -1)$ параллельно вектору $\vec{s} = \{-3; 7; 1\}$, в параметрическом и каноническом виде. Определить, принадлежит ли точка $B(-1; -4; -12)$ прямой l .

8. Составить уравнение прямой l_3 , проходящей через точку $M_0(-1; 3; 4)$ перпендикулярно прямым l_1 и l_2 . Вычислить угол между прямыми l_1 , l_3 . Вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l_1 . Проверить условие перпендикулярности и параллельности прямых l_2 , l_3 . Проверить принадлежность прямых l_1 , l_2 одной плоскости. Уравнение прямой l_1 име-

ет вид $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{-2}$, уравнение прямой l_2 имеет вид $\frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+1}{0}$.

9. Составить уравнение прямой, проходящей через пересечение двух плоскостей $\begin{cases} x+2y+3z+4=0 \\ 5x+6y+7z+8=0 \end{cases}$ и точку $A(-3; 2; 6)$.

10. Вычислить угол между прямой $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{-2}$ и плоскостью $x+2y+3z+4=0$.

11. Дано уравнение эллипса $49x^2 + 25y^2 = 225$. Записать уравнение эллипса в каноническом виде, вычислить: длины его полуосей, координаты фокусов, эксцентриситет эллипса, уравнение директрис и расстояние между ними.

12. Составить уравнение директрисы и параболы, симметричной относительно оси Ox , имеющей вершину в начале координат, проходящей через точку $(14; -8)$.

ГЛАВА IV КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Цели

Иметь представление о:

- комплексных числах и комплексной плоскости;
- действительной, мнимой части комплексного числа;
- различных формах записи комплексного числа;
- действиях над комплексными числами;
- возведении в степень и извлечении корня из комплексного числа;
- решении алгебраических уравнений с комплексными корнями.

Знать:

- как изобразить на комплексной плоскости комплексное число;
- как выделить действительную и мнимую часть комплексного числа;
- действия и свойства над комплексными числами;
- алгебраическую, тригонометрическую, показательную форму записи комплексного числа;
- формулу Муавра, формулу возведения в степень с натуральным показателем комплексного числа.

Уметь:

Находить действительную, мнимую часть комплексного числа, вычислять его длину, изображать графически на комплексной плоскости. Выполнять алгебраические операции над комплексными числами. Вычислять аргумент и главное значение аргумента комплексного числа. Записывать комплексное число в различных формах записи, возводить его в степень с натуральным показателем, извлекать корень. Решать алгебраические уравнения в комплексной области.

1. ПОНЯТИЕ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

1.1. Основные понятия

Определение. Комплексным числом z называется упорядоченная пара двух действительных чисел x и y , записанных в виде $z = x + iy$.

Символ i называется комплексной (мнимой) единицей, $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$.

Определение. Число x называется действительной частью комплексного числа z и обозначается $x = \operatorname{Re} z$.

Определение. Число y называется мнимой частью комплексного

числа z и обозначается $x = \operatorname{Im} z$.

Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется чисто мнимым числом.

Если $y = 0$, то число $x + i0 = x$ является действительным, т. е. множество всех действительных чисел является подмножеством множества всех комплексных чисел.

ПРИМЕР 1.

Найти действительную и мнимую часть комплексных чисел $z_1 = 7 + i3$, $z_2 = -4 + i5$, $z_3 = 2$.

РЕШЕНИЕ:

Действительные части комплексных чисел: $\operatorname{Re} z_1 = 7$, $\operatorname{Re} z_2 = -4$, $\operatorname{Re} z_3 = 2$.

Мнимые части комплексных чисел: $\operatorname{Im} z_1 = 3$, $\operatorname{Re} z_2 = 5$, $\operatorname{Re} z_3 = 0$.

ОТВЕТ: Действительные части комплексных чисел z_1 , z_2 , z_3 равны: $\operatorname{Re} z_1 = 7$, $\operatorname{Re} z_2 = -4$, $\operatorname{Re} z_3 = 2$. Мнимые части комплексных чисел z_1 , z_2 , z_3 равны: $\operatorname{Im} z_1 = 3$, $\operatorname{Re} z_2 = 5$, $\operatorname{Re} z_3 = 0$.

Определение. Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются комплексно-сопряженными.

ПРИМЕР 2.

Вычислить комплексно-сопряженные числа для комплексных чисел: $z_1 = 2 + i8$, $z_2 = 3 - i5$, $z_3 = 10$, $z_4 = -i10$.

РЕШЕНИЕ:

У комплексных чисел необходимо сменить знак мнимой части на противоположный. Комплексно-сопряженные числа: $\bar{z}_1 = 2 - i8$, $\bar{z}_2 = 3 + i5$, $\bar{z}_3 = 10$, $\bar{z}_4 = i10$.

ОТВЕТ: Комплексно-сопряженные числа комплексных чисел z_1 , z_2 , z_3 , z_4 равны: $\bar{z}_1 = 2 - i8$, $\bar{z}_2 = 3 + i5$, $\bar{z}_3 = 10$, $\bar{z}_4 = i10$.

Определение. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются равными тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части, т. е. $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Замечание. Комплексные числа не сравнивают между собой, понятие «больше», «меньше» для них не существует.

1.2. Комплексная плоскость

Любое комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой $M(x; y)$ плоскости Oxy декартовых координат, такой, что $x = \operatorname{Re} z$,

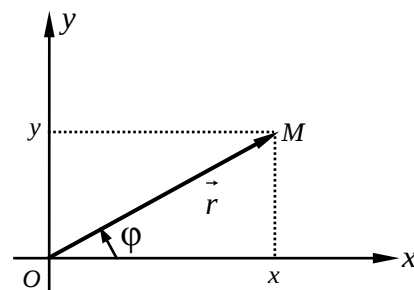


Рис. 1. Геометрическое изображение комплексного числа

$y = \operatorname{Im} z$. И наоборот. На рисунке 1 изображено комплексное число M .

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью. Число $z = 0$ является началом координат данной плоскости, ось абсцисс называется действительной осью, на ней лежат действительные числа. Ось ординат называется мнимой осью комплексной плоскости, на ней лежат чисто мнимые комплексные числа.

Комплексное число $z = x + iy$ можно изображать с помощью радиуса-вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x; y)$. Длина вектора $\vec{r}$, изображающего комплексное число z (см. рис. 1), называется модулем этого числа и обозначается $|z|$ или r . Модуль числа z вычисляется по формуле $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

ПРИМЕР 3.

Вычислить модули комплексных чисел: $z_1 = 4 + i5$ и $z_2 = -3 + i4$.

РЕШЕНИЕ:

Для комплексного числа z_1 $x_1 = 4$, $y_1 = 5$, следовательно,
 $|z_1| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$.

Для комплексного числа z_2 $x_2 = -3$, $y_2 = 4$, следовательно,
 $|z_2| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

ОТВЕТ: Модули комплексных чисел z_1 , z_2 равны: $|z_1| = \sqrt{41}$, $|z_2| = 5$.

Определение. Величина угла (см. рис. 1) между положительным направлением действительной оси и вектором $\vec{r}$, изображающим комплексное число, называется аргументом этого комплексного числа и обозначается $\operatorname{Arg} z$ или φ .

Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ определяется с точностью до $2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$, где $\arg z = \varphi$ – главное значение аргумента, $-\pi < \arg z \leq \pi$. Аргумент комплексного числа $z = 0$ не определен.

Из рисунка 1 видно, что $\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{y}{x}$, следовательно,

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctg\left(\frac{y}{x}\right) & \text{– для внутренних точек I, IV координатных четвертей} \\ & \text{(т. е. } x > 0, y > 0 \text{ или } x > 0, y < 0); \\ \arctg\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{– для внутренних точек II координатной четверти} \\ & \text{(т. е. } x < 0, y > 0); \\ \arctg\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{– для внутренних точек III координатной четверти} \\ & \text{(т. е. } x < 0, y < 0). \end{cases}$$

Если точка z лежит на действительной или мнимой оси координат,

то $\arg z$ можно вычислить непосредственно из графика.

Между множеством всех комплексных чисел и множеством точек комплексной плоскости устанавливается взаимно однозначное соответствие.

ПРИМЕР 4.

Комплексные числа $z_1 = 3$, $z_2 = -i2$, $z_3 = 4 + i4$, $z_4 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_5 = -3 - i\sqrt{3}$ изобразить векторами на комплексной плоскости и вычислить главное значение аргумента.

РЕШЕНИЕ:

1. Найти действительные и мнимые части комплексных чисел: z_1 , z_2 , z_3 , z_4 , z_5 .

Действительные части комплексных чисел: $\operatorname{Re} z_1 = x = 3 > 0$, $\operatorname{Re} z_2 = x = 0$, $\operatorname{Re} z_3 = x = 4 > 0$, $\operatorname{Re} z_4 = x = -1 < 0$, $\operatorname{Re} z_5 = x = -3 < 0$. Мнимые части комплексных чисел: $\operatorname{Im} z_1 = y = 0$, $\operatorname{Im} z_2 = y = -2 < 0$, $\operatorname{Im} z_3 = y = 4 > 0$, $\operatorname{Im} z_4 = y = \sqrt{3} > 0$, $\operatorname{Im} z_5 = y = -\sqrt{3} < 0$.

2. Изобразить векторами комплексные числа: z_1 , z_2 , z_3 , z_4 , z_5 (см. рис. 2).

3. Вычислить главное значение аргумента комплексных чисел: z_1 , z_2 , z_3 , z_4 , z_5 .

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{0}{3}\right) = \operatorname{arctg}(0) = 0; \quad \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}; \quad \varphi_3 = \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{4}\right) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4};$$

$$\varphi_4 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) + \pi = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2}{3}\pi;$$

$$\varphi_5 = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{-3}\right) - \pi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5}{6}\pi.$$

ОТВЕТ: Главные значения аргумента комплексных чисел z_1 , z_2 ,

z_3 , z_4 , z_5 равны: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$, $\varphi_3 = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_4 = \frac{2}{3}\pi$, $\varphi_5 = -\frac{5}{6}\pi$.

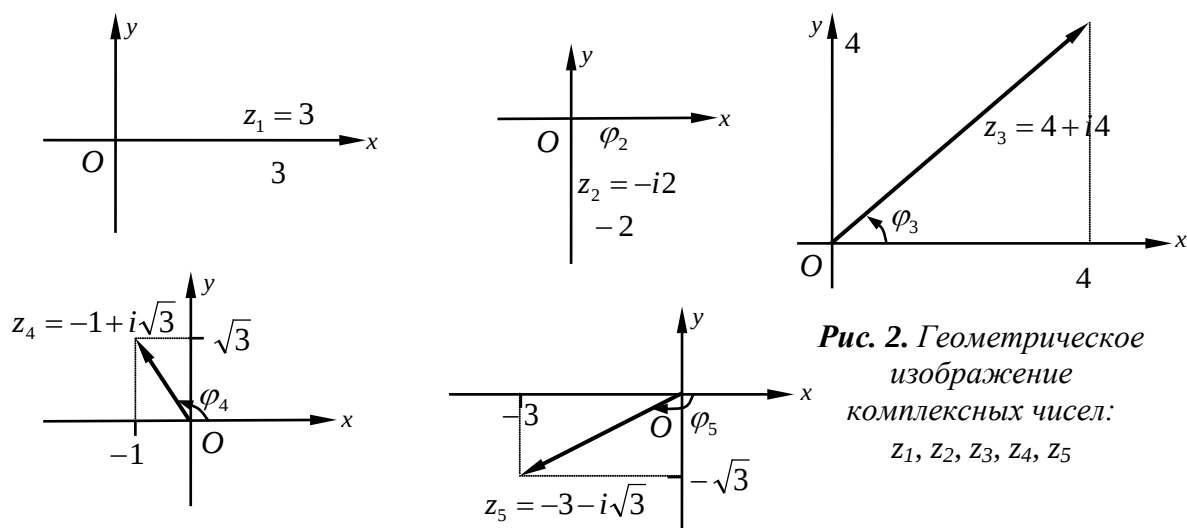


Рис. 2. Геометрическое изображение комплексных чисел: z_1, z_2, z_3, z_4, z_5

1.3. Формы записи комплексных чисел

Комплексное число может быть представлено в одной из трех форм записи:

1. Алгебраическая форма записи комплексного числа $z = x + iy$.

В предыдущем разделе был рассмотрен переход от декартовой к полярной системе координат. $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Тогда, подставляя эти значения в алгебраическую форму комплексного числа, получится $z = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

2. Тригонометрическая форма записи числа: $z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

При переходе от алгебраической формы записи комплексного числа к тригонометрической достаточно определить главное значение аргумента комплексного числа.

Используя формулу Эйлера $e^{i\varphi} = (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$, комплексное число можно записать в показательной форме.

3. Показательная (экспоненциальная) форма записи комплексного числа: $z = re^{i\varphi}$ или $z = |z|e^{i\varphi}$.

Функция $e^{i\varphi}$ периодическая с периодом 2π . Для записи комплексного числа в показательной форме достаточно найти главное значение аргумента комплексного числа.

ПРИМЕР 5.

Записать комплексное число $z = 2 + i2$ в тригонометрической и показательной форме записи.

РЕШЕНИЕ:

1. Вычислить модуль комплексного числа z : $z = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{2}$.

2. Найти главное значение аргумента комплексного числа: $x = 2 > 0$, $y = 2 > 0$, следовательно, $\varphi = \arctg\left(\frac{2}{2}\right) = \arctg(1) = \frac{\pi}{4}$.

3. Записать комплексное число z в тригонометрической форме:

$$z = 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right).$$

4. Записать комплексное число z в показательной форме:

$$z = 2\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

ОТВЕТ: Комплексное число z в тригонометрической форме –

$$z = 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right); \text{ комплексное число } z \text{ в показательной}$$

$$\text{форме – } z = 2\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Даны комплексные числа: $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_3 = x_3 + iy_3$.

1. Сумма комплексных чисел z_1 и z_2

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Свойства операции сложения комплексных чисел:

1⁰. Коммутативность $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

2⁰. Ассоциативность $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

2. Разность комплексных чисел z_1 и z_2

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

3. Произведение комплексных чисел z_1 и z_2 .

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2),$$

или если числа $z_1 = r_1 \cdot (\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1))$ и $z_2 = r_2 \cdot (\cos(\varphi_2) + i \sin(\varphi_2))$ заданы в тригонометрической форме, то

$$z = z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Свойства операции умножения комплексных чисел:

1⁰. Коммутативность $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

2⁰. Ассоциативность $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.

3⁰. Дистрибутивное $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

4⁰. Деление комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2},$$

или если числа $z_1 = r_1 \cdot (\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1))$ и $z_2 = r_2 \cdot (\cos(\varphi_2) + i \sin(\varphi_2))$ заданы в тригонометрической форме, то

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

ПРИМЕР 1.

Найти $z_1 + 2z_2$, $z_1 - 3z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 2 + i2$, $z_2 = 3 - i2$.

РЕШЕНИЕ:

Используя пункты 1–5 данного раздела, находим:

$$z_1 + 2z_2 = 2 + i2 + 2 \cdot (3 - i2) = 2 + i2 + 6 - i4 = 8 - i2;$$

$$z_1 - 3z_2 = 2 + i2 - 3 \cdot (3 - i2) = 2 + i2 - 9 + i6 = -7 + i8;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + i2) \cdot (3 - i2) = 6 - i4 + i6 - i^2 4 = 6 + i2 + 4 = 10 + i2;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + i2}{3 - i2} = \frac{2 + i2}{3 - i2} \cdot \frac{3 + i2}{3 + i2} = \frac{6 + i4 + i6 - 4}{9 + i6 - i6 + 4} = \frac{2 + i10}{13} = \frac{2}{13} + i \frac{10}{13}.$$

ОТВЕТ: $z_1 + 2z_2 = 8 - i2$; $z_1 - 3z_2 = -7 + i8$; $z_1 \cdot z_2 = 10 + i2$;
 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{13} + i\frac{10}{13}$.

Возведение комплексного числа в степень с натуральным показателем и извлечение корней из комплексных чисел

При возведении комплексных чисел в натуральную степень используют формулу Муавра $z^n = r^n(\cos(\varphi n) + i \sin(\varphi n))$.

Корнем n -ой степени из комплексного числа z называется комплексное число w , удовлетворяющее равенству $w^n = z$.

Для любого комплексного числа $z \neq 0$ корень n -ой степени имеет n различных значений, которые вычисляются по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) \right), \text{ где } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Точки, соответствующие значениям $\sqrt[n]{z}$, являются вершинами правильного n -угольника, вписанного в окружность радиусом $R = \sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат.

ПРИМЕР 2.

Найти z^9 , $\sqrt[6]{z}$, если $z = -1 - i\sqrt{3}$.

РЕШЕНИЕ:

1. Записать комплексное число z в тригонометрической форме. Для этого необходимо вычислить модуль этого комплексного числа $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ и главное значение аргумента. Так как

$$x = -1 < 0, \quad y = -\sqrt{3} < 0, \quad \text{то} \quad \varphi = \arctg\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2}{3}\pi.$$

Следовательно, $z = 2 \cdot \left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) \right)$.

2. Используя формулу Муавра, возвести комплексное число z в степень $z^9 = 2^9 \cdot \left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi \cdot 9\right) + i \sin\left(-\frac{2}{3}\pi \cdot 9\right) \right) = 2^9 \cdot (\cos(-6\pi) + i \sin(-6\pi)) = 2^9 \cdot (1 + i0) = 2^9 = 512$.

Вычислить $\sqrt[6]{z}$

$$\sqrt[6]{z} = \sqrt[6]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k}{6}\right) + i \sin\left(\frac{-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k}{6}\right) \right);$$

$$\sqrt[6]{z} = \sqrt[6]{2} \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}\right) \right).$$

$$\text{ОТВЕТ: } z^9 = 512, \sqrt[6]{z} = \sqrt[6]{2} \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}\right) \right).$$

3. РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Рассмотрим квадратное уравнение $az^2 + bz + c = 0$, где z – переменная, a, b, c – постоянные коэффициенты, причем $a \neq 0$. Преобразовать квадратное уравнение, выделив в нем полный квадрат:

$$az^2 + bz + c = a \cdot \left(z^2 + 2 \cdot z \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} \right) = a \cdot \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right).$$

Ввести обозначение $D = b^2 - 4ac$, тогда $a \cdot \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a^2} \right) = 0$,

$$\text{следовательно, } z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{-Di}}{2a}.$$

ПРИМЕР 1.

Решить квадратное уравнение $z^2 + 4z + 53 = 0$.

РЕШЕНИЕ:

1. Вычислить дискриминант квадратного уравнения:
 $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 53 = 16 - 212 = -196$. Дискриминант меньше нуля, следовательно, квадратное уравнение имеет комплексные корни.

$$2. \text{ Вычислить } z_1, z_2: z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-196}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 14\sqrt{-1}}{2 \cdot 1} = -2 \pm i7.$$

$$\text{ОТВЕТ: } z_1 = -2 - i7, z_2 = -2 + i7.$$

4. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ ПО ГЛАВЕ «КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА»

1. Дать определение комплексного числа.
2. Дать определение действительной и мнимой части комплексного числа.
3. Дать определение чисто мнимого числа.
4. Дать понятие комплексной единицы.
5. Дать определение комплексно-сопряженного числа.
6. Дать определение равных комплексных чисел.
7. Дать понятие комплексной плоскости. Изобразить комплексное число на комплексной плоскости.
8. Дать определение модуля комплексного числа и написать формулу его вычисления.

9. Дать определение аргумента комплексного числа и главного значения аргумента комплексного числа.

10. Записать комплексное число в различных формах записи.

11. Перечислить алгебраические операции над комплексными числами и их свойства.

12. Рассказать алгоритм возведения комплексного числа в степень с натуральным показателем.

13. Рассказать алгоритм извлечения корня из комплексного числа.

14. Рассказать алгоритм решения алгебраического уравнения в комплексной плоскости.

5. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ВАРИАНТ № 1

1. Даны комплексные числа $z_1 = -7 + 7i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 + 2z_2$, $z_1 - z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^6 , $\sqrt[8]{z_1}$.

ВАРИАНТ № 2

1. Даны комплексные числа $z_1 = 7 + 7i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 + 2z_2$, $z_1 - z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{10} , $\sqrt[6]{z_1}$.

ВАРИАНТ № 3

1. Даны комплексные числа $z_1 = 3 + 3\sqrt{3}i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 + 3z_2$, $z_1 - 2z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{30} , $\sqrt[4]{z_1}$.

ВАРИАНТ № 4

1. Даны комплексные числа $z_1 = 8$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 + 4z_2$, $z_1 - z_2$.
2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.
3. Вычислить z_1^{30} , $\sqrt[5]{z_1}$.

ВАРИАНТ № 5

1. Даны комплексные числа $z_1 = 6 + 2\sqrt{3}i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 + 5z_2$, $z_1 - 4z_2$.
2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.
3. Вычислить z_1^{15} , $\sqrt[7]{z_1}$.

ВАРИАНТ № 6

1. Даны комплексные числа $z_1 = -2 + 2i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 + 6z_2$, $z_1 - 3z_2$.
2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.
3. Вычислить z_1^{100} , $\sqrt[9]{z_1}$.

ВАРИАНТ № 7

1. Даны комплексные числа $z_1 = -2 + 2\sqrt{3}i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 + 7z_2$, $z_1 - 2z_2$.
2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.
3. Вычислить z_1^{15} , $\sqrt[10]{z_1}$.

ВАРИАНТ № 8

1. Даны комплексные числа $z_1 = 6 - 6i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 + 8z_2$, $z_1 - z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{14} , $\sqrt[3]{z_1}$.

ВАРИАНТ № 9

1. Даны комплексные числа $z_1 = 4 - 4\sqrt{3}i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{15} , $\sqrt[8]{z_1}$.

ВАРИАНТ № 10

1. Даны комплексные числа $z_1 = -3$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 + 2z_2$, $z_1 - z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{25} , $\sqrt[6]{z_1}$.

ВАРИАНТ № 11

1. Даны комплексные числа $z_1 = 3i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{20} , $\sqrt[4]{z_1}$.

ВАРИАНТ № 12

1. Даны комплексные числа $z_1 = 3 + \sqrt{3}i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 + 3z_2$, $z_1 - z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^9 , $\sqrt[5]{z_1}$.

ВАРИАНТ № 13

1. Даны комплексные числа $z_1 = -12 + 4\sqrt{3}i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 + z_2$, $3z_1 - z_2$.
2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.
3. Вычислить z_1^6 , $\sqrt[3]{z_1}$.

ВАРИАНТ № 14

1. Даны комплексные числа $z_1 = -9 - 3\sqrt{3}i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 + z_2$, $z_1 - 3z_2$.
2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.
3. Вычислить z_1^6 , $\sqrt[3]{z_1}$.

ВАРИАНТ № 15

1. Даны комплексные числа $z_1 = 3 + 3i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 + 4z_2$, $z_1 - z_2$.
2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.
3. Вычислить z_1^{30} , $\sqrt[10]{z_1}$.

ВАРИАНТ № 16

1. Даны комплексные числа $z_1 = -6 - 6\sqrt{3}i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 + z_2$, $z_1 - 4z_2$.
2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.
3. Вычислить z_1^{12} , $\sqrt[2]{z_1}$.

ВАРИАНТ № 17

1. Даны комплексные числа $z_1 = 2$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 + 5z_2$, $z_1 - z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{20} , $\sqrt[3]{z_1}$.

ВАРИАНТ № 18

1. Даны комплексные числа $z_1 = 3\sqrt{3}i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 + z_2$, $z_1 - 5z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{12} , $\sqrt[4]{z_1}$.

ВАРИАНТ № 19

1. Даны комплексные числа $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 + 6z_2$, $z_1 - z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{30} , $\sqrt[5]{z_1}$.

ВАРИАНТ № 20

1. Даны комплексные числа $z_1 = 4 - 4\sqrt{3}i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 + z_2$, $z_1 - 6z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{21} , $\sqrt[6]{z_1}$.

ВАРИАНТ № 21

1. Даны комплексные числа $z_1 = 4 - 4i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 + 7z_2$, $z_1 - z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{20} , $\sqrt[7]{z_1}$.

ВАРИАНТ № 22

1. Даны комплексные числа $z_1 = -8i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 + z_2$, $z_1 - 7z_2$.
2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.
3. Вычислить z_1^9 , $\sqrt[8]{z_1}$.

ВАРИАНТ № 23

1. Даны комплексные числа $z_1 = -2$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 + 8z_2$, $z_1 - z_2$.
2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.
3. Вычислить z_1^{10} , $\sqrt[9]{z_1}$.

ВАРИАНТ № 24

1. Даны комплексные числа $z_1 = 6 - 2\sqrt{3}i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 + z_2$, $z_1 - 8z_2$.
2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.
3. Вычислить z_1^4 , $\sqrt[10]{z_1}$.

ВАРИАНТ № 25

1. Даны комплексные числа $z_1 = 5\sqrt{3}i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 + 9z_2$, $z_1 - z_2$.
2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.
3. Вычислить z_1^{15} , $\sqrt[11]{z_1}$.

ВАРИАНТ № 26

1. Даны комплексные числа $z_1 = 3 - \sqrt{3}i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 + z_2$, $z_1 - 9z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^6 , $\sqrt[12]{z_1}$.

ВАРИАНТ № 27

1. Даны комплексные числа $z_1 = 4$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $3z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{15} , $\sqrt[13]{z_1}$.

ВАРИАНТ № 28

1. Даны комплексные числа $z_1 = 2 + 2i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 + z_2$, $3z_1 - z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{16} , $\sqrt[14]{z_1}$.

ВАРИАНТ № 29

1. Даны комплексные числа $z_1 = -i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $2z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^6 , $\sqrt[15]{z_1}$.

ВАРИАНТ № 30

1. Даны комплексные числа $z_1 = -10 + 10i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 + 7z_2$, $4z_1 - 3z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^9 , $\sqrt[35]{z_1}$.

ГЛАВА V

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Цели

Иметь представление о:

- первообразной функции и неопределенном интеграле;
- геометрическом смысле неопределенного интеграла;
- свойствах неопределенного интеграла;
- основных методах вычисления неопределенного интеграла и в каких случаях они применяются;
- интегрировании некоторых классов элементарных функций;
- «неберущихся» интегралах.

Знать:

- геометрический смысл неопределенного интеграла;
- таблицу основных неопределенных интегралов;
- методы и алгоритмы вычисления неопределенных интегралов.

Уметь:

Вычислять неопределенные интегралы от любой функции, выбирать рациональный метод интегрирования подынтегральной функции.

1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ПЕРВООБРАЗНАЯ

1.1. Определения

Интегральное исчисление решает задачу нахождения функции $F(x)$, если известна ее производная $F'(x) = f(x)$.

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной функцией для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, если в любой точке этого интервала функция $F(x)$ дифференцируема и имеет производную $F'(x)$, равную $f(x)$, т. е. $F' = f(x)$ или $d(F(x)) = f(x)dx$.

Замечание. Любая первообразная $F(x)$ для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$ непрерывна на этом интервале.

ПРИМЕР 1.

Функция $F(x) = x^5$ является первообразной для функции $f(x) = \frac{x^6}{6}$.

ПРИМЕР 2.

Функция $F(x) = \arcsin(x)$ является первообразной для функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Теорема

Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, то множество всех первообразных для функции $f(x)$ задается формулой $F(x) + C$, где C – постоянное число.

Определение. Совокупность всех первообразных функций для данной функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на этом интервале и обозначается $\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

$f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, $\int$ – знак неопределенного интеграла.

Знак $\int$ называется знаком неопределенного интеграла, так как действие, обратное дифференцированию, многозначно, т. е. сопровождается неопределенностью. В формулу вычисления неопределенного интеграла входит постоянная величина C , т. е. геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство «параллельных» кривых $y = F(x) + C$ (см. рис. 1), где каждому числовому значению C соответствует определенная кривая семейства. График каждой первообразной называется интегральной кривой.

Определение. Вычисление неопределенного интеграла от заданной функции называется интегрированием.

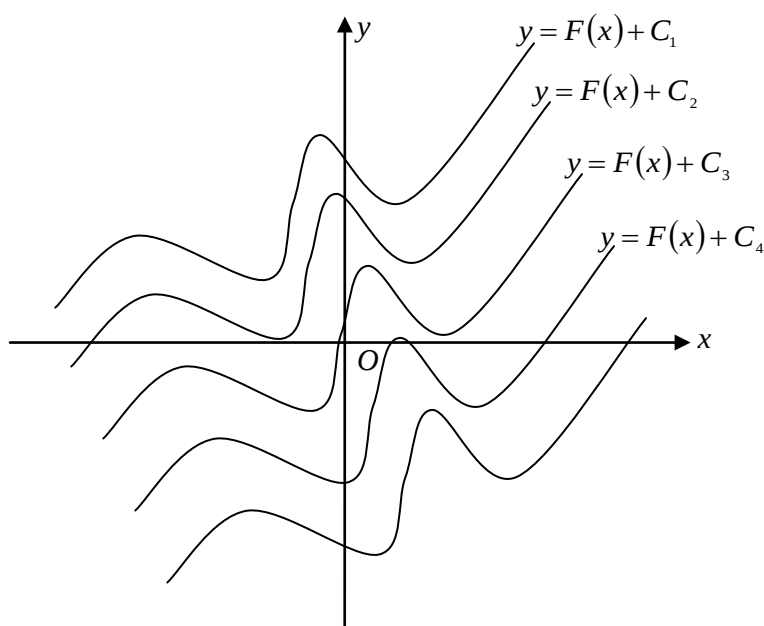


Рис. 1. Семейство интегральных кривых

1.2. Свойства неопределенных интегралов

$$1^0. \left(\int f(x) dx \right)' = f(x).$$

$$2^0. d\left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx.$$

$$3^0. \int dF(x) = F(x) + C.$$

$$4^0. \int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx.$$

$$5^0. \int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

$$6^0. \text{Если } \int f(x) dx = F(x) + C \text{ и } u = \varphi(x), \text{ то } \int f(u) du = F(u) + C.$$

$$7^0. \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C, \quad a \neq 0.$$

Функции $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$, $f(u)$ – непрерывные дифференцируемые функции, C , a , b , k – константы, x , u – переменные интегрирования. Свойства 1–7 следуют из определения неопределенного интеграла.

1.3. Таблица основных неопределенных интегралов

Интегрирование является действием, обратным дифференцированию. Следовательно, зная таблицу производных и используя свойства неопределенного интеграла, можно получить таблицу неопределенных интегралов.

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1;$$

$$\int 0 dx = C;$$

$$2. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0;$$

$$4. \int \sin(x) dx = -\cos(x) + C;$$

$$5. \int \cos(x) dx = \sin(x) + C;$$

$$6. \int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \operatorname{tg}(x) + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$7. \int \frac{dx}{\sin^2(x)} = -\operatorname{ctg}(x) + C, \quad x \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$8. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C = -\arccos\left(\frac{x}{a}\right) + C_1, \quad a > 0;$$

$$9. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C = -\operatorname{arcctg}(x) + C_1, \quad a \neq 0;$$

$$10. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, \quad a \neq 0;$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C, \quad a \neq 0;$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C, \quad a \neq 0;$$

$$13. \int sh(x) dx = ch(x) + C;$$

$$14. \int ch(x) dx = sh(x) + C;$$

$$15. \int \frac{dx}{ch^2(x)} = th(x) + C;$$

$$16. \int \frac{dx}{sh^2(x)} = -cth(x) + C, \quad x \neq 0.$$

C – константа интегрирования.

ПРИМЕР 3.

Вычислить интеграл $\int (6x^2 + 8x + 3) dx$.

РЕШЕНИЕ:

1. Данный интеграл суммы представить в виде суммы интегралов (см. свойство 5)

$$\int (6x^2 + 8x + 3) dx = \int 6x^2 dx + \int 8x dx + \int 3 dx.$$

2. В каждом интеграле вынести за знак интеграла множитель-константу (см. свойство 4)

$$\int 6x^2 dx + \int 8x dx + \int 3 dx = 6 \int x^2 dx + 8 \int x dx + 3 \int dx.$$

3. Для вычисления полученных интегралов использовать табличный интеграл 1

$$\int 6x^2 dx + \int 8x dx + \int 3 dx = 6 \int x^2 dx + 8 \int x dx + 3 \int dx = 6 \frac{x^3}{3} + 8 \frac{x^2}{2} + 3x + C = 2x^3 + 4x^2 + 3x + C.$$

ОТВЕТ: $\int (6x^2 + 8x + 3) dx = 2x^3 + 4x^2 + 3x + C.$

ПРИМЕР 4.

Вычислить интеграл $\int \frac{x^4 - 4x + 5}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.

РЕШЕНИЕ:

1. Подынтегральную функцию разложить на три более простые функции

$$\frac{x^4 - 4x + 5}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{x^4}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4x}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

2. Преобразовать дроби, записав их в степенные функции

$$\frac{x^4}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4x}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} = x^{\frac{10}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}} + 5x^{-\frac{2}{3}}.$$

3. Интеграл суммы (разности) представить в виде суммы (разности) интегралов (см. свойство 5)

$$\int \left(x^{\frac{10}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}} + 5x^{-\frac{2}{3}} \right) dx = \int x^{\frac{10}{3}} dx - \int 4x^{\frac{1}{3}} dx + \int 5x^{-\frac{2}{3}} dx.$$

4. Вынести за знак интеграла множитель-константу (см. свойство 4)

$$\int x^{\frac{10}{3}} dx - \int 4x^{\frac{1}{3}} dx + \int 5x^{-\frac{2}{3}} dx = \int x^{\frac{10}{3}} dx - 4 \int x^{\frac{1}{3}} dx + 5 \int x^{-\frac{2}{3}} dx.$$

5. Для вычисления полученных интегралов использовать табличный интеграл 1

$$\int x^{\frac{10}{3}} dx - 4 \int x^{\frac{1}{3}} dx + 5 \int x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{13}{3}}}{\frac{13}{3}} - 4 \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + 5 \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = \frac{3}{13} \sqrt[3]{x^{13}} - 3 \sqrt[3]{x^4} + 15 \sqrt[3]{x} + C.$$

$$\text{ОТВЕТ: } \int \frac{x^4 - 4x + 5}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \frac{3}{13} \sqrt[3]{x^{13}} - 3 \sqrt[3]{x^4} + 15 \sqrt[3]{x} + C.$$

ПРИМЕР 5.

Вычислить интеграл $\int (4 \cos(x+2) + 3 \sin(2x)) dx$.

РЕШЕНИЕ:

1. Интеграл суммы представить в виде суммы интегралов (см. свойство 5) $\int (4 \cos(x+2) + 3 \sin(2x)) dx = \int 4 \cos(x+2) dx + \int 3 \sin(2x) dx$.

2. В каждом интеграле вынести за знак интеграла множитель-константу (см. свойство 4)

$$\int 4 \cos(x+2) dx + \int 3 \sin(2x) dx = 4 \int \cos(x+2) dx + 3 \int \sin(2x) dx.$$

3. Для вычисления полученных интегралов использовать свойство 7 и таблицу интегралов

$$4 \int \cos(x+2) dx + 3 \int \sin(2x) dx = 4 \sin(x+2) + 3 \frac{-\cos(2x)}{2} + C = 4 \sin(x+2) - \frac{3}{2} \cos(2x) + C.$$

$$\text{ОТВЕТ: } \int (4 \cos(x+2) + 3 \sin(2x)) dx = 4 \sin(x+2) - \frac{3}{2} \cos(2x) + C.$$

2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

В интегральном исчислении не существует простых и универсальных правил вычисления первообразных от элементарных функций. Методы интегрирования функции сводятся к указанию приемов, приводящих искомый интеграл к табличному.

2.1. Метод непосредственного интегрирования в неопределенном интеграле

Определение. Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции или выражения и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется непосредственным интегрированием.

При сведении решаемого интеграла к табличному интегралу используется инвариантность формул интегрирования, т. е. подынтегральное выражение преобразуется таким образом, чтобы под знаком дифференциала находилась та же функция, что и в основной подынтегральной функции.

ПРИМЕР 1.

Вычислить интеграл $\int \cos(x) \cdot \sin(x) dx$.

РЕШЕНИЕ:

1. Внести под знак дифференциала $\cos(x)$ и воспользоваться свойством 6

$$\int \cos(x) \cdot \sin(x) dx = \{\cos(x) dx = d(\sin(x))\} = \int \sin(x) d(\sin(x)).$$

2. Сделать замену $\sin(x) = t$ $\int \sin(x) d(\sin(x)) = \left\{ \begin{array}{l} \sin(x) = t \\ d(\sin(x)) = dt \end{array} \right\} = \int t dt.$

3. Для вычисления полученного интеграла использовать табличный интеграл 1

$$\int t dt = \frac{t^2}{2} + C.$$

4. Вернуться к исходной переменной x $\frac{t^2}{2} = \frac{\sin^2(x)}{2} + C.$

ОТВЕТ: $\int \cos(x) \cdot \sin(x) dx = \frac{\sin^2(x)}{2} + C.$

ПРИМЕР 2.

Вычислить интеграл $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} dx$.

РЕШЕНИЕ:

1. В числителе внести под знак дифференциала x и использовать свойство 6

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} dx = \left\{ x dx = \frac{1}{2} d(x^2) \right\} = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{d(x^2)}{\sqrt{1+x^4}}.$$

2. В интеграле вынести за знак интеграла множитель-константу (см. свойство 4)

$$\int \frac{1}{2} \cdot \frac{d(x^2)}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1+x^4}}.$$

3. Сделать замену $x^2 = t$ $\frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1+x^4}} = \left\{ \begin{array}{l} x^2 = t \\ d(x^2) = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}.$

4. Для вычисления полученного интеграла использовать табличный интеграл 11

$$\frac{1}{2} \int \frac{d(t)}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{2} \ln|t + \sqrt{1+t^2}| + C.$$

5. Вернуться к исходной переменной x

$$\frac{1}{2} \ln|t + \sqrt{1+t^2}| + C = \frac{1}{2} \ln|x^2 + \sqrt{1+x^4}| + C.$$

ОТВЕТ: $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2 + \sqrt{1+x^4}| + C.$

2.2. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной) в неопределенном интеграле

Метод вычисления интегралов основан на введении новой переменной интегрирования, т. е. подстановки. Благодаря подстановке исходный интеграл упрощается и приводится к табличному интегралу.

Пусть необходимо вычислить интеграл $\int f(x)dx$. Если сделать подстановку $x = \varphi(t)$, тогда $dx = \varphi'(t)dt$, то формула интегрирования подстановкой примет вид: $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$, где $\varphi(t)$ – непрерывная, дифференцируемая функция. После вычисления неопределенного интеграла необходимо перейти к исходной переменной. Формулу интегрирования подстановкой можно применять как слева направо, так и справа налево.

ПРИМЕР 3.

Вычислить интеграл $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$.

РЕШЕНИЕ:

1. Сделать замену $\ln(x) = t$

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \ln(x) = t \\ d(\ln(x)) = \frac{dx}{x} \rightarrow \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right\} = \int t dt.$$

2. Для вычисления полученного интеграла использовать табличный интеграл 1 $\int t dt = \frac{t^2}{2} + C.$

3. Вернуться к исходной переменной x

$$\frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2|x|}{2} + C.$$

ОТВЕТ: $\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{\ln^2|x|}{2} + C.$

ПРИМЕР 4.

Вычислить интеграл $\int x^2 \cos(x^3) dx$.

РЕШЕНИЕ:

$$1. \text{ Сделать замену } x^3 = t \quad \int x^2 \cos(x^3) dx = \left\{ \begin{array}{l} x^3 = t \\ d(x^3) = 3x^2 dx \\ 3x^2 dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{1}{3} \cos(t) dt.$$

$$2. \text{ В интеграле вынести за знак интеграла множитель-константу (см. свойство 4)} \quad \int \frac{1}{3} \cos(t) dt = \frac{1}{3} \int \cos(t) dt.$$

$$3. \text{ Для вычисления полученного интеграла использовать табличный интеграл 5} \quad \frac{1}{3} \int \cos(t) dt = \frac{1}{3} \sin(t) + C.$$

$$4. \text{ Вернуться к исходной переменной } x \quad \frac{1}{3} \sin(t) + C = \frac{1}{3} \sin(x^3) + C.$$

$$\text{ОТВЕТ: } \int x^2 \cos(x^3) dx = \frac{1}{3} \sin(x^3) + C.$$

ПРИМЕР 5.

$$\text{Вычислить интеграл } \int \frac{dx}{x + \sqrt{x}}.$$

РЕШЕНИЕ:

$$1. \text{ Сделать замену } \sqrt{x} = t \\ \int \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \rightarrow x = t^2 \\ d(x) = d(t^2) = 2tdt \end{array} \right\} = \int \frac{2tdt}{t^2 + t} = \int \frac{2dt}{t + 1}.$$

$$2. \text{ Использовать свойства 4, 7} \\ \int \frac{2dt}{t + 1} = 2 \int \frac{dt}{t + 1} = 2 \int \frac{d(t + 1)}{t + 1} = 2 \ln|t + 1| + C.$$

$$3. \text{ Вернуться к исходной переменной } x \quad 2 \ln|t + 1| + C = 2 \ln|\sqrt{x} + 1| + C.$$

$$\text{ОТВЕТ: } \int \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = 2 \cdot \ln|\sqrt{x} + 1| + C.$$

**2.3. Метод интегрирования по частям
неопределенного интеграла**

Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$ – непрерывные дифференцируемые функции, тогда $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$. Проинтегрировать левую и правую часть $\int d(uv) = \int u \cdot dv + \int v \cdot du$ или $\int u dv = u \cdot v - \int v du$ – формула интегрирования по частям.

При интегрировании по частям подынтегральное выражение заданного интеграла представляется в виде произведения u и dv . После вычисляются v и du , полученный результат подставляют в формулу интегрирования по частям. Иногда формулу интегрирования по частям используют несколько раз.

Ниже рассмотрены некоторые типы интегралов, которые можно вычислить методом интегрирования по частям.

1) Для интегралов вида: $\int P(x) \cdot e^{kx} dx$, $\int P(x) \cdot \sin(kx) dx$, $\int P(x) \cdot \cos(kx) dx$, где $P(x)$ – многочлен, k – константа $k \neq 0$ функция $u = P(x)$, а dv – оставшаяся часть сомножителя.

ПРИМЕР 6.

Вычислить интеграл $\int x \cdot \cos(3x) dx$.

РЕШЕНИЕ:

1. Пусть $u = x$, тогда $dv = \cos(3x) dx$.

2. Вычислить du , v : $du = dx$, $v = \frac{1}{3} \sin(3x)$.

3. Применить формулу интегрирования по частям

$$\int x \cdot \cos(3x) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x; \quad dv = \cos(3x) dx \\ du = dx; \quad v = \frac{1}{3} \sin(3x) \end{array} \right\} = x \cdot \frac{1}{3} \sin(3x) - \int \frac{1}{3} \sin(3x) dx + C =$$

$$= \frac{x \cdot \sin(3x)}{3} + \frac{\cos(3x)}{9} + C_1.$$

ОТВЕТ: $\int x \cdot \cos(3x) dx = \frac{x \cdot \sin(3x)}{3} + \frac{\cos(3x)}{9} + C_1.$

2) Для интегралов вида: $\int P(x) \cdot \ln(kx) dx$, $\int P(x) \cdot \arcsin(kx) dx$, $\int P(x) \cdot \arccos(kx) dx$, $\int P(x) \cdot \arctg(kx) dx$, $\int P(x) \cdot \operatorname{arcctg}(kx) dx$, где $P(x)$ – многочлен, k – константа $k \neq 0$. Выражение $P(x) dx = dv$, а u – оставшая часть сомножителя.

ПРИМЕР 7.

Вычислить интеграл $\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$.

РЕШЕНИЕ:

1. Пусть $u = \ln(x)$, тогда $dv = \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

2. Вычислить du , v : $du = \frac{dx}{x}$, $v = 2\sqrt{x}$.

3. Применить формулу интегрирования по частям

$$\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln(x); \quad dv = x^{-\frac{1}{2}} dx \\ du = \frac{dx}{x}; \quad v = 2\sqrt{x} \end{array} \right\} = 2\sqrt{x} \cdot \ln(x) - \int 2\sqrt{x} \cdot \frac{dx}{x} + C =$$

$$= 2\sqrt{x} \cdot \ln(x) - 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx + C = 2\sqrt{x} \cdot \ln(x) - 4\sqrt{x} + C_1.$$

ОТВЕТ: $\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \cdot \ln(x) - 4\sqrt{x} + C_1.$

3) Для интегралов вида: $\int a^{kx} \cdot \sin(\alpha x) dx$, $\int a^{kx} \cdot \cos(\alpha x) dx$, где k , α , a – константы (α , k , $a \neq 0$), функция $u = a^{kx}$, а dv – остальная часть сомножителя. При интегрировании по частям дважды интеграл сводится сам к себе.

ПРИМЕР 8.

Вычислить интеграл $\int e^{2x} \cdot \cos(3x) dx$.

РЕШЕНИЕ:

1. Пусть $u = e^{2x}$, тогда $dv = \cos(3x) dx$.

2. Вычислить du , v : $du = 2 \cdot e^{2x} dx$, $v = \frac{1}{3} \cdot \sin(3x)$.

3. Применить формулу интегрирования по частям

$$\int e^{2x} \cdot \cos(3x) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x}; \quad dv = \cos(3x) dx \\ du = 2e^{2x} dx; \quad v = \frac{1}{3} \sin(3x) \end{array} \right\} = e^{2x} \cdot \frac{\sin(3x)}{3} - \int \frac{1}{3} \sin(3x) \cdot 2e^{2x} dx +$$

$$+ C = \frac{e^{2x} \cdot \sin(3x)}{3} - \frac{2}{3} \int e^{2x} \cdot \sin(3x) dx + C.$$

4. Применить формулу интегрирования по частям повторно

$$\frac{e^{2x} \cdot \sin(3x)}{3} - \frac{2}{3} \int e^{2x} \cdot \sin(3x) dx + C = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x}; \quad dv = \sin(3x) dx \\ du = 2e^{2x} dx; \quad v = -\frac{1}{3} \cdot \cos(3x) \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{e^{2x} \cdot \sin(3x)}{3} - \frac{2}{3} \left(-e^{2x} \frac{\cos(3x)}{3} - \int -\frac{\cos(3x)}{3} \cdot 2e^{2x} dx \right) + C_1 = \frac{e^{2x} \cdot \sin(3x)}{3} +$$

$$+ \frac{2}{9} e^{2x} \cos(3x) - \frac{4}{9} \int e^{2x} \cos(3x) dx + C_1.$$

5. С правой стороны получен исходный интеграл с множителем-константой. Перенести его в левую часть и привести подобные слагаемые

$$\int e^{2x} \cos(3x) dx + \frac{4}{9} \int e^{2x} \cos(3x) dx = \frac{e^{2x} \cdot \sin(3x)}{3} + \frac{2}{9} e^{2x} \cos(3x) + C_1;$$

$$\frac{13}{9} \int e^{2x} \cos(3x) dx = \frac{e^{2x} \cdot \sin(3x)}{3} + \frac{2}{9} e^{2x} \cos(3x) + C_1.$$

6. Вычислить исходный интеграл

$$\int e^{2x} \cos(3x) dx = \frac{9}{13} \left(\frac{e^{2x} \cdot \sin(3x)}{3} + \frac{2}{9} e^{2x} \cos(3x) + C_1 \right) = \frac{e^{2x}}{13} [3\sin(3x) + 2\cos(3x)] + C_2.$$

ОТВЕТ: $\int e^{2x} \cos(3x) dx = \frac{e^{2x}}{13} (3\sin(3x) + 2\cos(3x)) + C_2.$

4) Для интегралов вида: $\int \cos(\ln(kx))dx$, $\int \sin(\ln(kx))dx$, где k – константа ($k \neq 0$), $dv = dx$, а u – оставшая часть сомножителя. При интегрировании по частям дважды интеграл сводится сам к себе.

ПРИМЕР 9.

Вычислить интеграл $\int \cos(\ln(7x))dx$.

РЕШЕНИЕ:

1. Пусть $u = \cos(\ln(7x))$, тогда $dv = dx$.

2. Вычислить du , v : $du = -\frac{\sin(\ln(7x))}{x}dx$, $v = x$.

3. Применить формулу интегрирования по частям

$$\int \cos(\ln(7x))dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \cos(\ln(7x)); \quad dv = dx \\ du = -\frac{\sin(\ln(7x))}{x}dx; \quad v = x \end{array} \right\} = x \cdot \cos(\ln(7x)) + \\ + \int x \cdot \frac{\sin(\ln(7x))}{x} dx + C = x \cdot \cos(\ln(7x)) + \int \sin(\ln(7x))dx + C.$$

4. Применить формулу интегрирования по частям повторно

$$x \cdot \cos(\ln(7x)) + \int \sin(\ln(7x))dx + C = \left\{ \begin{array}{l} u = \sin(\ln(7x)); \quad dv = dx \\ du = \frac{\cos(\ln(7x))}{x}dx; \quad v = x \end{array} \right\} = \\ = x \cdot \cos(\ln(7x)) + x \cdot \sin(\ln(7x)) - \int x \cdot \frac{\cos(\ln(7x))}{x}dx + C_1 = x \cdot \cos(\ln(7x)) + \\ + x \cdot \sin(\ln(7x)) - \int \cos(\ln(7x))dx + C_1.$$

5. С правой стороны получен исходный интеграл. Перенести его в левую часть и привести подобные слагаемые

$$\int \cos(\ln(7x))dx = x \cdot \cos(\ln(7x)) + x \cdot \sin(\ln(7x)) - \int \cos(\ln(7x))dx + C_1;$$

$$2\int \cos(\ln(7x))dx = x \cdot \cos(\ln(7x)) + x \cdot \sin(\ln(7x)) + C_1.$$

6. Вычислить исходный интеграл

$$\int \cos(\ln(7x))dx = \frac{x}{2} \cdot (\cos(\ln(7x)) + \sin(\ln(7x))) + C_2.$$

ОТВЕТ: $\int \cos(\ln(7x))dx = \frac{x}{2} \cdot (\cos(\ln(7x)) + \sin(\ln(7x))) + C_2.$

3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

3.1. Интегрирование дробей, содержащих квадратный трехчлен

Интеграл $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$, где $b^2 - 4ac < 0$, a, b, c – константы, x – переменная, решается методом интегрирования подстановкой.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} &= \int \frac{dx}{a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right]} = \left\{ \begin{array}{l} x + \frac{b}{2a} = t; \quad dx = dt \\ \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = q^2 \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{a} \cdot \int \frac{dt}{t^2 + q^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{q} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{q} \right) + C = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} \right) + C. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 1.

Вычислить интеграл $\int \frac{1}{2x^2 + 3x + 4} dx$.

РЕШЕНИЕ:

1. Выделить в знаменателе полный квадрат

$$2x^2 + 3x + 4 = 2 \cdot \left(x^2 + x \cdot \frac{3}{2} + \frac{4}{2} \right) = 2 \cdot \left(\left(x + \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{23}{16} \right).$$

2. Вычислить интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2x^2 + 3x + 4} dx &= \int \frac{1}{2 \cdot \left(\left(x + \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{23}{16} \right)} dx = \left\{ \begin{array}{l} x + \frac{3}{4} = t \\ dx = dt \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{t^2 + \frac{23}{16}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{23}{16}}} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{\sqrt{\frac{23}{16}}} \right) + C = \frac{2}{\sqrt{23}} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{4t}{\sqrt{23}} \right) + C = \\ &= \frac{2\sqrt{23}}{23} \operatorname{arctg} \left(\frac{4\sqrt{23}}{23} t \right) + C = \frac{2\sqrt{23}}{23} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{23}(4x + 3)}{23} \right) + C. \end{aligned}$$

$$\text{ОТВЕТ: } \int \frac{1}{2x^2 + 3x + 4} dx = \frac{2\sqrt{23}}{23} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{23}(4x + 3)}{23} \right) + C.$$

Интеграл $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$, где $b^2 - 4ac > 0$, a, b, c – константы, x – переменная, решается методом интегрирования подстановкой.

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \int \frac{dx}{a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \right) \right]} = \left\{ \begin{array}{l} x + \frac{b}{2a} = t; \quad dx = dt \\ -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = q^2 \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \int \frac{dt}{t^2 - q^2} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{2q} \operatorname{Ln} \left| \frac{q+t}{q-t} \right| + C = -\frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{b^2 - 4ac} + 2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac} - 2ax - b} \right| + C.$$

ПРИМЕР 2.

Вычислить интеграл $\int \frac{1}{3x^2 + 2x - 1} dx$.

РЕШЕНИЕ:

1. Выделить в знаменателе полный квадрат

$$3x^2 + 2x - 1 = 3 \cdot \left(x^2 + 2x - \frac{1}{3} \right) = 3 \cdot \left(\left(x + \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{4}{9} \right).$$

2. Вычислить интеграл

$$\int \frac{1}{3x^2 + 2x - 1} dx = \int \frac{1}{3 \cdot \left(\left(x + \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{4}{9} \right)} dx = -\frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{-\left(x + \frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} x + \frac{1}{3} = t \\ dx = dt \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{\left(\frac{2}{3} \right)^2 - t^2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{2}{3}} \cdot \ln \left| \frac{\frac{2}{3} + t}{\frac{2}{3} - t} \right| + C = -\frac{1}{4} \cdot \ln \left| \frac{2 + 3t}{2 - 3t} \right| + C = -\frac{1}{4} \cdot \ln \left| \frac{2 + 3x + 1}{2 - 3x - 1} \right| + C =$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \ln \left| \frac{3x + 3}{1 - 3x} \right| + C.$$

$$\text{ОТВЕТ: } \int \frac{1}{3x^2 + 2x - 1} dx = -\frac{1}{4} \cdot \ln \left| \frac{3x + 3}{1 - 3x} \right| + C.$$

Интеграл $\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx$, где $b^2 - 4ac < 0$, M , N , a , b , c – констан-

ты, x – переменная, решается методом интегрирования подстановкой, а после раскладывается на сумму двух интегралов.

$$\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{Mx + N}{a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right]} dx = \left\{ \begin{array}{l} x + \frac{b}{2a} = t; \quad x = t - \frac{b}{2a} \\ dx = dt; \quad q^2 = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \int \frac{M \cdot \left(t - \frac{b}{2a}\right) + N}{t^2 + q^2} dt = \frac{M}{a} \cdot \int \frac{tdt}{t^2 + q^2} + \frac{\left(N - \frac{Mb}{2a}\right)}{a} \cdot \int \frac{dt}{t^2 + q^2} = \frac{M}{2a} \cdot \int \frac{d(t^2 + q^2)}{t^2 + q^2} + \frac{2aN - Mb}{2a^2} \cdot \int \frac{dt}{t^2 + q^2} = \frac{M}{2a} \cdot \ln|ax^2 + bx + c| + \frac{2aN - Mb}{a\sqrt{4ac - b^2}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}\right) + C.$$

Интеграл $\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx$, где $b^2 - 4ac > 0$, M , N , a , b , c – константы, x – переменная, решается методом интегрирования подстановкой, а после раскладывается на сумму двух интегралов.

$$\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{Mx + N}{a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) \right]} dx = \left\{ \begin{array}{l} x + \frac{b}{2a} = t; \quad x = t - \frac{b}{2a} \\ dx = dt; \quad q^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \int \frac{M \cdot \left(t - \frac{b}{2a}\right) + N}{t^2 - q^2} dt = \frac{M}{a} \cdot \int \frac{tdt}{t^2 - q^2} + \left(\frac{N}{a} - \frac{Mb}{2a^2}\right) \cdot \int \frac{dt}{t^2 - q^2} = \frac{M}{2a} \cdot \int \frac{d(t^2 - q^2)}{t^2 - q^2} + \frac{2aN - Mb}{2a^2} \cdot \int \frac{dt}{t^2 - q^2} = \frac{M}{2a} \cdot \ln|ax^2 + bx + c| - \frac{2aN - Mb}{2a^2} \cdot \frac{1}{2q} \cdot \ln\left|\frac{q+t}{q-t}\right| + C =$$

$$= \frac{M}{2a} \cdot \ln|ax^2 + bx + c| + \frac{Mb - 2aN}{2a \cdot \sqrt{b^2 - 4ac}} \cdot \ln\left|\frac{\sqrt{b^2 - 4ac} + 2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac} - 2ax - b}\right| + C.$$

Интеграл $\int \frac{Mx + N}{(ax^2 + bx + c)^n} dx$, где $b^2 - 4ac < 0$. M , N , a , b , c , n – константы, x – переменная, $n \geq 2$, решается методом интегрирования подстановкой, а после раскладывается на разность двух интегралов.

Выделить в знаменателе полный квадрат

$$(ax^2 + bx + c) = a \cdot \left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \right) \text{ и сделать подстановку } t = x + \frac{b}{2a}.$$

$$\int \frac{Mx + N}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = \frac{1}{a^n} \cdot \int \frac{Mx + N}{\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \right)^n} dt = \left\{ \begin{array}{l} t = x + \frac{b}{2a} \rightarrow x = t - \frac{b}{2a} \\ \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = q^2 \quad dx = dt \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{a^n} \int \frac{M \cdot \left(t - \frac{b}{2a}\right) + N}{(t^2 + q^2)^n} dt = \frac{1}{a^n} \cdot \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right)}{(t^2 + q^2)^n} dt = \frac{M}{a^n} \int \frac{t}{(t^2 + q^2)^n} dt -$$

$$-\frac{2aN - Mb}{2a^{n+1}} \int \frac{1}{(t^2 + q^2)^n} dt;$$

вычислить поочередно оба интеграла

$$\int \frac{t}{(t^2 + q^2)^n} dt = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{d(t^2 + q^2)}{(t^2 + q^2)^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(t^2 + q^2)^{(-n+1)}}{(-n+1)} + C;$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(t^2 + q^2)^n} dt &= \frac{1}{q^2} \cdot \int \frac{(t^2 + q^2) - t^2}{(t^2 + q^2)^n} dt = \frac{1}{q^2} \cdot \int \frac{(t^2 + q^2)}{(t^2 + q^2)^n} dt - \frac{1}{q^2} \cdot \int \frac{t^2}{(t^2 + q^2)^n} dt = \\ &= \frac{1}{q^2} \cdot \int \frac{1}{(t^2 + q^2)^{n-1}} dt - \frac{1}{q^2} \cdot \int \frac{t^2}{(t^2 + q^2)^n} dt; \end{aligned}$$

второй полученный интеграл проинтегрировать по частям

$$\begin{aligned} \frac{1}{q^2} \int \frac{1}{(t^2 + q^2)^{n-1}} dt - \frac{1}{q^2} \cdot \int \frac{t^2}{(t^2 + q^2)^n} dt &= \frac{1}{q^2} \int \frac{1}{(t^2 + q^2)^{n-1}} dt - \frac{t \cdot (t^2 + q^2)^{-n+1}}{q^2 2(-n+1)} + \\ + \frac{1}{q^2 2(1-n)} \int \frac{1}{(t^2 + q^2)^{n-1}} dt &= \frac{3-2n}{2q^2(1-n)} \int \frac{1}{(t^2 + q^2)^{n-1}} dt - \frac{t}{q^2 2(-n+1) \cdot (t^2 + q^2)^{n-1}} + C, \end{aligned}$$

таким образом интеграл $\int \frac{t}{(t^2 + q^2)^n} dt$ выражается через интеграл

$$\int \frac{t}{(t^2 + q^2)^{n-1}} dt.$$

3.2. Интегрирование рациональной функции в неопределенном интеграле

Определение. Функция вида $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$, где n – натуральное число, a_i ($i = \overline{0, n}$) – постоянные коэффициенты, называется многочленом или целой рациональной функцией.

Число n называется степенью многочлена.

Определение. Корнем многочлена называется такое значение x_0 переменной x , при котором многочлен обращается в нуль.

Определение. Дробно-рациональной называется функция вида $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m}$, где $P_n(x)$ – многочлен n -ой степени, $Q_m(x)$ – многочлен m -ой степени, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$.

Интегрирование дробно-рациональных дробей сводится к трем этапам:

1. Определить, является дробно-рациональная дробь правильной ($n < m$) или неправильной ($n \geq m$). Если дробь неправильная, то необходимо выделить целую часть и сумму многочленов.

2. Разложить знаменатель правильной рациональной дроби на мно-

жители и представить ее в виде суммы простейших рациональных дробей.

3. Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

Любую неправильную рациональную дробь можно путем деления числителя на знаменатель представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Простейшие дроби – это дроби вида $\frac{A}{(x-a)^k}$; $\frac{A}{(x-a)^k}$ ($k \geq 2, k \in \mathbb{N}$); $\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$; $\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$ ($n \geq 2, b^2 - 4ac < 0$), где A, a, M, N, b, c – действительные числа.

Разложение правильной рациональной дроби на простейшие.

Если многочлен $Q_m(x)$ в знаменателе имеет m различных действительных корней $x_1 = b_1, x_2 = b_2, \dots, x_m = b_m$, тогда

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(x-b_1) \cdot (x-b_2) \cdot \dots \cdot (x-b_m)} = \frac{A}{x-b_1} + \frac{B}{x-b_2} + \frac{C}{x-b_3} + \dots + \frac{Z}{x-b_m}$, где $A, B, C, \dots, Z$ – неопределенные коэффициенты. Для нахождения неопределенных коэффициентов применяется метод сравнения.

Если многочлен $Q_m(x)$ в знаменателе имеет кратные действительные корни $x_1 = x_2 = \dots = x_k = b_1, x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_l = b_2, \dots, x_{m-j} = \dots = x_{m-2} = x_{m-1} = b_i$, тогда

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(x-b_1)^k \cdot \dots \cdot (x-b_i)^j} = \frac{A_1}{(x-b_1)} + \frac{A_2}{(x-b_1)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-b_1)^k} + \frac{B_1}{(x-b_2)} + \frac{B_2}{(x-b_2)^2} + \dots + \frac{B_{l-k}}{(x-b_2)^l} + \dots + \frac{K_1}{(x-b_i)} + \dots + \frac{K_j}{(x-b_i)^j}$, где $A_1, A_2, \dots, A_k, B_1, B_2, B_{l-k}, K_1, \dots, K_j$ – неопределенные коэффициенты, которые вычисляются методом сравнения.

Если многочлен $Q_m(x)$ в знаменателе имеет m различных комплексных корней, тогда

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(a_0x^2 + a_1x + a_2) \cdot (b_0x^2 + b_1x + b_2) \cdot \dots \cdot (c_0x^2 + c_1x + c_2)} = \frac{A_1x + A_2}{(a_0x^2 + a_1x + a_2)} + \frac{B_1x + B_2}{(b_0x^2 + b_1x + b_2)} + \dots + \frac{C_1x + C_2}{(c_0x^2 + c_1x + c_2)}$. Коэффициенты $A_1, A_2, B_1, B_2, \dots, C_1, C_2$ – неопределенные коэффициенты, которые вычисляют, используя метод сравнения.

Если многочлен $Q_m(x)$ в знаменателе имеет m кратных комплексных корней, тогда

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(a_0x^2 + a_1x + a_2)^k \cdot (b_0x^2 + b_1x + b_2)^l \cdot \dots \cdot (c_0x^2 + c_1x + c_2)^j} = \frac{A_1x + A_2}{(a_0x^2 + a_1x + a_2)^k} +$$

$$\frac{A_3x + A_4}{(a_0x^2 + a_1x + a_2)^2} + \dots + \frac{A_{2k-1}x + A_{2k}}{(a_0x^2 + a_1x + a_2)^k} + \dots + \frac{C_1x + C_2}{(c_0x^2 + c_1x + c_2)^j} +$$

$$+ \frac{C_3x + C_4}{(c_0x^2 + c_1x + c_2)^2} + \dots + \frac{C_{2j-1}x + C_{2j}}{(c_0x^2 + c_1x + c_2)^j}, \text{ где } k + l + \dots + j = m, \text{ коэффициенты } A_1, \dots, A_{2k}, \dots, C_1, \dots, C_{2j} - \text{неопределенные коэффициенты, вычисляются методом сравнения.}$$

Суть метода сравнения: правую часть равенства привести к общему знаменателю и сгруппировать слагаемые в числителе по переменной x при одинаковых степенях. Далее приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях правой и левой частей равенства, в конце записать равенства в систему, решить ее и найти неопределенные коэффициенты.

ПРИМЕР 3.

Определить, является ли рациональная дробь $\frac{x^5 + x^3 + 1}{x^3 - 2x}$ правильной или неправильной. Если дробь правильная рациональная, то выделить в ней целую часть, правильную рациональную дробь и разложить ее на простейшие дроби.

РЕШЕНИЕ:

1. Определить, является ли рациональная дробь правильной или неправильной. Так как $n \geq m$ (степень переменной в числителе больше, чем степень переменной в знаменателе ($5 > 3$)), то дробь является неправильной.

2. Выделить целую часть и правильную дробь

$$\frac{x^5 + x^3 + 1}{x^3 - 2x} = x^2 + 3 + \frac{1 + 6x}{x^3 - 2x}.$$

$$\begin{array}{r} x^5 + x^3 + 1 \\ \underline{x^3 - 2x} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^5 - 2x^3 \\ \underline{ } \end{array} \quad x^2 + 3$$

$$\begin{array}{r} -3x^3 + 1 \\ \underline{ } \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3x^3 - 6x \\ \underline{ } \end{array}$$

$$1 + 6x$$

$x^2 + 3$ – целая часть;

$\frac{1 + 6x}{x^3 - 2x}$ – правильная дробь.

3. Разложить правильную дробь $\frac{1 + 6x}{x^3 - 2x}$ на простейшие дроби

$$\frac{1 + 6x}{x^3 - 2x} = \frac{1 + 6x}{x \cdot (x^2 - 2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + D}{x^2 - 2} = \frac{Ax^2 - 2A + Bx^2 + Dx}{x \cdot (x^2 - 2)} = \frac{x^2 \cdot (A + B) + x \cdot D - 2A}{x \cdot (x^2 - 2)}.$$

Дробь $\frac{A}{x}$ имеет действительный корень, дробь $\frac{Bx + D}{x^2 - 2}$ имеет комплексные корни.

4. Вычислить неопределенные коэффициенты A, B, D , применяя метод сравнения

$$\begin{cases} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{cases} \begin{cases} 0 = A + B \\ 6 = D \\ 1 = -2A \end{cases}, \text{ следовательно, } \begin{cases} A = -0,5 \\ B = 0,5 \\ D = 6. \end{cases}$$

Записать правильную дробь через известные коэффициенты

$$\frac{1+6x}{x^3-2x} = \frac{1+6x}{x \cdot (x^2-2)} = -\frac{1}{2x} + \frac{\frac{1}{2}x+6}{x^2-2} = -\frac{1}{2x} + \frac{x+12}{2 \cdot (x^2-2)}.$$

ОТВЕТ: Рациональная дробь $\frac{x^5+x^3+1}{x^3-2x}$ является правильной, ее можно разложить на целую часть $-x^2+3$ и правильную дробь $-\frac{1+6x}{x^3-2x}$. Правильную дробь можно разложить на сумму простейших дробей $-\frac{1}{2x}$ (дробь имеет действительный корень) и $\frac{x+12}{2 \cdot (x^2-2)}$ (дробь имеет комплексные корни).

ПРИМЕР 4.

Вычислить интеграл $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} dx$.

РЕШЕНИЕ:

1. Определить, является ли рациональная дробь $\frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}$ правильной или неправильной. Так как $n \geq m$ ($3=3$), то рациональная дробь неправильная.

2. Выделить целую часть и правильную дробь

$$\begin{array}{r} \underline{5x^3+2} \quad \quad \quad \underline{x^3-5x^2+4x} \\ 5x^3-25x^2+20x \quad \quad 5 \end{array} \quad \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} = 5 + \frac{25x^2-20x+2}{x^3-5x^2+4x}.$$

3. Разложить правильную дробь на простейшие дроби. Многочлен в знаменателе имеет три различных действительных корня $x^3-5x^2+4x = x \cdot (x^2-5x+4) = x \cdot (x-1) \cdot (x-4)$, следовательно,

$$\frac{25x^2-20x+2}{x^3-5x^2+4x} = \frac{25x^2-20x+2}{x \cdot (x-1) \cdot (x-4)}.$$

Записать правильную дробь через неопределенные коэффициенты и применить метод сравнения

$$\frac{25x^2-20x+2}{x \cdot (x-1) \cdot (x-4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-4)} = \frac{x^2 \cdot (A+B+C) + x \cdot (-5A-4B-C) + 4A}{x \cdot (x-1) \cdot (x-4)}.$$

$$\begin{cases} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{cases} \begin{cases} 25 = A + B + C \\ -20 = -5A - 4B - C, \\ 2 = 4A \end{cases} \quad \text{следовательно,} \quad \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -7/3. \\ C = 161/6 \end{cases}$$

Записать правильную дробь через известные коэффициенты

$$\frac{25x^2 - 20x + 2}{x \cdot (x-1) \cdot (x-4)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{(x-1)} + \frac{161}{6} \cdot \frac{1}{(x-4)} = \frac{1}{2 \cdot x} - \frac{7}{3 \cdot (x-1)} + \frac{161}{6 \cdot (x-4)}.$$

4. Вычислить интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx &= \int \left(5 + \frac{1}{2x} - \frac{7}{3 \cdot (x-1)} + \frac{161}{6 \cdot (x-4)} \right) dx = \int 5 dx + \int \frac{1}{2 \cdot x} dx - \\ &- \int \frac{7}{3 \cdot (x-1)} dx + \int \frac{161}{6 \cdot (x-4)} dx = 5 \int dx + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x} dx - \frac{7}{3} \cdot \int \frac{1}{(x-1)} dx + \frac{161}{6} \cdot \int \frac{1}{(x-4)} dx = \\ &= 5 \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx - \frac{7}{3} \cdot \int \frac{d(x-1)}{(x-1)} dx + \frac{161}{6} \cdot \int \frac{d(x-4)}{(x-4)} dx = 5x + \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{7}{3} \ln|x-1| + \\ &+ \frac{161}{6} \ln|x-4| + C. \end{aligned}$$

$$\text{ОТВЕТ: } \int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx = 5x + \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{7}{3} \ln|x-1| + \frac{161}{6} \ln|x-4| + C.$$

ПРИМЕР 5.

Вычислить интеграл $\int \frac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2 \cdot (x+1)^2} dx$.

РЕШЕНИЕ:

1. Определить, является рациональная дробь $\frac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2 \cdot (x+1)^2}$ правильной или неправильной. Так как $n < m$ ($2 < 4$), то рациональная дробь правильная. Многочлен в знаменателе имеет четыре действительных корня ($x_1 = x_2 = 3$; $x_3 = x_4 = -1$).

2. Разложить правильную дробь на простейшие дроби, записать ее через неопределенные коэффициенты и вычислить коэффициенты, применяя метод сравнения

$$\begin{aligned} \frac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2 \cdot (x+1)^2} &= \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{(x+1)} + \frac{D}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{x^3 \cdot (A+C) + x^2 \cdot (-A+B-5C+D) + x \cdot (-5A+2B+3C-6D) + (-3A+B+9C+9D)}{(x-3)^2 \cdot (x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{cases} \begin{cases} 0 = A + C \\ 5 = -A + B - 5C + D \\ 6 = -5A + 2B + 3C - 6D \\ 9 = -3A + B + 9C + 9D \end{cases} \quad \begin{cases} A = 0 \\ B = 9/2. \\ C = 0 \\ D = 1/2 \end{cases}$$

Записать правильную дробь через известные коэффициенты

$$\frac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2 \cdot (x+1)^2} = 0 \cdot \frac{1}{(x-3)} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{(x-3)^2} + 0 \cdot \frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{9}{2 \cdot (x-3)^2} + \frac{1}{2 \cdot (x+1)^2}.$$

3. Вычислить интеграл

$$\int \frac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2 \cdot (x+1)^2} dx = \int \left(\frac{9}{2 \cdot (x-3)^2} + \frac{1}{2 \cdot (x+1)^2} \right) dx = \int \frac{9}{2 \cdot (x-3)^2} dx + \int \frac{1}{2 \cdot (x+1)^2} dx =$$

$$= \frac{9}{2} \int \frac{dx}{(x-3)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{9}{2} \int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} = -\frac{9}{2 \cdot (x-3)} - \frac{1}{2 \cdot (x+1)} + C.$$

ОТВЕТ: $\int \frac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2 \cdot (x+1)^2} dx = -\frac{9}{2 \cdot (x-3)} - \frac{1}{2 \cdot (x+1)} + C.$

ПРИМЕР 6.

Вычислить интеграл $\int \frac{6x-7}{x^2+4x+13} dx.$

РЕШЕНИЕ:

1. Определить, является ли рациональная дробь $\frac{6x-7}{x^2+4x+13}$ правильной или неправильной. Так как $n < m$ ($1 < 2$), то рациональная дробь правильная. Многочлен в знаменателе имеет комплексные корни. Выделить в знаменателе полный квадрат $x^2 + 4x + 13 = (x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2) + 9 = (x+2)^2 + 3^2$.

2. Вычислить интеграл, применяя метод интегрирования замены переменной $x+2=t$

$$\int \frac{6x-7}{x^2+4x+13} dx = \int \frac{6x-7}{(x+2)^2+3^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} x+2=t \rightarrow x=t-2 \\ dx=dt \end{array} \right\} = \int \frac{6 \cdot (t-2)-7}{t^2+3^2} dt = \int \frac{6t-19}{t^2+3^2} dt;$$

полученный интеграл разности разложить на разность интегралов

$$\int \frac{6t-19}{t^2+3^2} dt = \int \frac{6t}{t^2+3^2} dt - \int \frac{19}{t^2+3^2} dt = 6 \cdot \int \frac{t}{t^2+3^2} dt - 19 \int \frac{1}{t^2+3^2} dt;$$

в первом интеграле внести под знак дифференциала t

$$6 \cdot \int \frac{t}{t^2+3^2} dt - 19 \cdot \int \frac{1}{t^2+3^2} dt = \frac{6}{2} \cdot \int \frac{d(t^2+3^2)}{t^2+3^2} - 19 \cdot \int \frac{1}{t^2+3^2} dt =$$

$$= 3 \cdot \int \frac{d(t^2+3^2)}{t^2+3^2} - 19 \cdot \int \frac{1}{t^2+3^2} dt.$$

полученные интегралы являются табличными, вычислить их и перейти к исходной переменной

$$3 \cdot \int \frac{d(t^2+3^2)}{t^2+3^2} - 19 \int \frac{1}{t^2+3^2} dt = 3 \ln|t^2+3^2| - 19 \cdot \frac{1}{3} \cdot \arctg\left(\frac{x+2}{3}\right) + C =$$

$$= 3 \cdot \ln|x^2+4x+13| - \frac{19}{3} \cdot \arctg\left(\frac{x+2}{3}\right) + C.$$

ОТВЕТ: $\int \frac{6x-7}{x^2+4x+13} dx = 3 \ln|x^2+4x+13| - \frac{19}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{3}\right) + C.$

ПРИМЕР 7.

Вычислить интеграл $\int \frac{3x-2}{(x^2+6x+10)^2} dx.$

РЕШЕНИЕ:

1. Определить, является ли рациональная дробь $\frac{3x-2}{(x^2+6x+10)^2}$ правильной или неправильной. Так как $n < m$ ($1 < 4$), то рациональная дробь правильная. Многочлен в знаменателе имеет кратные комплексные корни, его можно записать в виде $(x^2+6x+10)^2 = ((x^2+2 \cdot x \cdot 3+3^2)+1)^2 = ((x+3)^2+1)^2.$

2. Вычислить интеграл. Интеграл решить методом интегрирования подстановкой $x+3=y$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-2}{(x^2+6x+10)^2} dx &= \int \frac{3x-2}{((x+3)^2+1)^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} x+3=y \rightarrow x=y-3 \\ dx=dy \end{array} \right\} = \\ &= \int \frac{3 \cdot (y-3)-2}{(y^2+1)^2} dy = \int \frac{3y-11}{(y^2+1)^2} dy = \int \left(\frac{3y}{(y^2+1)^2} - \frac{11}{(y^2+1)^2} \right) dy; \end{aligned}$$

интеграл разности разложить на разность интегралов

$$\int \left(\frac{3y}{(y^2+1)^2} - \frac{11}{(y^2+1)^2} \right) dy = 3 \int \frac{y}{(y^2+1)^2} dy - 11 \int \frac{1}{(y^2+1)^2} dy;$$

в первом интеграле преобразовать подынтегральное выражение таким образом, чтобы под знаком дифференциала находилась та же функция, что и в основной подынтегральной функции. Во втором интеграле к числителю прибавить и отнять y^2

$$\begin{aligned} 3 \int \frac{y}{(y^2+1)^2} dy - 11 \int \frac{1}{(y^2+1)^2} dy &= \frac{3}{2} \int \frac{d(y^2+1)}{(y^2+1)^2} - 11 \int \frac{(y^2+1)-y^2}{(y^2+1)^2} dy = \frac{-3}{2 \cdot (y^2+1)} - \\ - 11 \int \frac{dy}{(y^2+1)} + 11 \int \frac{y^2}{(y^2+1)^2} dy + C &= -\frac{3}{2 \cdot (y^2+1)} - 11 \operatorname{arctg}(y) + 11 \int \frac{y^2}{(y^2+1)^2} dy + C; \end{aligned}$$

интеграл $\int \frac{y^2 dy}{(y^2+1)^2}$ вычислить методом интегрирования по частям

$$\begin{aligned} 11 \int \frac{y^2}{(y^2+1)^2} dy &= \left\{ \begin{array}{l} y=u; \quad dv = \frac{y}{(y^2+1)^2}; \quad dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{d(y^2+1)}{(y^2+1)^2}; \quad v = -\frac{1}{2 \cdot (y^2+1)} \end{array} \right\} = \\ &= -\frac{11y}{2 \cdot (y^2+1)} + \int \frac{11}{2 \cdot (y^2+1)} dy + C_1 = -\frac{11y}{2 \cdot (y^2+1)} + \frac{11}{2} \operatorname{arctg}(y) + C_2; \end{aligned}$$

подставить результаты вычисления в исходный интеграл

$$-\frac{3}{2 \cdot (y^2 + 1)} - 11 \operatorname{arctg}(y) + -\frac{11y}{2 \cdot (y^2 + 1)} + \frac{11}{2} \operatorname{arctg}(y) + C_3 = -\frac{3+11y}{2 \cdot (y^2 + 1)} - \frac{11}{2} \cdot \operatorname{arctg}(y) + C_3;$$

перейти к исходной переменной x

$$-\frac{3+11y}{2 \cdot (y^2 + 1)} - \frac{11}{2} \cdot \operatorname{arctg}(y) + C_2 = -\frac{11x+36}{2 \cdot (x^2 + 6x + 10)^2} - \frac{11}{2} \operatorname{arctg}(x+3) + C_2.$$

$$\text{ОТВЕТ: } \int \frac{3x-2}{(x^2+6x+10)^2} dx = -\frac{11x+36}{2 \cdot (x^2+6x+10)^2} - \frac{11}{2} \operatorname{arctg}(x+3) + C_2.$$

3.3. Интегрирование иррациональных функций

Определение. Иррациональной называют функцию вида $R\left(x, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)}\right)$, где a, b, c, d, n – константы, $ad-bc \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)}, \sqrt[m]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)}, \dots\right) dx$ решается методом интегрирования подстановкой $t = \sqrt[k]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)}$, где k – наименьшее общее кратное показателей корней.

ПРИМЕР 8.

Вычислить интеграл $\int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}} dx$.

РЕШЕНИЕ:

1. Подынтегральная функция является иррациональной функцией. Сделать подстановку $t = \sqrt[6]{x}$ (6 – наименьшее общее кратное чисел 1, 3, 2).

2. Вычислить интеграл методом интегрирования подстановкой

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt[6]{x} \rightarrow t^6 = x \\ 6t^5 dt = dx \end{array} \right\} = \int \frac{t^3}{t^6 - t^4} \cdot 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^4}{t^2 - 1} dt.$$

3. Дробь является неправильной, выделить целую часть и многочлен

$$\begin{array}{r} t^4 \\ \overline{t^2 - 1} \\ t^4 - t^2 \\ \hline t^2 + 1 \end{array} \quad \frac{t^4}{t^2 - 1} = t^2 + 1 + \frac{1}{t^2 - 1}.$$

4. Вычислить интеграл полученной подынтегральной функции

$$6 \int \frac{t^4}{t^2-1} dt = 6 \int \left(t^2 + 1 + \frac{1}{t^2-1} \right) dt = 6 \int t^2 dt + 6 \int dt + 6 \int \frac{dt}{t^2-1} = 2t^3 + 6t - 3 \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C;$$

перейти к исходной переменной x

$$2t^3 + 6t - 3 \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} - 3 \ln \left| \frac{1+\sqrt[6]{x}}{1-\sqrt[6]{x}} \right| + C.$$

ОТВЕТ: $\int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}} dx = 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} - 3 \ln \left| \frac{1+\sqrt[6]{x}}{1-\sqrt[6]{x}} \right| + C.$

Интеграл вида $\int x^m \cdot (a + bx^n)^p dx$, где подынтегральная функция представляет собой дифференциальный бином, в котором m, n, p – рациональные числа, берется в случаях:

1) p – целое число. Интеграл вычисляется методом подстановки. Подстановка $x = t^k$, где k – общий знаменатель дробей m, n .

ПРИМЕР 9.

Вычислить интеграл $\int \sqrt{x} \cdot (1 + \sqrt{x})^3 dx = \int x^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right)^3 dx.$

РЕШЕНИЕ:

1. В дифференциальном биноме $m=0,5, n=0,5, p=3$ – первый случай.

2. Сделать подстановку $x = t^2$.

3. Вычислить интеграл методом интегрирования подстановкой

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} \cdot (1 + \sqrt{x})^3 dx &= \left\{ x = t^2 \quad dx = 2t dt \quad x^{\frac{1}{2}} = t \right\} = \int t \cdot (1+t)^3 \cdot 2t dt = \\ &= 2 \int t^2 \cdot (1 + 3t + 3t^2 + t^3) dt = 2 \int (t^2 + 3t^3 + 3t^4 + t^5) dt = \frac{2}{3} t^3 + \frac{3}{2} t^4 + \frac{6}{5} t^5 + \frac{1}{3} t^6 + C; \end{aligned}$$

перейти к исходной переменной x

$$\frac{2}{3} t^3 + \frac{3}{2} t^4 + \frac{6}{5} t^5 + \frac{1}{3} t^6 + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} x^2 + \frac{6}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3} x^3 + C.$$

ОТВЕТ: $\int \sqrt{x} \cdot (1 + \sqrt{x})^3 dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} x^2 + \frac{6}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3} x^3 + C.$

2) $\frac{m+1}{n}$ – целое число. Интеграл вычисляется методом подстановки.

Подстановка $a + bx^n = t^k$, где k – знаменатель числа p .

ПРИМЕР 10.

Вычислить интеграл $\int x^5 \cdot \sqrt[3]{(1+x^3)^2} dx = \int x^5 \cdot (1+x^3)^{\frac{2}{3}} dx.$

РЕШЕНИЕ:

1. В дифференциальном биноме $m=5, n=3, p=\frac{2}{3}$, следовательно,

$$\frac{m+1}{n} = 2 - \text{второй случай } (k=3).$$

2. Сделать подстановку $t^3 = 1 + x^3$.

3. Вычислить интеграл методом интегрирования подстановкой

$$\int x^5 \cdot \sqrt[3]{(1+x^3)^2} dx = \left\{ t^3 = 1+x^3 \quad x = (t^3-1)^{\frac{1}{3}} \quad dx = t^2 \cdot (t^3-1)^{-\frac{2}{3}} dt \right\} =$$

$$= \int (t^3-1)^{\frac{5}{3}} \cdot t^{\frac{3 \cdot 2}{3}} \cdot t^2 \cdot (t^3-1)^{-\frac{2}{3}} dt = \int t^4 \cdot (t^3-1) dt = \int (t^7 - t^4) dt = \frac{t^8}{8} - \frac{t^5}{5} + C;$$

перейти к исходной переменной x $\frac{t^8}{8} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{(1+x^3)^{\frac{8}{3}}}{8} - \frac{(1+x^3)^{\frac{5}{3}}}{5} + C.$

ОТВЕТ: $\int x^5 \cdot \sqrt[3]{(1+x^3)^2} dx = \frac{(1+x^3)^{\frac{8}{3}}}{8} - \frac{(1+x^3)^{\frac{5}{3}}}{5} + C.$

3) $\frac{m+1}{n} + p$ – целое число. Интеграл вычисляется методом подстановки. Подстановка $ax^{-n} + b = t^k$, где k – знаменатель числа p .

ПРИМЕР 11.

Вычислить интеграл $\int \frac{1}{x^4 \cdot \sqrt{1+x^2}} dx = \int x^{-4} \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx.$

РЕШЕНИЕ:

1. В дифференциальном бинOME $m = -4$, $n = 2$, $p = -1/2$, следовательно, $\frac{m+1}{n} + p = \frac{-4+1}{2} - \frac{1}{2} = -2$ – третий случай.

2. Сделать подстановку $t^2 = x^{-2} + 1$, следовательно, $x = (t^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$,
 $dx = -\frac{t}{(t^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} dt.$

3. Вычислить интеграл методом интегрирования подстановкой

$$\int x^{-4} \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \left\{ t^2 = x^{-2} + 1 \quad dx = -\frac{t}{(t^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} dt \right\} = -\int (t^2 - 1)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{t^2 - 1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{t}{(t^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} dt =$$

$$= -\int (t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{t^2 - 1}{t^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot t dt = -\int (t^2 - 1) dt = t - \frac{t^3}{3} + C = t - \frac{t^3}{3} + C;$$

перейти к исходной переменной x

$$t - \frac{t^3}{3} + C = \sqrt{x^{-2} + 1} - \frac{\sqrt{(x^{-2} + 1)^3}}{3} + C = \frac{(2x^2 - 1) \cdot \sqrt{1+x^2}}{3x^3} + C.$$

ОТВЕТ: $\int \frac{1}{x^4 \cdot \sqrt{1+x^2}} dx = \frac{(2x^2 - 1) \cdot \sqrt{1+x^2}}{3x^3} + C.$

Интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$, где a, b, c – константы, можно вычислить двумя способами.

Первый способ:

1) квадратное уравнение имеет вещественные корни x_1 и x_2 ($x_1 \neq x_2$) и $a > 0$. Интеграл вычисляется методом подстановки. Для этого необходимо преобразовать квадратное уравнение $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)} =$
 $= |x - x_1| \cdot \sqrt{a \frac{x - x_2}{x - x_1}}$ и сделать подстановку $t = \sqrt{a \frac{(x - x_2)}{(x - x_1)}}$, следовательно,

$$x = \frac{x_1 t^2 - ax_2}{t^2 - a};$$

2) квадратное уравнение имеет вещественные корни $x_1 = x_2$. Подынтегральное выражение преобразуется в рациональную функцию $\sqrt{ax^2 + bx + c} = |x - x_1| \cdot \sqrt{a}$;

3) квадратное уравнение не имеет вещественных корней $a > 0$. Интеграл вычисляется методом подстановки $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}$, следовательно, $x = \frac{t^2 - c}{b \mp 2t\sqrt{a}}$.

ПРИМЕР 12.

Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

РЕШЕНИЕ:

1. Квадратный трехчлен $x^2 + x + 1$ вещественных корней не имеет, $a > 0, c > 0$.

2. Сделать подстановку $\sqrt{x^2 + x + 1} = t - x$.

3. Вычислить интеграл методом интегрирования подстановкой

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}} = \left\{ \sqrt{x^2 + x + 1} = t - x; \quad x = \frac{t^2 + 1}{2t + 1}; \quad dx = \frac{2(t^2 + t + 1)}{(2t + 1)^2} dt \right\} =$$

$$= \int \frac{2t + 1}{t^2 - 1} \cdot \frac{2t + 1}{t^2 + t + 1} \cdot \frac{2(t^2 + t + 1)}{(2t + 1)^2} dt = 2 \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \text{Ln} \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| + C = \text{Ln} \left| \frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x + \sqrt{x^2 + x + 1} + 1} \right| + C.$$

ОТВЕТ: $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}} = \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x + \sqrt{x^2 + x + 1} + 1} \right| + C.$

4) квадратное уравнение не имеет вещественных корней, $a < 0, c > 0$. Интеграл вычисляется методом подстановки $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$, следовательно, $x = \frac{b \mp 2\sqrt{ct}}{t^2 - a}$.

Второй способ вычисления интегралов вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$, где a, b, c – константы, рассмотрен ниже.

3.4. Интегрирование тригонометрических функций

Для неопределенных интегралов типа $\int R(\sin(x); \cos(x))dx$ применяется метод универсальной тригонометрической подстановки. Универсальная тригонометрическая подстановка – $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ ($-\pi < x < \pi$), следовательно,

$$x = 2\operatorname{arctg}(t), \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

$$\text{В этом случае } \sin(x) = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

ПРИМЕР 13.

Вычислить интеграл $\int \frac{1}{3 + \sin(x) + \cos(x)} dx$.

РЕШЕНИЕ:

1. Сделать универсальную тригонометрическую подстановку $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, тогда $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$, $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

2. Вычислить интеграл методом интегрирования подстановкой

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{3 + \sin(x) + \cos(x)} dx &= \left\{ t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt \right\} = \int \frac{1}{3 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \\ &= \int \frac{1}{t^2 + t + 2} dt = \int \frac{1}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} dt = \int \frac{d\left(t + 0.5\right)}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t + 0.5}{\sqrt{7}/2}\right) + C; \end{aligned}$$

перейти к исходной переменной x

$$\frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t + 0.5}{\sqrt{7}/2}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1 + 2\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{7}}\right) + C.$$

$$\text{ОТВЕТ: } \int \frac{1}{3 + \sin(x) + \cos(x)} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1 + 2\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{7}}\right) + C.$$

В зависимости от свойств и вида подынтегральной функции применяются другие подстановки, которые упрощают решение.

Для неопределенных интегралов типа $\int R(\sin^m(x); \cos^n(x))dx$ применяется метод подстановки и понижения степени.

1) Подстановка $\sin(x) = t$, если n – целое положительное нечетное

число, m – целое положительное четное число, тогда $dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$,
 $\cos(x) = \sqrt{1-t^2}$.

ПРИМЕР 14.

Вычислить интеграл $\int \sin^2(x) \cdot \cos^3(x) dx$.

РЕШЕНИЕ:

1. $m = 2$, $n = 3$ – первый случай. Сделать тригонометрическую подстановку $\sin(x) = t$, тогда $dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$, $\cos(x) = \sqrt{1-t^2}$.

2. Вычислить интеграл методом интегрирования подстановкой

$$\int \sin^2(x) \cdot \cos^3(x) dx = \left\{ \sin(x) = t; \quad dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt; \quad \cos(x) = \sqrt{1-t^2} \right\} =$$

$$= \int t^2 \cdot (1-t^2)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int t^2 \cdot (1-t^2) dt = \int (t^2 - t^4) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C;$$

перейти к исходной переменной x

$$\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3(x)}{3} - \frac{\sin^5(x)}{5} + C.$$

ОТВЕТ: $\int \sin^2(x) \cdot \cos^3(x) dx = \frac{\sin^3(x)}{3} - \frac{\sin^5(x)}{5} + C.$

2) Подстановка $\cos(x) = t$, если m – целое положительное нечетное число, n – целое положительное четное число, тогда $dx = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$,
 $\sin(x) = \sqrt{1-t^2}$.

ПРИМЕР 15.

Вычислить интеграл $\int \sin(x) \cdot \cos^2(x) dx$.

РЕШЕНИЕ:

1. $m = 1$, $n = 2$ – второй случай. Сделать тригонометрическую подстановку $\cos(x) = t$, тогда $dx = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$, $\sin(x) = \sqrt{1-t^2}$.

2. Вычислить интеграл методом интегрирования подстановкой

$$\int \sin(x) \cdot \cos^2(x) dx = \left\{ \cos(x) = t; \quad dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}; \quad \sin(x) = \sqrt{1-t^2} \right\} =$$

$$= \int -\sqrt{1-t^2} \cdot t^2 \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + C;$$

перейти к исходной переменной x

$$-\frac{t^3}{3} + C = -\frac{\cos^3(x)}{3} + C.$$

ОТВЕТ: $\int \sin(x) \cdot \cos^2(x) dx = -\frac{\cos^3(x)}{3} + C.$

3) Подстановка $tg(x) = t$, если $m + n$ – целое четное отрицательное число, тогда $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$, $\sin(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

ПРИМЕР 16.

Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\cos(x) \cdot \sin^3(x)} = \int \cos^{-1}(x) \cdot \sin^{-3}(x) dx.$

РЕШЕНИЕ:

1. $m = -3$, $n = -1$, $m + n = -3 - 1 = -4$ – третий случай. Сделать тригонометрическую подстановку $tg(x) = t$, тогда $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$, $\sin(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$,

$$\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

2. Вычислить интеграл методом интегрирования подстановкой

$$\int \frac{dx}{\cos(x) \cdot \sin^3(x)} = \int \cos^{-1}(x) \cdot \sin^{-3}(x) dx = \left\{ tg(x) = t; dx = \frac{dt}{1+t^2}; \sin(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}; \right.$$

$$\left. \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right\} = \int \sqrt{1+t^2} \cdot \frac{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}{t^3 \cdot (1+t^2)} dt = \int \frac{1+t^2}{t^3} dt = -\frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C;$$

перейти к исходной переменной x

$$-\frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C = -\frac{1}{2 \cdot tg^2(x)} + \ln|tg(x)| + C = -\frac{ctg^2(x)}{2} + \ln|tg(x)| + C.$$

ОТВЕТ: $\int \frac{dx}{\cos(x) \cdot \sin^3(x)} = -\frac{ctg^2(x)}{2} + \ln|tg(x)| + C.$

4) Формулы понижения порядка $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2},$

$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$, если m, n – целые неотрицательные четные числа.

ПРИМЕР 17.

Вычислить интеграл $\int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) dx.$

РЕШЕНИЕ:

1. $m = 2$, $n = 2$ – четвертый случай.

2. Преобразовать подынтегральную функцию, используя тригонометрические формулы

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot \sin^2(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \cos(2x)}{2} = \frac{1}{8} \cdot (1 - \cos(2x)).$$

3. Вычислить интеграл $\int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int \frac{1}{8} \cdot (1 - \cos(2x)) dx =$
 $= \frac{1}{8} \cdot \int (1 - \cos(2x)) dx = \frac{1}{8} \cdot \left(x - \frac{\sin(2x)}{2} \right) + C = \frac{x}{8} - \frac{\sin(2x)}{16} + C.$

ОТВЕТ: $\int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin(2x)}{16} + C.$

Для неопределенных интегралов вида $\int R(\sin(ax); \cos(bx)) dx$, $\int R(\cos(ax); \cos(bx)) dx$, $\int R(\sin(ax); \sin(bx)) dx$ подынтегральная функция преобразуется, используя тригонометрические формулы:

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))}{2}$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))}{2}$$

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))}{2}$$

ПРИМЕР 18.

Вычислить интеграл $\int \sin(3x)\cos(2x) dx$.

РЕШЕНИЕ:

1. Преобразовать подынтегральную функцию, используя тригонометрические формулы $\sin(3x) \cdot \cos(2x) = \frac{(\sin(x) + \sin(5x))}{2}.$

2. Вычислить интеграл $\int \sin(3x)\cos(2x) dx = \frac{1}{2} \cdot \int (\sin(x) + \sin(5x)) dx =$
 $= \frac{1}{2} \left(\int \sin(x) dx + \int \sin(5x) dx \right) = \frac{1}{2} \left(-\cos(x) - \frac{\cos(5x)}{5} \right) + C = -\frac{1}{2} \left(\cos(x) + \frac{\cos(5x)}{5} \right) + C.$

ОТВЕТ: $\int \sin(3x)\cos(2x) dx = -\frac{1}{2} \cdot \left(\cos(x) + \frac{\cos(5x)}{5} \right) + C.$

Для неопределенного интеграла $\int R(tg(x)) dx$ используется подстановка $t = tg(x)$, следовательно, $x = t \cdot arctg(x)$, $dx = \frac{1}{1+t^2} dt.$

ПРИМЕР 19.

Вычислить интеграл $\int tg^3(x) dx$.

РЕШЕНИЕ:

1. Сделать тригонометрическую подстановку $t = tg(x)$, тогда $dx = \frac{1}{1+t^2} dt.$

2. Вычислить интеграл методом интегрирования подстановкой

$$\int tg^3(x)dx = \left\{ t = tg(x) \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \right\} = \int \frac{t^3}{1+t^2} dt = \int \left(t - \frac{t}{t^2+1} \right) dt = \int t dt - \int \frac{t}{t^2+1} dt =$$

$$= \int t dt - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \ln|t^2+1| + C;$$

перейти к исходной переменной x

$$\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \ln|t^2+1| + C = \frac{tg^2(x)}{2} - \frac{\ln|tg^2(t)+1|}{2} + C.$$

3. Преобразовать полученный результат

$$\frac{tg^2(x)}{2} - \frac{\ln|tg^2(t)+1|}{2} + C =$$

$$= \frac{tg^2(x)}{2} - \frac{\ln|(\sin^2(x) + \cos^2(x))/\cos^2(x)|}{2} + C = \frac{tg^2(x)}{2} - \frac{\ln|\cos^{-2}(x)|}{2} + C = \frac{tg^2(x)}{2} -$$

$$- \frac{\ln|\cos^{-2}(x)|}{2} + C = \frac{tg^2(x)}{2} + \ln\left|\frac{1}{\cos^2(x)}\right|^{\frac{1}{2}} + C = \frac{tg^2(x)}{2} + \ln|\cos(x)| + C.$$

ОТВЕТ: $\int tg^3(x)dx = \frac{tg^2(x)}{2} + \ln|\cos(x)| + C.$

Для неопределенного интеграла $\int R(ctg(x))dx$ используется подстановка $t = ctg(x)$, следовательно, $dx = -\frac{1}{1+t^2} dt$.

ПРИМЕР 20.

Вычислить интеграл $\int ctg^3(x)dx$.

РЕШЕНИЕ:

1. Сделать тригонометрическую подстановку $t = ctg(x)$, тогда $dx = -\frac{1}{1+t^2} dt$.

2. Вычислить интеграл методом интегрирования подстановкой

$$\int ctg^3(x)dx = \left\{ t = ctg(x) \quad dx = -\frac{dt}{1+t^2} \right\} = \int -\frac{t^3}{1+t^2} dt = -\int \left(t - \frac{t}{t^2+1} \right) dt =$$

$$= -\int t dt + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} = -\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \ln|t^2+1| + C;$$

перейти к исходной переменной x

$$-\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \ln|t^2+1| + C = -\frac{ctg^2(x)}{2} + \frac{\ln|ctg^2(t)+1|}{2} + C.$$

3. Преобразовать полученный результат

$$-\frac{ctg^2(x)}{2} + \frac{\ln|ctg^2(t)+1|}{2} + C = -\frac{ctg^2(x)}{2} + \frac{\ln|(\cos^2(x) + \sin^2(x))/\sin^2(x)|}{2} + C =$$

$$= -\frac{ctg^2(x)}{2} + \ln\left|(\sin^{-2}(x))^{\frac{1}{2}}\right| + C = -\frac{ctg^2(x)}{2} - \ln|\sin(x)| + C.$$

$$\text{ОТВЕТ: } \int ctg^3(x)dx = -\frac{ctg^2(x)}{2} - \ln|\sin(x)| + C.$$

Второй способ вычисления интегралов вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$.

Интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$, где a, b, c – константы, можно вычислить, используя тригонометрические подстановки. Необходимо выделить под радикалом полный квадрат и сделать подстановку, $t = x + \frac{b}{2a}$.

Получится один из следующих интегралов: $\int R(t, \sqrt{t^2 + m^2})dt$, $\int R(t, \sqrt{t^2 - m^2})dt$, $\int R(t, \sqrt{m^2 - t^2})dt$.

Интеграл вида $\int R(t, \sqrt{t^2 + m^2})dt$, где m – константа, вычисляется, используя тригонометрическую подстановку $t = m \cdot tg(z)$ или $t = m \cdot ctg(z)$.

Интеграл вида $\int R(t, \sqrt{t^2 - m^2})dt$, где m – константа, вычисляется, используя тригонометрическую подстановку $t = \frac{m}{\cos(z)}$ или $t = \frac{m}{\sin(z)}$.

Интеграл вида $\int R(t, \sqrt{m^2 - t^2})dt$, где m – константа, вычисляется, используя тригонометрическую подстановку $t = m \cdot \cos(z)$ или $t = m \cdot \sin(z)$.

4. «НЕБЕРУЩИЕСЯ» ИНТЕГРАЛЫ

Если интеграл не выражается через элементарные функции, то такой интеграл является «неберущимся». Примеры «неберущихся» интегралов:

$$\int e^{-x^2} dx, \int \frac{dx}{\ln(x)}, \int \cos(x^2) dx, \int \sin(x^2) dx, \int \frac{\sin(x)}{x} dx, \int \frac{\cos(x)}{x} dx, \int \frac{e^x}{x} dx.$$

Для приближенного вычисления этих неопределенных интегралов с любой степенью точности используются бесконечные ряды. Если интеграл является определенным на концах отрезка, то для его вычисления используются приближенные формулы, с помощью которых определенный интеграл вычисляется с любой степенью точности. Приближенное вычисление «неберущихся» интегралов будет рассмотрено в других разделах курса высшей математики.

5. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ ПО ГЛАВЕ «НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ»

1. Дать понятие первообразной функции и неопределенного интеграла.
2. Дать формулировку теореме о задании множества первообразных функций.
3. Дать определение неопределенного интеграла.
4. Рассказать, что является подынтегральной функцией, подынтегральным выражением, переменной интегрирования в неопределенном интеграле.
5. Ответить на вопрос, почему интеграл называется неопределенным?
6. Рассказать геометрический смысл неопределенного интеграла.
7. Перечислить свойства неопределенных интегралов.
8. Записать таблицу неопределенных интегралов.
9. Рассказать суть решения неопределенного интеграла методом непосредственного интегрирования, в каких случаях он применяется.
10. Рассказать алгоритм решения неопределенного интеграла методом подстановки, в каких случаях он применяется.
11. Рассказать алгоритм решения неопределенного интеграла методом по частям, для каких функций он применяется.
12. Рассказать алгоритмы интегрирования дробей, содержащих квадратный трехчлен, когда корни квадратного уравнения действительные или комплексные числа.
13. Дать определения целой рациональной функции, корня многочлена, дробно-рациональной функции.
14. Дать определение правильной и неправильной дробно-рациональной функции.
15. Рассказать алгоритмы интегрирования дробно-рациональных функций.
16. Рассказать алгоритм разложения правильной рациональной дроби на простейшие дроби.
17. Рассказать метод сравнения, используемый при вычислении неопределенных коэффициентов в многочленах.
18. Дать определение иррациональной функции.
19. Рассказать алгоритмы интегрирования иррациональных функций.
20. Рассказать алгоритмы интегрирования тригонометрических функций.
21. Рассказать, какая тригонометрическая подстановка является универсальной, в каких случаях она применяется.
22. Рассказать понятие «неберущихся» интегралов.
23. Рассказать, как приближенно вычисляются «неберущиеся» интегралы.

6. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЯ ПО ГЛАВЕ «НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ»

Вычислить неопределенные интегралы.

ВАРИАНТ № 1

$$\begin{aligned} & \int (x^2 + 3x^3 - 5 \cos(x)) dx; & \int \frac{3}{2 - (2x+1)^2} dx; & \int \frac{3x}{x^2 + 4} dx; \\ & \int (x^2 - x + 3) \cdot \sin(6x) dx; & \int e^x \cdot \sin(-2x) dx; & \int \sin(x) \cdot \cos(2x) dx; \\ & \int \frac{1}{\sin(x)} dx; & \int \operatorname{tg}(2x+1) dx; & \int \cos^2(3x) - \sin(x) dx; \\ & \int \sin^3(x) \cdot \cos^2(x) dx; & \int \frac{1}{x^2 + 3x + 5} dx; & \int \frac{x^2 + x - 3}{(x-1) \cdot (x-2)} dx; \\ & \int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx; & \int \sqrt{x} \cdot (2+3x)^2 dx. \end{aligned}$$

ВАРИАНТ № 2

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{7}{x} + 3 \sin(x) \right) dx; & \int \frac{18}{\operatorname{sh}^2(4x+1)} dx; & \int \frac{x}{\sqrt{2-x^4}} dx; \\ & \int x \cdot \arccos(7x) dx; & \int e^x \cdot \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx; & \int \sin(x) \cdot \sin(2x) dx; \\ & \int \frac{1}{5 \cdot \cos(x) + 3} dx; & \int \operatorname{ctg}(3x+1) dx; & \int \frac{1}{\sin^5(x) \cdot \cos(x)} dx; \\ & \int \sin^4(2x) \cdot \cos^5(2x) dx; & \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx; & \int \frac{x^2 + x - 1}{(x-1)^2 \cdot (x-2)} dx; \\ & \int \frac{1}{(\sqrt[3]{x} + \sqrt{x})} dx; & \int \frac{\sqrt{2-\sqrt{x}}}{\sqrt[2]{x^3}} dx. \end{aligned}$$

ВАРИАНТ № 3

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{9}{\cos^2(x)} + 5x - 1 \right) dx; & \int (3x-15)^3 dx; & \int e^{(\cos(x))} \sin(x) dx; \\ & \int \operatorname{arcctg}(x-1) dx; & \int \sin^2\left(\frac{\ln x}{2}\right) dx; & \int \cos(x) \cdot \cos(2x) dx; \\ & \int \frac{1}{\sin(x) + \cos(x)} dx; & \int \operatorname{tg}^3(2x) dx; & \int \sin^2(4x) dx; \\ & \int \sin^2(x) \cdot \cos(x) dx; & \int \frac{x-2}{x^2 - x - 2} dx; & \int \frac{x^3 + 2x^2 - x}{(x^2 + 3x + 1) \cdot (x^2 - 6x + 7)} dx; \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{(x+1)^3}} dx; \quad \int x^{\frac{5}{2}} \cdot (2 - 4\sqrt{x})^2 dx.$$

ВАРИАНТ № 4

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{13}{\sqrt{x^2+9}} - x^3 \right) dx; & \int e^{(8x+13)} dx; & \int x^{2.5} \sqrt{x^3-8} dx; \\ & \int (2x+1) \cdot \sin(4x) dx; & \int \cos(\ln(1-4x)) dx; & \int \sin(-x) \cdot \cos(-2x) dx; \\ & \int \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)} dx; & \int \operatorname{ctg}(3x+1) dx; & \int \frac{1}{\sin^2(x) \cdot \sin(2x)} dx; \\ & \int \sin^4(2x) \cdot \cos^3(2x) dx; & \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx; & \int \frac{x^2+x-8}{(x^2+3x+4) \cdot (x-1)} dx; \\ & \int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x+1}} dx; & \int \frac{\sqrt{x}}{(2-3x)^2} dx. \end{aligned}$$

ВАРИАНТ № 5

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{10}{\sqrt{x^2-1}} + 2x^2 \right) dx; & \int \frac{-3}{\cos^2(2x+2)} dx; & \int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx; \\ & \int \arcsin(2-3x) dx; & \int 3^{(4x)} \cdot \sin(2x) dx; & \int \sin(-x) \cdot \sin(-2x) dx; \\ & \int \frac{\sin(x)}{1-\sin(x)} dx; & \int \operatorname{tg}(3x) dx; & \int \cos^2(2x) dx; \\ & \int \sin^3(x) \cdot \cos^4(x) dx; & \int \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}} dx; & \int \frac{7x+8}{(x+1) \cdot (x+2)} dx; \\ & \int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}} dx; & \int x^{\frac{5}{2}} \cdot \left(6+7x^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{3}{2}} dx. \end{aligned}$$

ВАРИАНТ № 6

$$\begin{aligned} & \int \left(3\cos(x) - \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx; & \int \frac{-2}{\sin^2(4x-8)} dx; & \int \frac{1}{x \cdot (1+\ln(x))} dx; \\ & \int (3x-1) \cdot \operatorname{arctg}(-2x) dx; & \int 4^{(3x)} \cdot \cos(5x) dx; & \int \sin(-x) \cdot \cos(-2x) dx; \\ & \int \frac{1}{8-4 \cdot \sin(x)+7 \cdot \cos(x)} dx; & \int \operatorname{tg}(3x+4) dx; & \int \frac{\sin^2(x)}{\cos^6(x)} dx; \\ & \int \sin^4(2x) \cdot \cos(2x) dx; & \int \frac{1}{x^2+3x+2} dx; & \int \frac{2x^2-x+2}{(x^2+x+1) \cdot (x+2)} dx; \\ & \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx; & \int x^{\frac{5}{2}} \cdot (3-x^2)^3 dx. \end{aligned}$$

ВАРИАНТ № 7

$$\begin{aligned}
& \int \left(\frac{21}{x} + \frac{7}{49+x^2} \right) dx; & \int 3sh(3x-1) dx; & \int e^{(2x^3-4)} \cdot x^2 dx; \\
& \int x \cdot \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx; & \int \sin(\ln(2-8x)) dx; & \int \cos(2x) \cdot \cos(3x) dx; \\
& \int \frac{1}{\cos(x)+2 \cdot \sin(x)+1} dx; & \int ctg(3x-4) dx; & \int \sin^2(2x) dx; \\
& \int \sin(x) \cdot \cos^4(x) dx; & \int \frac{4}{x^2-x-2} dx; & \int \frac{x^2+x+2}{(x+1)^2 \cdot (x+2)} dx; \\
& \int \frac{x+3}{\sqrt{2x+3}} dx; & \int x^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\left(-2+3x^{\frac{1}{2}}\right)} dx.
\end{aligned}$$

ВАРИАНТ № 8

$$\begin{aligned}
& \int \left(\frac{7}{49-x^2} + 2 \cos(x) \right) dx; & \int \frac{5}{\sqrt{25+(3x-1)^2}} dx; & \int \sqrt{3+\cos(5x)} \cdot \sin(5x) dx; \\
& \int (-4x+3) \cdot \ln(8x) dx; & \int \cos^2\left(\frac{\ln(x)}{2}\right) dx; & \int \sin(2x) \cdot \sin(8x) dx; \\
& \int \frac{1}{20 \cdot \sin(x)-3 \cdot \cos(x)} dx; & \int tg^4(x) dx; & \int \frac{1}{\sin(x) \cdot \cos^3(x)} dx; \\
& \int \sin^2(2x) \cdot \cos^3(2x) dx; & \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx; & \int \frac{2x^2-3x+4}{(x^2+x+1) \cdot (x+1)} dx; \\
& \int \frac{1}{x+\sqrt[3]{x^2}} dx; & \int x^{\frac{1}{4}} \cdot (4-2x)^{\frac{3}{4}} dx.
\end{aligned}$$

ВАРИАНТ № 9

$$\begin{aligned}
& \int (3e^x + 8x^2) dx; & \int \frac{1}{ch^2(8x)} dx; & \int \frac{\ln^3(x)}{x} dx; \\
& \int (8x+1) \cdot \sin(-4x) dx; & \int 5^{(3x-1)} \cdot \sin(x) dx; & \int \sin(2x) \cdot \cos(8x) dx; \\
& \int \frac{1}{5+3 \sin(x)+2 \cos(x)} dx; & \int ctg^4(x) dx; & \int \cos^2(x) + 2 \sin^2(x) dx; \\
& \int \cos^5(x) \cdot \sin^2(x) dx; & \int \frac{2+x}{x^2-3x+2} dx; & \int \frac{7x+8}{(x+2) \cdot (x+3)} dx; \\
& \int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x \cdot (x-\sqrt[3]{x})} dx; & \int \sqrt{x} \cdot (-2+x^2)^6 dx.
\end{aligned}$$

ВАРИАНТ № 10

$$\begin{aligned}
& \int \left(\frac{3}{\sin^2(x)} + 2 \right) dx; & \int \frac{2}{\sqrt{(x-4)^2 - 6}} dx; & \int \frac{3^{(\sqrt{x+1})}}{\sqrt{x+1}} dx; \\
& \int (x - 6x^2) \cdot \cos(3x) dx; & \int 6^{(2x+1)} \cdot \cos(x) dx; & \int \cos(-2x) \cdot \cos(8x) dx; \\
& \int \frac{1}{2 \cdot \sin(x) + 3 \cdot \cos(x) - 5} dx; & \int \operatorname{tg}^4(2x) dx; & \int \frac{1}{\sin^5(x) \cdot \cos^3(x)} dx; \\
& \int \sin^2(2x) \cdot \cos^5(2x) dx; & \int \frac{x}{x^2 - 5x + 6} dx; & \int \frac{x^2 + 2x + 3}{(x-6)^2 \cdot (x+1)} dx; \\
& \int \frac{1}{(x+1)^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{1}{2}}} dx; & \int \sqrt{x} \cdot \left(3 - 4x^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{3}{2}} dx.
\end{aligned}$$

ВАРИАНТ № 11

$$\begin{aligned}
& \int (2\operatorname{sh}(x) + 3e^x) dx; & \int 5^{(3x-1)} dx; & \int \frac{\cos(2x)}{\sin(x) \cdot \cos(x)} dx; \\
& \int \arccos(1 - 6x) dx; & \int \sin(\ln(3x + 2)) dx; & \int \sin(-2x) \cdot \sin(-3x) dx; \\
& \int \frac{1}{\cos(x)} dx; & \int \operatorname{ctg}^4(2x) dx; & \int \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) dx; \\
& \int \sin^4(x) \cdot \cos(x) dx; & \int \frac{1}{\sqrt{3x^2 + x + 3}} dx; & \int \frac{2x - 8}{(x+2) \cdot (x-3)} dx; \\
& \int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}} dx; & \int x^{\frac{5}{2}} \cdot (-3 + 4x)^{\frac{3}{2}} dx.
\end{aligned}$$

ВАРИАНТ № 12

$$\begin{aligned}
& \int \left(2\sin(x) + \frac{3}{x} + \frac{4}{\operatorname{ch}^2(x)} \right) dx; & \int \frac{2}{\operatorname{sh}^2(4x-8)} dx; & \int e^{(-4x^2)} \cdot x dx; \\
& \int \arcsin(2x) dx; & \int \cos(\ln(6x-1)) dx; & \int \sin(-2x) \cdot \cos(-3x) dx; \\
& \int \frac{1}{5 \cdot \sin(x) + 3} dx; & \int \operatorname{tg}^2(4x-2) dx; & \int \frac{1}{\sin^4(x) \cdot \cos^2(x)} dx; \\
& \int \sin^2(2x) \cdot \cos(2x) dx; & \int \frac{3-x}{x^2 + 3x + 2} dx; & \int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{(x^2 + 2x + 1) \cdot (x+1)} dx; \\
& \int \frac{1}{(2-x)^2} \cdot \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} dx; & \int \sqrt{x} \cdot (6-x^2)^5 dx.
\end{aligned}$$

ВАРИАНТ № 13

$$\begin{array}{lll}
\int \left(\frac{2}{3-x^2} + \operatorname{ch}(x) \right) dx; & \int \frac{4}{\sqrt{9-(2x-1)^2}} dx & \int \frac{x^3}{x^8+1} dx; \\
\int \frac{x}{e^x} dx; & \int 2^{(-2x)} \sin(3x) dx; & \int \cos(3x) \cdot \cos(4x) dx; \\
\int \frac{1}{\sin(x) - \cos(x)} dx; & \int \operatorname{ctg}^2(5x+3) dx; & \int \cos^2(3x-1) dx; \\
\int \cos^3(x) \cdot \sin^4(x) dx; & \int \frac{1}{x^2+x+1} dx; & \int \frac{2x^3+x+1}{(x+4) \cdot (x+1)} dx; \\
\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2 \cdot (x+1)}} dx; & \int x^{\frac{3}{2}} \cdot (-6 + \sqrt{x})^2 dx. &
\end{array}$$

ВАРИАНТ № 14

$$\begin{array}{lll}
\int \left(\frac{1}{2\operatorname{sh}^2(x)} + 2\cos(x) - x^2 \right) dx; & \int \frac{2}{9-(3x-6)^2} dx; & \int \frac{\sin(\ln(x))}{x} dx; \\
\int x^3 \cdot e^{\frac{x}{3}} dx; & \int e^{-3x} \cos(4x) dx; & \int \cos(4x) \cdot \sin(3x) dx; \\
\int \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)} dx; & \int \operatorname{tg}^3(2x+1) dx; & \int \frac{1}{\cos^4(x) \cdot \sin^2(x)} dx; \\
\int \cos^4(2x) \cdot \sin(2x) dx; & \int \frac{1}{\sqrt{2x^2-x+2}} dx; & \int \frac{2x^3-x^2+1}{(x^2+2x+1) \cdot (x-1)^2} dx; \\
\int \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} dx; & \int \frac{(0.5-x^2)^5}{x} dx. &
\end{array}$$

ВАРИАНТ № 15

$$\begin{array}{lll}
\int \left(x^6 - 3x^2 + \frac{2}{4+x^2} \right) dx; & \int \cos\left(-\frac{x}{4}\right) dx; & \int \frac{1}{x \cdot \ln(x)} dx; \\
\int (x^2+2x) \cdot \cos(x) dx; & \int \sin^2\left(\frac{\ln(x-2)}{2}\right) dx; & \int \cos(8x) \cdot \cos(4x) dx; \\
\int \frac{\cos(x)}{1-\cos(x)} dx; & \int \operatorname{ctg}(-3x+6) dx; & \int (\sin^2(6x) - \cos(2x)) dx; \\
\int \cos^5(x) \cdot \sin^4(x) dx; & \int \frac{3}{\sqrt{x^2+3x+5}} dx; & \int \frac{2x^2+3x+1}{(x+4)^2 \cdot (x+1)} dx; \\
\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx; & \int x^{\frac{3}{2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 dx. &
\end{array}$$

ВАРИАНТ № 16

$$\begin{aligned}
& \int \left(\frac{2}{\cos^2(x)} + 3\operatorname{ch}(x) + 1 \right) dx; \quad \int \frac{7}{7x-10} dx; \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx; \\
& \int x \cdot (\operatorname{arctg}(x))^2 dx; \quad \int \cos^2 \left(\frac{\operatorname{Ln}(-2x)}{2} \right) dx; \quad \int \sin(-3x) \cdot \sin(-4x) dx; \\
& \int \frac{1}{2 + \sin(x) + 3 \cdot \cos(x)} dx; \quad \int \operatorname{tg}(-7x+4) dx; \quad \int \frac{\cos^2(x)}{\sin^4(x)} dx; \\
& \int \cos^4(2x) \cdot \sin^3(2x) dx; \quad \int \frac{2}{\sqrt{x^2-x-2}} dx; \quad \int \frac{x^2+16}{(x-6) \cdot (x+4) \cdot (x-3)} dx; \\
& \int \frac{1}{\sqrt{1-2x} - \sqrt[4]{1-2x}} dx; \quad \int x^{\frac{1}{2}} \cdot (1-6x)^{-\frac{3}{2}} dx.
\end{aligned}$$

ВАРИАНТ № 17

$$\begin{aligned}
& \int \left(\frac{2}{\sqrt{2-x^2}} + 4^x \right) dx; \quad \int (2x-5)^{10} dx; \quad \int \frac{\ln(x)}{x} dx; \\
& \int x^2 \cdot \operatorname{arctg}(3x) dx; \quad \int 8^{(2x-3)} \sin(2x+1) dx; \quad \int \sin(-3x) \cdot \sin(-4x) dx; \\
& \int \frac{1}{\sin(x) - 2 \cdot \cos(x)} dx; \quad \int \operatorname{ctg}^2(8x+15) dx; \quad \int \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) dx; \\
& \int \cos^2(x) \cdot \sin^5(x) dx; \quad \int \frac{3x-1}{3x^2+x+3} dx; \quad \int \frac{5x-5}{(x-7) \cdot (x+8)} dx; \\
& \int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^3 \cdot (x-2)}} dx; \quad \int \sqrt{x} \cdot \left(2 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^3 dx.
\end{aligned}$$

ВАРИАНТ № 18

$$\begin{aligned}
& \int \left(\frac{2}{\sqrt{x^2-8}} + 3x^6 + e^x \right) dx; \quad \int \cos(3x-2) dx; \quad \int \frac{x}{x^2+16} dx; \\
& \int x^3 \cdot e^{-x^2} dx; \quad \int e^{(6x+8)} \cos(8-6x) dx; \quad \int \cos(-3x) \cdot \cos(-4x) dx; \\
& \int \frac{\sin(x)+2}{\cos(x)+\sin(x)} dx; \quad \int \operatorname{tg}^2(-4x-15) dx; \quad \int \frac{\sin^2(x)}{\cos^4(x)} dx; \\
& \int \cos^2(2x) \cdot \sin^3(2x) dx; \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-x-6}} dx; \quad \int \frac{-x^3+2x^3+3x+1}{(x^2+3x-6) \cdot (x-7)^2} dx; \\
& \int \frac{1}{(1-x) \cdot \sqrt{1-x^2}} dx; \quad \int \sqrt{x} \cdot \left(-4 + \frac{7}{x} \right)^3 dx.
\end{aligned}$$

ВАРИАНТ № 19

$$\begin{aligned}
& \int \left(\frac{2}{ch^2(x)} + \frac{3}{\sqrt{x^2+3}} \right) dx; \quad \int e^{(2x+1)} dx; & \int \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx; \\
& \int x \cdot \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) dx; & \int \sin(\ln(4x)) dx; & \int \cos(5x) \cdot \sin(4x) dx; \\
& \int \frac{\cos(x)+1}{\cos(x)-\sin(x)} dx; & \int \frac{1}{tg^2(-2x-17)} dx; & \int \sin^2(8x) dx; \\
& \int \cos^4(x) \cdot \sin^5(x) dx; & \int \frac{3-x}{x^2+5x+6} dx; & \int \frac{x^3-x+3}{(x-7)^2 \cdot (x+8)} dx; \\
& \int \frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt{2x+1}} dx; & \int \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{x^2+1}} dx.
\end{aligned}$$

ВАРИАНТ № 20

$$\begin{aligned}
& \int \left(\frac{6}{\sin^2(x)} + 4\cos(x) - x^9 \right) dx; \quad \int \frac{-10}{36+(5x-4)^2} dx; & \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^6}} dx; \\
& \int \frac{\ln^2(x)}{x} dx; & \int \cos(\ln(2x)) dx; & \int \cos(4x) \cdot \sin(5x) dx; \\
& \int \frac{2 \cdot \sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx; & \int \frac{1}{ctg(-2x+9)} dx; & \int \frac{1}{\sin^4(x) \cdot \cos^4(x)} dx; \\
& \int \cos^6(x) \cdot \sin^5(x) dx; & \int \frac{1}{2x^2-x+2} dx; & \int \frac{2x^2+7x-1}{(x^2+3x-6) \cdot (x+8)} dx; \\
& \int \frac{1}{\sqrt{x+x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{5}{2}}}} dx; & \int x \cdot (x-2)^{\frac{5}{2}} dx.
\end{aligned}$$

ГЛАВА VI ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Цели

Иметь представление о:

- первообразной;
- определенном интеграле, его свойствах;
- геометрическом и физическом смысле определенного интеграла;
- методах вычисления определенного интеграла;
- несобственных интегралах, их свойствах и геометрическом смысле;
- геометрических и физических приложениях определенного интеграла;
- методах приближенного вычисления определенного интеграла.

Знать:

- определение определенного интеграла, формулу Ньютона–Лейбница;
- свойства определенного интеграла;
- теорему существования определенного интеграла;
- геометрический и физический смысл определенного интеграла;
- методы вычисления определенного интеграла;
- методы вычисления несобственного интеграла и его свойства;
- геометрический смысл несобственного интеграла;
- геометрические и физические приложения определенного интеграла;
- метод интегральных сумм;
- метод дифференциала;
- алгоритмы приближенного вычисления определенного интеграла.

Уметь:

Вычислять определенный, несобственный интеграл различных функций. Находить длину дуги, площадь плоской фигуры, объем тела, работу переменной силы, путь, пройденный телом, давление жидкости на вертикальную пластинку, статический момент и координату центра тяжести плоской кривой. Вычислять приближенно определенный интеграл по формуле треугольника, по формуле трапеции, по формуле парабол.

1. ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Рассмотрим непрерывную функцию $f(x)$ в плоскости Oxy

(см. рис. 1), определенную на отрезке $[a; b]$ и принимающую неотрицательные значения на заданном отрезке. Разобьем отрезок $[a; b]$ на n частичных отрезков, удовлетворяющих условию $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. В каждом частичном отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ выберем произвольную точку $c_i \in [x_i; x_{i+1}]$. В плоскости рассмотрим фигуру, ограниченную осью Ox , прямыми $x = a$, $x = b$ и линией $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, – криволинейную трапецию. Эта фигура состоит из прямоугольников с основанием $[x_i; x_{i+1}]$ и высотой $f(c_i)$. Площадь каждого прямоугольника равна $f(c_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$. Тогда площадь фигуры, состоящей из прямоугольников, равна $\sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$ – ин-

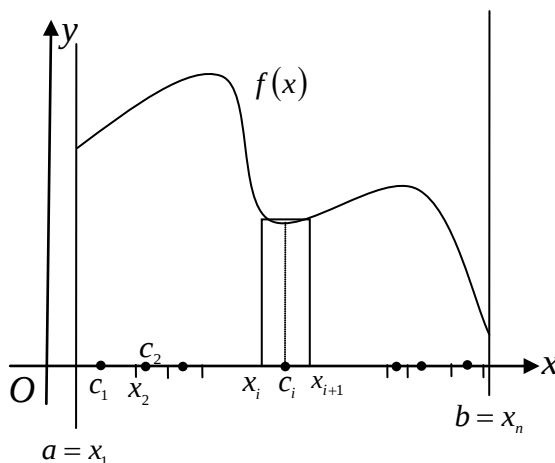


Рис. 1. Кривая $f(x)$ на плоскости

тегральная сумма функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Если интегральная сумма имеет предел, который не зависит от способа разбиения отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки и выбора точки в них, то данный предел называется определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$. Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot (x_{i+1} - x_i), \text{ где}$$

a – нижний предел интегрирования;

b – верхний предел интегрирования;

$f(x)$ – подынтегральная функция;

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение;

отрезок $[a; b]$ – область интегрирования.

Функция $y = f(x)$, для которой на отрезке $[a; b]$ существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, называется интегрируемой на этом отрезке.

Необходимое условие интегрируемости функции – условие ограниченности функции.

Теорема

Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Теорема существования определенного интеграла – теорема Коши

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то определен-

ный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует.

Теорема

Функция, монотонная на отрезке, интегрируема на этом отрезке.

Теорема

Функция, непрерывная на отрезке, интегрируема на этом отрезке.

Эти теоремы являются достаточным условием интегрируемости функции.

Теорема

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на отрезке $[a; b]$, кроме, возможно, конечного числа точек, и выполняется равенство $f(x) = g(x)$, то функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$ тогда и только тогда, когда на этом отрезке интегрируема функция $g(x)$, т. е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Функция, определенная на отрезке, называется кусочно-непрерывной на этом промежутке, если она непрерывна всюду на отрезке, кроме конечного числа точек, в которых имеет разрыв первого рода.

Теорема

Если функция кусочно-непрерывная на отрезке, то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла

Свойства определенного интеграла следуют из определения определенного интеграла.

1⁰. Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$.

$$2^0. \int_a^a f(x)dx = 0.$$

3⁰. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a; b]$, то для любых $\alpha, \beta \in R$ функция $\alpha \cdot f \pm \beta \cdot g$ также интегрируема на этом отрезке $\int_a^b [\alpha \cdot f(x) \pm \beta \cdot g(x)]dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)dx \pm \beta \cdot \int_a^b g(x)dx$.

4⁰. Определенный интеграл меняет знак при перестановке пределов интегрирования $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

5⁰. Если отрезок $[a; b]$ разбить точкой c на две части $[a; c]$ и $[c; b]$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

6⁰. Если функция $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a; b]$, где $a < b$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

7⁰. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и интегрируемы на отрезке $[a; b]$ и для всех $x \in [a; b]$ выполняется неравенство $f(x) \leq g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

8⁰. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$, то существует точка $c \in [a; b]$, такая, что $\int_a^b f(x)dx = (b-a) \cdot f(c)$.

9⁰. Если в точках M и N функция $y = f(x)$ принимает наибольшие и наименьшие значения на отрезке $[a; b]$, то $M \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq N \cdot (b-a)$.

10⁰. Модуль определенного интеграла не превосходит интеграла от модуля подынтегральной функции $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$, $a < b$.

11⁰. Производная определенного интеграла по переменному верхнему пределу равна подынтегральной функции, в которой переменная интегрирования заменена этим пределом $\left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x)$.

Определенный интеграл с переменным верхним пределом является одной из первообразных подынтегральной функции.

$f(x)$, $g(x)$ – непрерывные дифференцируемые функции на отрезке $[a; b]$.

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Геометрический смысл определенного интеграла – площадь криволинейной трапеции.

Физический смысл определенного интеграла – работа A переменной силы $\vec{F}$, величина которой есть непрерывная функция $F = F(x)$, действующая на отрезке $[a; b]$ и равная определенному интегралу от величины $F(x)$ силы, взятой по отрезку $[a; b]$.

$$A = \int_a^b F(x)dx.$$

Путь S – путь, пройденный точкой за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$. Он равен определенному интегралу от скорости $v(t)$.

$$S = \int_a^b v(t)dt.$$

Масса m неоднородного стержня на отрезке $[a; b]$ равна определен-

ному интегралу от плотности $\rho(x)$.

$$m = \int_a^b \rho(x) dx.$$

3. ФОРМУЛА НЬЮТОНА – ЛЕЙБНИЦА

Теорема

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $F(x)$ – первообразная этой функции на отрезке $[a; b]$ ($F'(x) = f(x)$), тогда справедлива формула $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Доказательство.

Рассмотрим отрезок $[a; b]$. Разобьем его точками x_i ($x_{i-1} < x_i$) на n частичных отрезков и в каждом из полученных интервалов возьмем точку $c_i \in (x_{i-1}; x_i)$ (см. рис. 2).

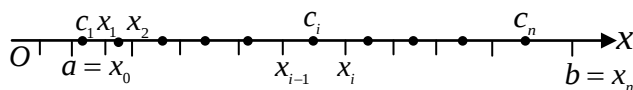


Рис. 2. Разбиение отрезка на интервалы

Рассмотрим тождество

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = (F(x_n) - F(x_{n-1})) + (F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})) + \dots + (F(x_2) - F(x_1)) + (F(x_1) - F(x_0)).$$

Разности в скобках преобразуем по формуле Логранжа $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$, тогда

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F'(c_n) \cdot (x_n - x_{n-1}) + F'(c_{n-1}) \cdot (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + F'(c_1) \cdot (x_1 - x_0) = \\ &= \sum_{i=1}^n F'(c_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i. \end{aligned}$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на нем. Следовательно, существует предел интегральной суммы, равный определенному интегралу от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, т. е.

$$F(b) - F(a) = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

Эта формула называется формулой Ньютона – Лейбница.

Формы записи определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b = \left(\int f(x) dx \right) \Big|_a^b.$$

Если $a > b$, то $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx = -(F(a) - F(b)) = F(b) - F(a)$, т. е.

формула Ньютона – Лейбница одинакова для случая $a > b$ и $a < b$.

ПРИМЕР. Вычислить определенный интеграл, используя формулу Ньютона – Лейбница $\int_2^7 (2x+1)dx$.

РЕШЕНИЕ:

Используя свойство 2 определенного интеграла, преобразовать исходный интеграл.

$$\begin{aligned}\int_2^7 (2x+1)dx &= \int_2^7 2xdx + \int_2^7 dx = 2 \cdot \int_2^7 xdx + \int_2^7 dx = 2 \cdot \left. \frac{x^2}{2} \right|_2^7 + x \Big|_2^7 = x^2 \Big|_2^7 + x \Big|_2^7 = \\ &= 7^2 - 2^2 + 7 - 2 = 50.\end{aligned}$$

ОТВЕТ: $\int_2^7 (2x+1)dx = 50$.

4. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Методы вычисления определенного интеграла аналогичны методам вычисления неопределенного интеграла, которые были рассмотрены в предыдущем разделе. Для вычисления определенного интеграла необходимо использовать один из методов вычисления неопределенного интеграла, а после применить формулу Ньютона – Лейбница.

Ниже приведены основные теоремы, которые необходимо знать и уметь применять при вычислении определенных интегралов.

Теорема

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$, и функция $\varphi(x)$ определена и непрерывно дифференцируема на отрезке с концами A и B , все значения функции $\varphi(x)$ принадлежат отрезку $[a; b]$ и выполняется соотношение $\varphi(A) = a$, $\varphi(B) = b$, то справедливо равенство $\int_a^b f(x)dx = \int_A^B f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$.

При вычислении определенного интеграла методом замены переменной необходимо менять пределы интегрирования после сделанной замены переменных.

ПРИМЕР.

Вычислить интеграл $\int_3^7 \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$.

РЕШЕНИЕ:

1. Сделаем замену переменной $\sqrt{x} = t$.
2. Пересчитаем пределы интегрирования. Если $x_1 = 3$, то $t_1 = \sqrt{3}$. Если $x_2 = 7$, то $t_2 = \sqrt{7}$.
3. Подставим новую переменную и вычисленные пределы интегрирования в исходный интеграл и вычислим его

$$\int_3^7 \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \rightarrow x = t^2 \\ d(x) = d(t^2) = 2tdt \\ x_1 = 3 \quad t_1 = \sqrt{3} \\ x_2 = 7 \quad t_2 = \sqrt{7} \end{array} \right\} = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{7}} \frac{2tdt}{t^2 + t} = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{7}} \frac{2dt}{t + 1} = 2 \cdot \ln|t + 1| \Big|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{7}} =$$

$$= 2 \cdot (\ln(\sqrt{7} + 1) - \ln(\sqrt{3} + 1)) \approx 0,577.$$

ОТВЕТ: $\int_3^7 \frac{dx}{x + \sqrt{x}} \approx 0,577.$

Теорема

Если функции u , v определены и непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a; b]$, то справедливо равенство

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx.$$

ПРИМЕР.

Вычислить интеграл $\int_0^{\pi} x \cdot \cos(3x) dx$.

РЕШЕНИЕ:

1. Пусть $u = x$, тогда $dv = \cos(3x) dx$.

2. Вычислить du , v : $du = dx$, $v = \frac{1}{3} \sin(3x)$.

3. Применить формулу интегрирования по частям

$$\int_0^{\pi} x \cdot \cos(3x) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x; \quad dv = \cos(3x) dx \\ du = dx; \quad v = \frac{1}{3} \sin(3x) \end{array} \right\} = x \cdot \frac{1}{3} \sin(3x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{3} \sin(3x) dx =$$

$$= \frac{x \cdot \sin(3x)}{3} \Big|_0^{\pi} + \frac{\cos(3x)}{9} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi \cdot \sin(3\pi) - 0 \cdot \sin(3 \cdot 0)}{3} + \frac{\cos(3\pi) - \cos(3 \cdot 0)}{9} = -\frac{2}{9}.$$

ОТВЕТ: $\int x \cdot \cos(3x) dx = -\frac{2}{9}.$

Интегрирование четных и нечетных функций

Теорема

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-a; a]$ и симметрична относительно точки $x = 0$, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \cdot \int_0^a f(x) dx, & \text{если } f(x) - \text{четная функция} \\ 0, & \text{если } f(x) - \text{нечетная функция} \end{cases}$$

Доказательство.

Разбить отрезок интегрирования $[-a; a]$ на части $[-a; 0]$ и $[0; a]$, тогда,

по свойству аддитивности, $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$.

Решить интеграл $\int_{-a}^0 f(x)dx$ методом подстановки $x = -t$.

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 f(x)dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = -t. \quad \text{Если } x = 0, \text{ то } t = 0 \\ dx = -dt. \text{ Если } x = -a, \text{ то } t = a \end{array} \right\} = \int_a^0 f(-t)d(-t) = -\int_a^0 f(-t)d(t) = \\ &= \int_0^a f(-t)d(t) = \left\{ \begin{array}{l} \text{по свойству интеграл не зависит от} \\ \text{обозначения переменной интегрирования} \end{array} \right\} = \int_a^0 f(-x)d(x). \end{aligned}$$

Подставить результат в исходный интеграл

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a (f(-x) + f(x))dx.$$

Если функция $f(x)$ четная, то $f(x) = f(-x)$, следовательно, $f(-x) + f(x) = 2f(x)$. Если функция $f(x)$ нечетная, то $f(x) = -f(-x)$, следовательно, $f(-x) + f(x) = f(-x) - f(-x) = 0$. Тогда

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 2 \cdot \int_0^a f(x)dx, & \text{если } f(x) - \text{четная функция} \\ 0, & \text{если } f(x) - \text{нечетная функция} \end{cases}.$$

ПРИМЕР.

Вычислить интеграл $\int_{-3}^3 (2x^2 + 4x^4)dx$.

РЕШЕНИЕ:

1. Функция $f(x) = 2x^2 + 4x^4$ симметрична относительно точки $x = 0$ и непрерывна на отрезке $[-3; 3]$.

2. Необходимо проверить подынтегральную функцию на четность-нечетность

$$f(x) = 2x^2 + 4x^4.$$

$f(-x) = 2(-x)^2 + 4(-x)^4 = 2(x)^2 + 4(x)^4$. Так как $f(x) = f(-x)$, то искомая функция является четной.

3. Вычислить интеграл

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 (2x^2 + 4x^4)dx &= 2 \cdot \int_0^3 (2x^2 + 4x^4)dx = 2 \cdot \int_0^3 2x^2 dx + 2 \cdot \int_0^3 4x^4 dx = 4 \cdot \int_0^3 x^2 dx + \\ &+ 8 \cdot \int_0^3 x^4 dx = 4 \cdot \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^3 + 8 \cdot \left. \frac{x^5}{5} \right|_0^3 = \frac{4}{3} \cdot 3^3 + \frac{8}{5} \cdot 3^5 = 424,8. \end{aligned}$$

ОТВЕТ: $\int_{-3}^3 (2x^2 + 4x^4)dx = 424,8$.

ПРИМЕР.

Вычислить интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} 2x^3 + \sin(x) dx$.

РЕШЕНИЕ:

1. Функция $f(x) = 2x^3 + \sin(x)$ симметрична относительно точки $x = 0$ и непрерывна на отрезке $[-\pi; \pi]$.

2. Необходимо проверить подынтегральную функцию на четность-нечетность

$$f(x) = 2x^3 + \sin(x).$$

$f(-x) = 2(-x)^3 + \sin(-x) = -2x^3 - \sin(x) = -f(x)$. Так как $f(x) = -f(-x)$, то искомая функция является нечетной.

3. Вычислить интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} 2x^3 + \sin(x) dx = 0$$

$$\text{ОТВЕТ: } \int_{-\pi}^{\pi} 2x^3 + \sin(x) dx = 0.$$

5. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$, где промежуток интегрирования $[a; b]$ является конечным, а подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, называется также собственным интегралом.

Несобственным интегралом является определенный интеграл от непрерывной функции с бесконечным промежутком интегрирования или с конечным промежутком интегрирования, но от функции, имеющей на нем бесконечный разрыв.

Существует несобственный интеграл I рода (интеграл с бесконечным промежутком интегрирования) и несобственный интеграл II рода (интеграл от разрывной функции).

Несобственный интеграл первого рода

Если функция $f(x)$ определена на промежутке $[a; \infty)$ и для любого $M > a$ интегрируема на отрезке $[a, M]$, то функция $f(x)$ локально интегрируема на промежутке $[a; \infty)$.

Рассмотрим функцию $f(x)$, непрерывную на промежутке $[a; \infty)$.

Если для функции $f(x)$ существует конечный предел $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$, то такой конечный предел называется несобственным интегралом первого рода и говорят, что он сходится. Если предел не существует или бесконечен, то интеграл расходится.

Обозначение несобственного интеграла: $\int_a^{\infty} f(x)dx$.

Аналогично определяется несобственный интеграл функции на промежутке $(-\infty; b]$.

Свойства несобственного интеграла первого рода

1⁰. Если сходится несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$, то для любого $b > a$ сходится несобственный интеграл $\int_b^{\infty} f(x)dx$ и справедливо равенство

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{\infty} f(x)dx.$$

2⁰. Если функция $f(x)$ определена и локально интегрируема на промежутке $[a; \infty)$, для некоторого $b > a$ и сходится несобственный интеграл $\int_b^{\infty} f(x)dx$, то сходится и несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$.

3⁰. Если сходятся несобственные интегралы $\int_a^{\infty} f(x)dx$, $\int_a^{\infty} g(x)dx$, то для любых $\alpha, \beta \in R$ сходится несобственный интеграл $\int_a^{\infty} [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)]dx$ и справедливо равенство

$$\int_a^{\infty} [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)]dx = \alpha \cdot \int_a^{\infty} f(x)dx + \beta \cdot \int_a^{\infty} g(x)dx.$$

4⁰. Если для всех $x \in [a; \infty)$ выполняется неравенство $f(x) \leq g(x)$ и несобственные интегралы $\int_a^{\infty} f(x)dx$, $\int_a^{\infty} g(x)dx$ сходятся, то $\int_a^{\infty} f(x)dx \leq \int_a^{\infty} g(x)dx$.

5⁰. Если функции $f(x)$, $g(x)$ положительные и локально интегрируемы на промежутке $[a; \infty)$ и существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} > 0$, то несобственные интегралы $\int_a^{\infty} f(x)dx$, $\int_a^{\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

6⁰. Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами определяется по формуле:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx,$$

где c — произвольное число.

Интеграл слева будет сходиться тогда, когда будут сходиться интегралы справа.

Признаки сходимости неопределенных интегралов.

Теорема. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла

Если функция $f(x)$ определена и локально интегрируема на промежутке $[a; \infty)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N > a$, что для

любых $M_1, M_2 \geq N$ выполняется неравенство $\left| \int_{M_1}^{M_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$, то не-

собственный интеграл $\int_a^\infty f(x) dx$ сходится.

Теорема

Если на промежутке $[a; \infty)$ непрерывные функции удовлетворяют условию $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^\infty \varphi(x) dx$ следует

сходимость интеграла $\int_a^\infty f(x) dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^\infty f(x) dx$

следует расходимость интеграла $\int_a^\infty \varphi(x) dx$.

Геометрическим смыслом несобственного сходящегося интеграла первого рода $\int_a^\infty f(x) dx$, непрерывной на промежутке $[a; \infty)$ функции $f(x) \geq 0$ является площадь бесконечно длинной криволинейной трапеции.

ПРИМЕР.

Вычислить несобственный интеграл $\int_{-\infty}^0 x^4 dx$ или установить его сходимость, расходимость.

РЕШЕНИЕ:

$$\int_{-\infty}^0 x^4 dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 x^4 dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left. \frac{x^5}{5} \right|_a^0 = \frac{0^5 - \lim_{a \rightarrow -\infty} a^5}{5}.$$

Интеграл расходится, так как при $a \rightarrow -\infty$ предел $\lim_{a \rightarrow -\infty} a^5$ расходится.

ОТВЕТ: Интеграл $\int_{-\infty}^0 x^4 dx$ расходится.

ПРИМЕР.

Вычислить несобственный интеграл $\int_2^\infty \frac{1}{x^4} dx$ или установить его сходимость, расходимость.

РЕШЕНИЕ:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^4} dx = \int_2^\infty x^{-4} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b x^{-4} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{-3}}{-3} \right|_2^b = -\frac{1}{3} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} \Big|_2^b = -\frac{1}{3} \cdot \left(0 - \frac{1}{2^3} \right) = \frac{1}{24}.$$

ОТВЕТ: Интеграл $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^4} dx = \frac{1}{24}$ сходится.

Несобственный интеграл второго рода

Рассмотрим функцию $f(x)$, непрерывную на промежутке $[a; b)$ и терпящую бесконечный разрыв при $x = b$. Если существует конечный предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$, то его называют несобственным интегралом второго рода и обозначают $\int_a^b f(x) dx$.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

Если предел правой части существует, то несобственный интеграл сходится. Если предел правой части не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл расходится.

Аналогично, если функция $\varphi(x)$ непрерывна на промежутке $(a; b]$ и в точке $x = a$ имеет бесконечный разрыв, то

$$\int_a^b \kappa(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b \varphi(x) dx.$$

Если функция $f(x)$ имеет разрыв во внутренней точке отрезка $[a; b]$, то несобственный интеграл вычисляется по формуле

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Интеграл слева является сходящимся, если сходятся оба интеграла справа.

Признаки сходимости несобственных интегралов второго рода.

Теорема. Признак сравнения

Если функции $f(x)$, $g(x)$ определены на промежутке $(a; b]$ и интегрируемы на отрезке $[a + \lambda; b]$ для любого λ , удовлетворяющего условию $0 < \lambda < b - a$, и обе функции принимают неотрицательные значения, для любого $x \in (a; b]$ выполняется неравенство $f(x) \leq g(x)$, то

1) если несобственный интеграл $\int_a^b g(x) dx$ сходится, то несобственный

интеграл $\int_a^b f(x) dx$ также сходится;

2) если несобственный интеграл $\int_a^b g(x) dx$ расходится, то несобствен-

ный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ также расходится.

Теорема. Признак сравнения в предельной форме

Если функции $f(x)$, $g(x)$ определены на промежутке $(a; b]$ и интегрируемы на отрезке $[a + \lambda; b]$ для любого λ , удовлетворяющего условию $0 < \lambda < b - a$, и обе функции принимают на промежутке $(a; b]$ положительные значения и существует предел $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} > 0$, то

несобственные интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Теорема. Критерий сходимости Коши

Если функция $f(x)$ определена на промежутке $(a; b]$ и интегрируема на отрезке $[a + \lambda; b]$ для любого λ , удовлетворяющего условию

$0 < \lambda < b - a$, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится тогда, когда

выполняется условие: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое δ , $0 < \delta < b - a$, что для любых λ_1, λ_2 , удовлетворяющих условию

$0 < \lambda_1 < \delta, 0 < \lambda_2 < \delta$, выполняется неравенство $\left| \int_{a+\lambda_1}^{a+\lambda_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$.

Геометрическим смыслом несобственного интеграла второго рода $\int_a^b f(x)dx$, функции $f(x) > 0$ является площадь бесконечно высокой криволинейной трапеции.

ПРИМЕР.

Вычислить интеграл $\int_2^3 \frac{1}{(x-2)^3} dx$ и определить, сходится он или расходится.

РЕШЕНИЕ:

1. Необходимо определить точки разрыва функции $\frac{1}{(x-2)^3}$.

Функция имеет разрыв в точке, в которой знаменатель равен нулю, т. е. $(x-2)^3 = 0$ или $x = 2$ – точка разрыва.

2. Необходимо вычислить интеграл функции

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{1}{(x-2)^3} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 2} \int_{2+\varepsilon}^3 (x-2)^{-3} d(x-2) = -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} \Big|_{2+\varepsilon}^3 = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{(3-2)^2} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 2} \frac{1}{(\varepsilon-2)^2} \right) = \infty. \end{aligned}$$

Интеграл расходится.

ОТВЕТ: Интеграл $\int_2^3 \frac{1}{(x-2)^3} dx$ расходится.

6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Рассмотрим нахождение значения физической или геометрической величины A на отрезке $[a; b]$. Величина задана непрерывной неотрицательной функцией $f(x)$ на данном отрезке, где x – переменная величина. Величина A аддитивна.

Величину A можно найти двумя способами: методом интегральных сумм и методом дифференциала.

Суть метода интегральных сумм

1. Точками x_i , $i = \overline{1; n}$ разбивается отрезок $[a; b]$ на n частей (см. рис. 1). Тогда величина A разбивается на n слагаемых ΔA_i , $i = \overline{1; n}$: $A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \dots + \Delta A_n$.

2. Каждое ΔA_i можно вычислить в произвольной точке c_i , принадлежащей разбитым отрезкам. $\Delta A_i \approx f(c_i) \Delta x_i$. Тогда

$$A \approx f(c_1) \Delta x_1 + f(c_2) \Delta x_2 + \dots + f(c_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

3. Вычисление величины A по определению предела функции $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$.

Суть метода дифференциала

1. На отрезке $[a; b]$ выбирается произвольное значение x и рассматривается произвольный отрезок $[a; x]$. На данном отрезке величина A является функцией, зависящей от переменной x , т. е. $A = A(x)$.

2. При изменении x на Δx вычисляем дифференциал dA . $dA = f(x) dx$.

3. Так как $dA \approx \Delta A$ при $\Delta x \rightarrow 0$, то $A(b) = A = \int_a^b f(x) dx$.

Вычисление длины дуги и площади плоской фигуры

Площади плоских фигур.

Из геометрического смысла определенного интеграла следует: *площадь криволинейной трапеции*, расположенной «выше» оси абсцисс ($f(x) \geq 0$) (см. рис. 3) и ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, вычисляется

по формуле $S_1 = \int_a^b f(x) dx$. Если функция $g(x) < 0$, то $S_2 = -\int_a^b g(x) dx$. Объединим эти формулы,:

$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

При вычислении площади плоской фигуры сложной формы необходимо фигуру разбить на более простые прямыми линиями, параллельными оси Oy . Решение задачи можно разделить на несколько этапов.

Первый этап – в системе координат xOy построить кривые, данные по условию задачи. Определить область определения фигуры, площадь которой необходимо вычислить.

Второй этап – разбить сложную фигуру на более простые линиями, параллельными оси Oy или Ox .

Третий этап – вычислить площадь полученной фигуры (определенный интеграл).

В декартовой системе координат построим две функции (см. рис. 4) $f(x)$ и $g(x)$. Функции, ограниченные осью Ox , прямыми $x = a$, $x = b$. Функции определены и непрерывны на отрезке $[a; b]$, для любого x выполняется неравенство $g(x) \leq f(x)$. Вычислим площадь полученной фигуры.

Первый этап.

Нанесем на чертеж все линии, данные по условию задачи: $f(x)$, $g(x)$, $x = a$, $x = b$, ось Ox (см. рис. 4). Диагональной штриховкой выделена фигура, ограниченная линиями: $g(x)$, $x = a$, $x = b$, осью Ox (фигура $ABCD$). Линией «в квадрат» выделена фигура, ограниченная линиями: $f(x)$, $x = a$, $x = b$, осью Ox (фигура $AEFD$). Область определения фигуры, площадь которой необходимо вычислить, – область определения фигуры $BEFC$.

Второй этап.

Фигуру $BEFC$ можно представить как разность фигур $AEFD$ и $ABCD$.

Третий этап.

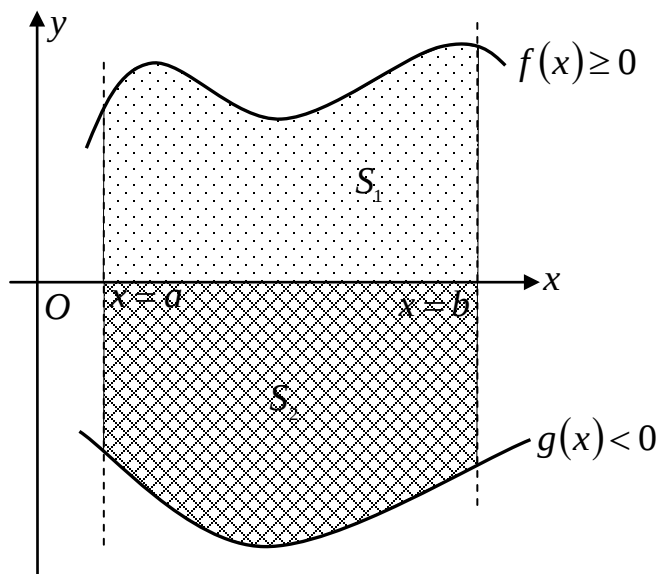


Рис. 3. Криволинейные трапеции, расположенные в I и IV координатных осях

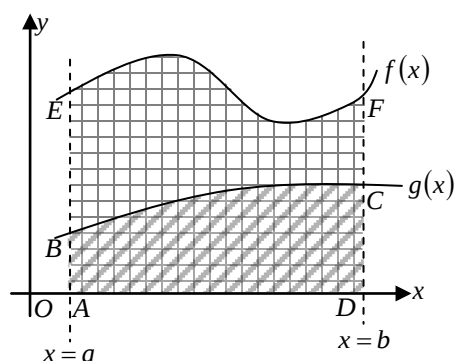


Рис. 4. Плоская фигура сложной формы

Площадь фигуры $BEFC$ равна разности площадей двух криволинейных трапеций $AEFD$ и $ABCD$, т. е. $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$.

Если криволинейная трапеция ограничена непрерывной кривой $x = f(y) \geq 0$, прямыми $y = c$, $y = d$, осью Oy (см. рис. 5), то площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле $S = \int_c^d x dy$.

Если криволинейная трапеция ограничена кривой, заданной параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t \in [\alpha; \beta]$, прямыми $x = a$, $x = b$, осью Ox , то площадь фигуры вычисляется по формуле $S = \left| \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t) dt \right|$, где α , β вычисляются из равенства $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$.

В полярной системе координат площадь криволинейного сектора (см. рис. 6), ограниченного непрерывной линией $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$), где r и φ полярные координаты, вычисляется методом дифференциала

$$S = \frac{1}{2} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

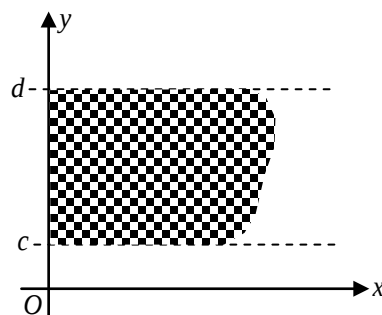


Рис. 5. Криволинейная трапеция, расположенная в I координатной четверти

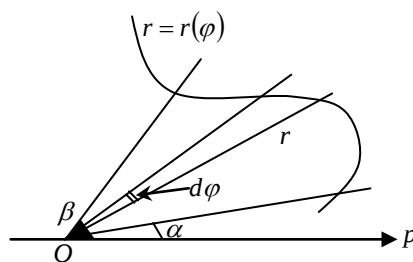


Рис. 6. Площадь криволинейного сектора в полярной системе координат

ПРИМЕР.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 5x^2$, $y = 40 \cdot x$, $x = 1$, $x = 5$ (см. рис. 7).

РЕШЕНИЕ:

1. В системе координат xOy построим графики функций, данные по условию задачи (см. рис. 7). На полученном чертеже определим область определения фигуры, площадь которой необходимо вычислить, – область определения фигуры $KBCD$.

2. Фигуру $KBCD$ можно представить как разность фигур $ABCM$ и $AKDM$.

3. Вычислим площадь фигуры $KBCD$:

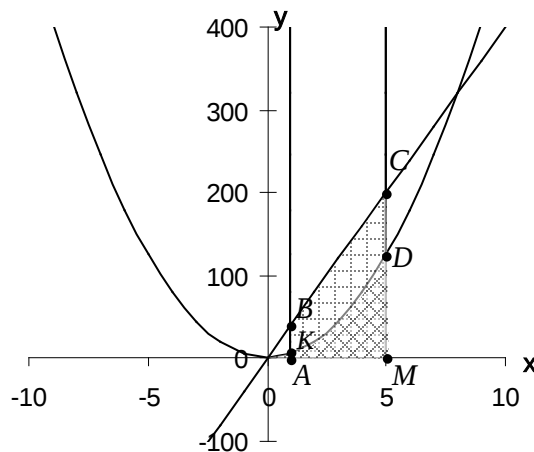


Рис. 7. Плоская фигура

$$S_{ABCM} = \int_1^5 40x dx = 40 \cdot \int_1^5 x dx = 40 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^5 = 20 \cdot x^2 \Big|_1^5 = 20 \cdot (5^2 - 1^2) = 580 \text{ кв. ед.}$$

$$S_{AKDM} = \int_1^5 5x^2 dx = 5 \cdot \int_1^5 x^2 dx = 5 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_1^5 = \frac{5}{3} \cdot x^3 \Big|_1^5 = \frac{5}{3} \cdot (5^3 - 1^3) = \frac{620}{3} \text{ кв. ед.}$$

$$S_{KBCD} = S_{ABCM} - S_{AKDM} = 580 - \frac{620}{3} = \frac{1120}{3} \approx 373,3 \text{ кв. ед.}$$

ОТВЕТ: Площадь плоской фигуры равна 373,3 кв. ед.

Длина дуги плоской кривой

Под длиной дуги подразумевается предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда число звеньев ломаной неограниченно возрастает, а длина наибольшего звена ее стремится к нулю.

В прямоугольной системе координат дана плоская кривая AB (см. рис. 8), уравнение которой $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Если функция $y = f(x)$ и ее производная $y' = f'(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, то длина кривой AB вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (*)$$

Если уравнение кривой AB задано в параметрической форме $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \leq t \leq \beta$, где

$x(t)$ и $y(t)$ – непрерывные функции с непрерывными производными $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, то длина l кривой AB вычисляется по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

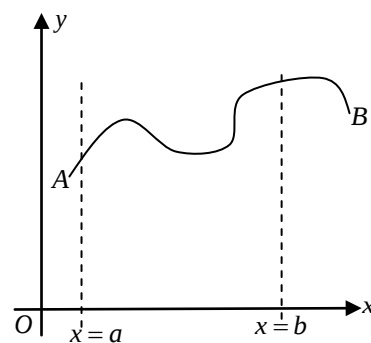


Рис. 8. Плоская кривая в декартовой системе координат

Если уравнение кривой AB задано в полярной системе координат $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ и функция $r(\varphi)$ и ее производная $r'(\varphi)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, то

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi.$$

ПРИМЕР.

Вычислить длину дуги плоской кривой $y = 7 - x$ на отрезке $[-3; 15]$.

РЕШЕНИЕ:

Длина дуги кривой вычисляется по формуле (*).

1. Необходимо вычислить производную исходной функции $y' = (7 - x)' = -1$.

2. Из условий задачи следует $a = -3$, $b = 15$.

3. Подставить производную исходной функции и пределы интегрирования в формулу (*) и вычислить длину дуги плоской кривой

$$l = \int_{-3}^{15} \sqrt{1 + (-1)^2} dx = \int_{-3}^{15} \sqrt{1 + 1} dx = \sqrt{2} \cdot \int_{-3}^{15} dx = \sqrt{2} \cdot x \Big|_{-3}^{15} = \sqrt{2} \cdot (15 - (-3)) \approx 25,9 \text{ ед.}$$

ОТВЕТ: Длина плоской кривой $y = 7 - x$ на отрезке $[-3; 15]$ приблизительно равна 25,9 ед.

Объем тела.

Объем тела V по известным площадям S параллельных поперечных сечений, перпендикулярных некоторой оси, например оси Ox , $a < x < b$ вычисляется по формуле $V = \int_a^b S(x) dx$.

ПРИМЕР.

Вычислить объем тела, образованного вращением косинусоиды $y = \cos(x)$ $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ вокруг оси Ox .

РЕШЕНИЕ:

1. Необходимо построить график, на котором будет изображен объем тела, необходимый вычислить (см. рис. 9).

2. Сечением тела является круг радиусом $r = \cos(x)$ и площадью $S = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \cos^2(x)$.

3. Вычислим объем полученного тела

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} S(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \cdot \cos^2(x) dx = \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx = \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \left(x + \frac{\sin(2x)}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(\pi)}{2} \right) = \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \text{ куб. ед.} \end{aligned}$$

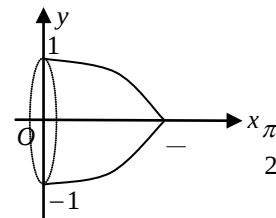


Рис. 9. Объем тела, образованный вращением косинусоиды вокруг оси Ox

ОТВЕТ: Объем тела, образованного вращением косинусоиды вокруг оси Ox , равен $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ куб. ед.

Площадь поверхности вращения

Площадь S поверхности, образованной вращением кривой $y = f(x) \geq 0$, производная $y' = f'(x)$ которой непрерывна на отрезке $x \in [a; b]$, вычисляется по формуле $S = 2\pi \cdot \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$.

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, то площадь поверхности вращения вычисляется по формуле: $S = 2\pi \cdot \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$.

Механическое приложение определенного интеграла

Работа переменной силы

Работа, произведенная переменной силой $F(x)$ при перемещении материальной точки из положения $x = a$ в положение $x = b$, $a < b$, вычисляется по формуле $A = \int_a^b F(x) dx$.

Путь, пройденный телом

Путь, пройденный материальной точкой, перемещающейся по прямой с переменной скоростью $v = v(t)$ за промежуток времени от t_1 до t_2 , вычисляется по формуле $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$.

Давление жидкости на вертикальную пластинку

Давление жидкости на вертикальную пластинку, ограниченную линиями $x = a$, $x = b$, $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, вычисляется по формуле $P = \rho \cdot g \cdot \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) \cdot x dx$, где ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения.

Статический момент и координата центра тяжести плоской кривой

Статическим моментом S_x системы материальных точек относительно оси Ox называется сумма произведений масс этих точек на их координаты, т. е. $S_x = \sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i$, где m_i – масса материальных точек, y_i – расстояние от материальной точки до оси Ox .

Статический момент системы относительно оси Oy вычисляется по формуле $S_y = \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i$.

Статический момент S_x кривой относительно оси Ox вычисляется по формуле $S_x = \int_a^b dS_x = \rho \cdot \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$.

Статический момент S_y кривой относительно оси Oy вычисляется по формуле $S_y = \rho \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$.

Центром тяжести материальной плоской кривой $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ называется точка плоскости, в которой если сосредоточить всю массу m заданной кривой, то статический момент этой точки относительно любой координатной оси будет равен статическому моменту всей кривой $y = f(x)$ относительно той же оси. Если $C(x_c; y_c)$ – центр тяжести кривой, то его координаты вычисляются по формулам:

$$x_c = \frac{\int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx}, \quad y_c = \frac{\int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx}.$$

Статический момент и координата центра тяжести плоской фигуры

Статический момент материальной плоской фигуры, ограниченной кривой $y = f(x) \geq 0$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$ с постоянной поверхностной плотностью ρ относительно осей Ox , Oy , вычисляется по формулам

$$S_x = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \int_a^b y^2 dx \text{ и } S_y = \rho \cdot \int_a^b xy dx \text{ соответственно.}$$

Координаты центра тяжести плоской фигуры вычисляются по формулам:

$$x_c = \frac{\int_a^b xy dx}{\int_a^b y dx}, \quad y_c = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int_a^b y^2 dx}{\int_a^b y dx}.$$

7. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

При решении определенного интеграла бывают случаи, когда первообразную функции нельзя выразить через элементарные функции или сложно найти. Используют приближенные формулы, которые позволяют вычислить определенный интеграл с любой степенью точности.

7.1. Формула прямоугольников

Вычислим определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, используя формулу прямоугольников для непрерывной функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a; b]$, где $a < b$.

Геометрическим смыслом определенного интеграла является площадь криволинейной трапеции. Разобьем основание криволинейной трапеции $[a; b]$ на n равных частей (см. рис. 10) с шагом $h = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$. Или

если $a = x_0, \dots, b = x_n$, то $x_i = x_0 + h \cdot i$, где $i = \overline{1; n}$. Середину каждого отрезка можно вычислить по формуле

$c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$, а соответствующая ордината будет равна $\hat{y}_i = f(c_i)$. Тогда

площадь любого прямоугольника можно вычислить по формуле $h \cdot \hat{y}_i$. Если просуммировать площади всех

прямоугольников, то получится площадь ступенчатой фигуры, приближенно равной площади криволинейной трапеции.

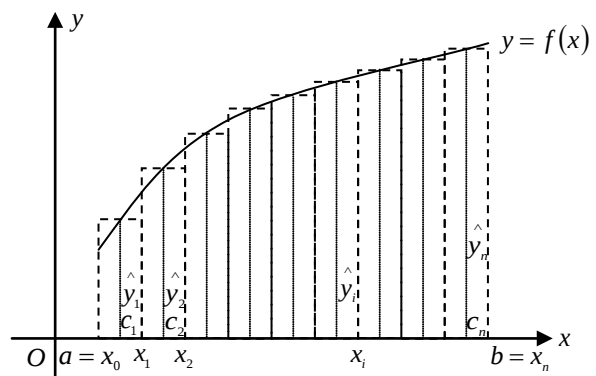


Рис. 10. График функции $y=f(x)$, «разбитый» на прямоугольники

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \left(\hat{y}_1 + \hat{y}_2 + \dots + \hat{y}_n \right) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right). \quad (**)$$

Формула называется формулой средних прямоугольников. Чем больше n , тем точнее будет вычислен определенный интеграл.

Абсолютная погрешность вычисляется по формуле $|R_n| = \left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \right|$, $|R_n| \leq \frac{(b-a)^3 \cdot M_2}{24n^2}$, где M_2 – наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[a; b]$.

Алгоритм вычисления определенного интеграла по формуле прямоугольников:

1. Записать функцию $f(x)$, значения концов отрезка интегрирования (a, b) и на сколько частей разбит отрезок интегрирования (n) из условий задачи.

2. Вычислить шаг разбиения отрезка интегрирования – $h = \frac{b-a}{n}$.

3. Вычислить значения $x_i = x_0 + h \cdot i$.

4. Для каждой пары значений x_i, x_{i-1} вычислить значение функции $f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$.
5. Полученные значения функции подставить в формулу (**) и вычислить данный определенный интеграл.
6. Записать ответ.

7.2. Формула трапеций

Вывод формулы трапеции аналогичен выводу формулы прямоугольников. Только в данном случае в криволинейную трапецию вписывается не множество прямоугольников, а множество трапеций, одна из сторон которых совпадает с осью абсцисс.

Вычислим определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, используя формулу трапеции для непрерывной функции $f(x)$ (см. рис. 11), заданной на отрезке $[a; b]$, где $a < b$.

Геометрическим смыслом определенного интеграла является площадь криволинейной трапеции. Разобьем основание криволинейной трапеции $[a; b]$ на n равных частей (см. рис. 11) с шагом $h = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$. Каждому значению $x_i = x_0 + h \cdot i = a + h \cdot i$ соответствует значение ординаты $y_i = f(x_i)$, где $i = \overline{1; n}$. Точки пересечения кривой $y = f(x)$ и $y = x_i$ соединим прямыми линиями. Тогда получится, в график исходной линии вписано множество трапеций. Вычислив их сумму, найдем исходный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2} \cdot h + \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot h + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \cdot h;$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right). \quad (***)$$

Эта формула называется формулой трапеции. Чем больше n , тем точнее будет вычислен определенный интеграл.

Абсолютная погрешность оценивается по формуле $|R_n| \leq \frac{(b-a)^3 \cdot M_2}{14n^2}$, где M_2 – максимальное значение $|f''(x)|$ на отрезке $[a; b]$.

Алгоритм вычисления определенного интеграла по формуле трапеции:

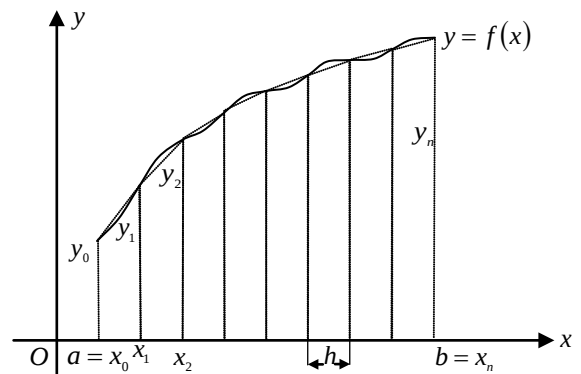


Рис. 11. График функции $y=f(x)$, «разбитый» на трапеции

1. Записать функцию $f(x)$, значения концов отрезка интегрирования (a, b) и на сколько частей разбит отрезок интегрирования (n) из условий задачи.

2. Вычислить шаг разбиения отрезка интегрирования – $h = \frac{b-a}{n}$.

3. Вычислить значения $x_i = x_0 + h \cdot i$.

4. Для каждого значения x_i вычислить соответствующее значение $y_i(x_i)$.

5. Полученные значения функции подставить в формулу (***) и вычислить данный определенный интеграл.

6. Записать ответ.

7.3. Формула парабол (Симпсона)

Еще один метод, позволяющий приближенно вычислить значение определенного интеграла, – формула Симпсона.

Вычислим определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, используя формулу трапеции для непрерывной функции $f(x)$ (см. рис. 12), заданной на отрезке $[a; b]$, где $a < b$.

Разобьем отрезок $[a; b]$ на $2n$ равных частей (см. рис. 12) длиной

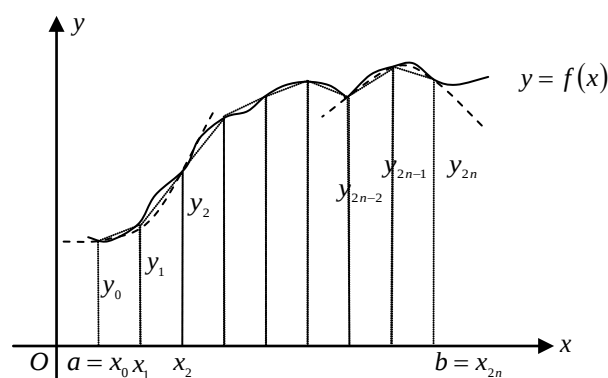


Рис. 12. График функции $y=f(x)$

$h = \frac{b-a}{2n}$ точками $x_i = x_0 + i \cdot h$, где $i = \overline{0; 2n}$. Для каждой абсциссы x_i необходимо вычислить соответствующую ее ординату $y_i = f(x_i)$. Заменим каждую пару трапеций на одну параболическую трапецию с основанием $2h$. Площадь параболической трапеции можно вычислить по формуле

$$S_n = \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx = \frac{h}{3} \cdot (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Сложив сумму всех параболических трапеций, вычислим искомый определенный интеграл:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \cdot ((y_0 + y_{2n}) + 4 \cdot (y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2 \cdot (y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2})) \quad (****)$$

или

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n} \cdot ((y_0 + y_{2n}) + 4 \cdot (y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2 \cdot (y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2})).$$

Эта формула называется формулой Симпсона. Абсолютная погрешность оценивается по формуле $|R_n| \leq \frac{(b-a)^5 \cdot M_4}{180 \cdot (2n)^4}$, где M_4 – максимальное значение $|f^{(4)}(x)|$ на отрезке $[a; b]$.

Алгоритм вычисления определенного интеграла по формуле Симпсона:

1. Записать функцию $f(x)$, значения концов отрезка интегрирования (a, b) и на сколько частей разбит отрезок интегрирования (n) из условий задачи.

2. Вычислить шаг разбиения отрезка интегрирования – $h = \frac{b-a}{n}$.

3. Вычислить значения $x_i = x_0 + h \cdot i$.

4. Для каждого значения x_i вычислить соответствующее значение $y_i(x_i)$.

5. Полученные значения функции подставить в формулу (****) и вычислить данный определенный интеграл.

6. Записать ответ.

ПРИМЕР.

Вычислить определенный интеграл $\int_1^6 (2x+1)dx$, разбив отрезок интегрирования на четыре части: по формуле прямоугольников, по формуле трапеции и по формуле Симпсона.

РЕШЕНИЕ:

Вычислим определенный интеграл, используя формулу Ньютона – Лейбница.

$$\int_1^6 (2x+1)dx = x^2 \Big|_1^6 + x \Big|_1^6 = 6^2 - 1^2 + 6 - 1 = 40.$$

По формуле прямоугольников:

1. Записать функцию $f(x)$, значения концов отрезка интегрирования и на сколько частей разбит отрезок интегрирования из условий задачи.

$$f(x) = 2x + 1, \quad a = 1, \quad b = 6 \quad n = 4.$$

2. Вычислить шаг разбиения отрезка интегрирования – $h = \frac{6-1}{4} = \frac{5}{4}$.

3. Вычислить значения $x_i = x_0 + h \cdot i$;

$$x_0 = 1, x_1 = 1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}, x_2 = 1 + \frac{5}{4} \cdot 2 = \frac{14}{4}, x_3 = 1 + \frac{5}{4} \cdot 3 = \frac{19}{4}, x_4 = 1 + \frac{5}{4} \cdot 4 = 6.$$

4. Для каждой пары значений x_i, x_{i-1} вычислить значение функции

$$f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \text{ в полученной точке;}$$

$$f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) = f\left(\frac{1 + \frac{9}{4}}{2}\right) = f(1,625) = 2 \cdot 1,625 + 1 = 4,25;$$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = f\left(\frac{\frac{9}{4} + \frac{14}{4}}{2}\right) = f(2,875) = 2 \cdot 2,875 + 1 = 6,75;$$

$$f\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) = f\left(\frac{\frac{14}{4} + \frac{19}{4}}{2}\right) = f(4,125) = 2 \cdot 4,125 + 1 = 9,25;$$

$$f\left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right) = f\left(\frac{\frac{19}{4} + 6}{2}\right) = f(5,375) = 2 \cdot 5,375 + 1 = 11,75.$$

5. Полученные значения функции подставить в формулу (**) и вычислить данный определенный интеграл.

$$\int_1^6 f(2x+1)dx \approx \frac{6-1}{4} \cdot (4,25 + 6,75 + 9,25 + 11,75) = 40.$$

Определенный интеграл $\int_1^6 (2x+1)dx$, вычисленный приближенно по формуле прямоугольников, равен 40.

По формуле трапеции.

Пункты 1–3 совпадают в алгоритмах вычисления определенного интеграла по формуле прямоугольника и трапеции. Так как данные пункты выполнены в предыдущих вычислениях, то начнем решение с пункта 4.

4. Для каждого значения x_i вычислим соответствующее значение

$$y_i(x_i);$$

$$y_0(x_0) = y_0(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3;$$

$$y_1(x_1) = y_1\left(\frac{9}{4}\right) = 2 \cdot \frac{9}{4} + 1 = 5,5;$$

$$y_2(x_2) = y_2\left(\frac{14}{4}\right) = 2 \cdot \frac{14}{4} + 1 = 8;$$

$$y_3(x_3) = y_3\left(\frac{19}{4}\right) = 2 \cdot \frac{19}{4} + 1 = 10,5;$$

$$y_4(x_4) = y_4(6) = 2 \cdot 6 + 1 = 13.$$

5. Полученные значения функции подставим в формулу (***) и вычислим данный определенный интеграл

$$\int_1^6 (2x+1)dx \approx \frac{6-1}{4} \cdot \left(\frac{3+13}{2} + 5.5 + 8 + 10.5 \right) = 40.$$

Определенный интеграл $\int_1^6 f(2x+1)dx$, вычисленный по формуле трапеции, равен 40.

Правило Симпсона.

Пункты 1–4 совпадают в алгоритмах вычисления определенного интеграла по формуле трапеции и Симпсона. Так как данные пункты выполнены в предыдущих вычислениях, то начнем решение с пункта 5.

5. Полученные значения функции подставить в формулу (****) и вычислить данный определенный интеграл.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{5}{4 \cdot 3} \cdot ((3+13) + 4 \cdot (5.5 + 10.5) + 2 \cdot (8)) = \frac{5}{12} \cdot 96 = 40.$$

Определенный интеграл $\int_1^6 f(2x+1)dx$, вычисленный по правилу Симпсона, равен 40.

ОТВЕТ: Определенный интеграл $\int_1^6 (2x+1)dx$, у которого отрезок интегрирования разделен на четыре части, вычисленный: по формуле прямоугольников, равен 40, по формуле трапеции, равен 40, по формуле Симпсона, равен 40 и по формуле Ньютона – Лейбница, равен 40.

8. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ ПО ГЛАВЕ «ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ»

1. Дать определение определенного интеграла, первообразной.
2. Дать определение интегрируемой функции.
3. Дать формулировку теорем необходимого и достаточного условия интегрируемости функции.
4. Перечислить свойства определенного интеграла.
5. Рассказать, в чем заключается геометрический и физический смысл определенного интеграла.
6. Записать формулу Ньютона – Лейбница и доказать ее.
7. Рассказать алгоритм вычисления определенного интеграла методом непосредственного интегрирования.
8. Рассказать алгоритм вычисления определенного интеграла методом замены переменных.

9. Рассказать алгоритм интегрирования четных и нечетных функций.
10. Дать определение несобственного интеграла.
11. Дать определения несобственного интеграла первого и второго рода.
12. Дать определение локально интегрируемой функции на промежутке.
13. Перечислить свойства несобственного интеграла первого рода.
14. Дать формулировку признаков сходимости неопределенных интегралов первого и второго рода.
15. Рассказать геометрический смысл несобственного интеграла первого и второго рода.
16. Дать формулировку признака сравнения в предельной форме.
17. Рассказать метод интегральных сумм и метод дифференциала.
18. Рассказать алгоритм вычисления дуги, площади плоской фигуры, объема тела, площади поверхности вращения.
19. Рассказать алгоритм вычисления работы переменной силы, пути, пройденного телом, давления жидкости на вертикальную пластинку, статического момента и координаты центра тяжести плоской кривой, статического момента и координаты центра тяжести плоской фигуры.
20. Рассказать алгоритм приближенного вычисления определенного интеграла по формуле прямоугольников.
21. Рассказать алгоритм приближенного вычисления определенного интеграла по формуле трапеции.
22. Рассказать алгоритм приближенного вычисления определенного интеграла по формуле Симпсона.

9. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЯ ПО ГЛАВЕ «ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ»

По теме «Вычисление определенного интеграла», используя различные методы интегрирования, рекомендуется взять студентам любые семь интегралов из варианта по главе «Определенный интеграл», подставив любой несимметричный отрезок интегрирования из интервала $x \in (-\infty; \infty)$. А также решить задания из варианта, приведенные ниже.

ВАРИАНТ № 1

1. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{\infty} 5^{3x} dx$ или установить его расхожимость.

2. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln(\sin(8x))$ на отрезке $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 1 + x^2$, $y = x + 1$.

4. Вычислить приближенно интеграл $\int_1^5 \left(\frac{7x}{x^2 - 2x + 7}\right) dx$, разбив отрезок интегрирования на четыре части, по формуле прямоугольников, по формуле трапеции, по формуле парабол.

ВАРИАНТ № 2

1. Вычислить несобственный интеграл $\int_2^9 \frac{dx}{7x - 14}$ или установить его расходимость.

2. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln(3x)$ на отрезке $x \in [1; 14]$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3 + 1$, $y = 7x$.

4. Вычислить приближенно интеграл $\int_2^{12} (x^2 - 2x) dx$, разбив отрезок интегрирования на пять частей, по формуле прямоугольников, по формуле трапеции, по формуле парабол.

ВАРИАНТ № 3

1. Вычислить несобственный интеграл $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\cos^2(2x)}$ или установить его расходимость.

2. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln(\cos(-8x + \pi))$ на отрезке $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x^2 + 4$, $y = 15x$.

4. Вычислить приближенно интеграл $\int_4^{24} \frac{7x^2}{3x - 1} dx$, разбив отрезок интегрирования на пять частей, по формуле прямоугольников, по формуле трапеции, по формуле парабол.

ВАРИАНТ № 4

1. Вычислить несобственный интеграл $\int_5^{12} \frac{dx}{(x-5)^2}$ или установить его расходимость.
2. Вычислить длину дуги кривой $y = 70x - 100$ на отрезке $x \in [0; 3]$.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 15 - 5x^2$, $y = 3x - 7$.
4. Вычислить приближенно интеграл $\int_{11}^{15} (2x+1)^3 dx$, разбив отрезок интегрирования на четыре части, по формуле прямоугольников, по формуле трапеции, по формуле парабол.

ВАРИАНТ № 5

1. Вычислить несобственный интеграл $\int_1^{\infty} \frac{1}{5x^2 + 7} dx$ или установить его расходимость.
2. Вычислить длину дуги кривой $y = 5 + \ln(4x - 1)$ на отрезке $x \in [1; 14]$.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2$, $y = 6x + 1$.
4. Вычислить приближенно интеграл $\int_4^7 2^{(5x+x^3)} dx$, разбив отрезок интегрирования на три части, по формуле прямоугольников, по формуле трапеции, по формуле парабол.

ВАРИАНТ № 6

1. Вычислить несобственный интеграл $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$ или установить его расходимость.
2. Вычислить длину дуги кривой $y = x^2 + 3x + 5$ на отрезке $x \in [3; 5]$.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2$, $y = -5x^2 + 15$.
4. Вычислить приближенно интеграл $\int_2^{10} e^{(7x-2x^2)} dx$, разбив отрезок интегрирования на четыре части, по формуле прямоугольников, по формуле трапеции, по формуле парабол.

ВАРИАНТ № 7

1. Вычислить несобственный интеграл $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\sin^2(3x+1)}$ или установить его расходимость.
2. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln(\cos(8x))$ на отрезке $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 50 - x^2$, $y = x^3 + 1$, $x = 0$.
4. Вычислить приближенно интеграл $\int_{-3}^7 \frac{1}{\sqrt{800 - (4x)^2}} dx$, разбив отрезок интегрирования на пять частей, по формуле прямоугольников, по формуле трапеции, по формуле парабол.

ВАРИАНТ № 8

1. Вычислить несобственный интеграл $\int_3^9 \frac{dx}{(x-3) \cdot (x+5)}$ или установить его расходимость.
2. Вычислить длину дуги кривой $y = (2x+1)^2$ на отрезке $x \in [-15; 10]$.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 50 - x^2$, $y = x^2 + 2x$.
4. Вычислить приближенно интеграл $\int_4^{20} \frac{3x}{\sqrt{9 + (4x)^2}} dx$, разбив отрезок интегрирования на четыре части, по формуле прямоугольников, по формуле трапеции, по формуле парабол.

ВАРИАНТ № 9

1. Вычислить несобственный интеграл $\int_2^{\infty} \frac{3}{6x^2 - 3x + 7} dx$ или установить его расходимость.
2. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln(\sin(-8x + \pi))$ на отрезке $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 50 - x^2$, $y = 10x$.

4. Вычислить приближенно интеграл $\int_6^{30} \frac{x^3}{9+2x^2} dx$, разбив отрезок интегрирования на четыре части, по формуле прямоугольников, по формуле трапеции, по формуле парабол.

ВАРИАНТ № 10

1. Вычислить несобственный интеграл $\int_{\frac{1}{3}}^{10} \frac{dx}{\ln(3x)}$ или установить его расходимость.

2. Вычислить длину дуги кривой $y = 2x + 1$ на отрезке $x \in [10; 20]$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 50 - x^2$, $y = x^2 + 3$.

4. Вычислить приближенно интеграл $\int_1^{10} \frac{x}{9-2x^2} dx$, разбив отрезок интегрирования на три части, по формуле прямоугольников, по формуле трапеции, по формуле парабол.

ВАРИАНТ № 11

1. Вычислить несобственный интеграл $\int_{-\infty}^4 \frac{dx}{\sqrt{5-(x+7)^2}}$ или установить его расходимость.

2. Вычислить длину дуги кривой $y = 9 + \ln(x-5)$ на отрезке $x \in [2; 19]$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2^x - 1$, $y = 10 \cdot x^2$.

4. Вычислить приближенно интеграл $\int_3^5 \frac{x^3}{(x^2-2x+4)} dx$, разбив отрезок интегрирования на четыре части, по формуле прямоугольников, по формуле трапеции, по формуле парабол.

ВАРИАНТ № 12

1. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^7 \frac{1}{x^2} dx$ или установить его расходимость.

2. Вычислить длину дуги кривой $y = 15 - \ln(\sin(\pi - 8x))$ на отрезке $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2^x + 3$, $y = 7x^2 + 3x$.

4. Вычислить приближенно интеграл $\int_{-1}^9 \frac{2x^2 - x}{(x^2 + 2x + 4)} dx$, разбив отрезок интегрирования на пять частей, по формуле прямоугольников, по формуле трапеции, по формуле парабол.

ВАРИАНТ № 13

1. Вычислить несобственный интеграл $\int_2^{\infty} e^{7x-3} dx$ или установить его расходимость.

2. Вычислить длину дуги кривой $y = 15x + 1$ на отрезке $x \in [0; 9]$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2^x + 4$, $y = 10x$.

4. Вычислить приближенно интеграл $\int_0^6 \frac{x^3 + 5}{(-x^2 - 6x + 4)} dx$, разбив отрезок интегрирования на три части, по формуле прямоугольников, по формуле трапеции, по формуле парабол.

ВАРИАНТ № 14

1. Вычислить несобственный интеграл $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{50}{4}} \frac{dx}{16x^2 - 9}$ или установить его расходимость.

2. Вычислить длину дуги кривой $y = 15 - \ln(\cos(3\pi - 8x))$ на отрезке $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2^x + 4$, $y = 60 - x^2$.

4. Вычислить приближенно интеграл $\int_{10}^{14} \frac{7 - x}{(2x^2 + 5x + 4)} dx$, разбив отрезок интегрирования на четыре части, по формуле прямоугольников, по формуле трапеции, по формуле парабол.

ВАРИАНТ № 15

1. Вычислить несобственный интеграл $\int_{-\infty}^7 \frac{dx}{\sqrt{5 + (2x + 1)^2}}$ или установить его расходимость.

2. Вычислить длину дуги кривой $y = x^2 - 15x + 9$ на отрезке $x \in [9; 1]$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2^x + 4$, $y = 10x$.

4. Вычислить приближенно интеграл $\int_1^{16} \frac{x+1}{(-x^2-6x+4)} dx$, разбив отрезок интегрирования на пять частей, по формуле прямоугольников, по формуле трапеции, по формуле парабол.

ВАРИАНТ № 16

1. Вычислить несобственный интеграл $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} \ln(\sin x) dx$ или установить его расходимость.

2. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln(\cos(6x))$ на отрезке $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 60 - x^2$, $y = 2^x$.

4. Вычислить приближенно интеграл $\int_2^{12} \frac{x+2}{(2x^2+5x+4)} dx$, разбив отрезок интегрирования на пять частей, по формуле прямоугольников, по формуле трапеции, по формуле парабол.

ВАРИАНТ № 17

1. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{\infty} 2x \cdot \cos(x) dx$ или установить его расходимость.

2. Вычислить длину дуги кривой $y = -8x + 19$ на отрезке $x \in [0; 1]$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2^x$, $y = 6x + 1$.

4. Вычислить приближенно интеграл $\int_1^5 \frac{1}{ch^2(2x)} dx$, разбив отрезок интегрирования на четыре части, по формуле прямоугольников, по формуле трапеции, по формуле парабол.

ВАРИАНТ № 18

1. Вычислить несобственный интеграл $\int_7^{20} \frac{1}{\sqrt{(x-4) \cdot (x-7)}} dx$ или установить его расходимость.
2. Вычислить длину дуги кривой $y = 9 - 2\ln(\cos(-3x + \pi))$ на отрезке $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2^x$, $y = x^2 - 80$, $x = 5$.
4. Вычислить приближенно интеграл $\int_2^7 \frac{1}{sh^2(2x)} dx$, разбив отрезок интегрирования на пять частей, по формуле прямоугольников, по формуле трапеции, по формуле парабол.

ВАРИАНТ № 19

1. Вычислить несобственный интеграл $\int_{-\infty}^5 \frac{dx}{5 - (x+7)^2}$ или установить его расходимость.
2. Вычислить длину дуги кривой $y = (x-7) \cdot (2x+9)$ на отрезке $x \in [-15; 0]$.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 6x + 1$, $y = 2^x$.
4. Вычислить приближенно интеграл $\int_1^4 \frac{x^3}{2x^2 + 7} dx$, разбив отрезок интегрирования на три части, по формуле прямоугольников, по формуле трапеции, по формуле парабол.

ВАРИАНТ № 20

1. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{\infty} x^2 \sin(3x) dx$ или установить его расходимость.
2. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln(\cos(3\pi - 2x))$ на отрезке $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 25 - 3x$, $x = 0$, $y = 2^x$.

4. Вычислить приближенно интеграл $\int_2^{17} \frac{7x + 15 - x^2}{2x^3 - 16} dx$, разбив отрезок интегрирования на пять частей, по формуле прямоугольников, по формуле трапеции, по формуле парабол.

ВАРИАНТ № 21

1. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{11} \frac{1}{e^{3x} - 1} dx$ или установить его расходимость.

2. Вычислить длину дуги кривой $y = 2x + 1$ на отрезке $x \in [10; 20]$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 7 + x$, $y = 1,5^x$.

4. Вычислить приближенно интеграл $\int_{-1}^5 \frac{1}{ch(2x+1)} dx$, разбив отрезок интегрирования на три части, по формуле прямоугольников, по формуле трапеции, по формуле парабол.

ВАРИАНТ № 22

1. Вычислить несобственный интеграл $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{7 - (2x + 3)^2}$ или установить его расходимость.

2. Вычислить длину дуги кривой $y = 16 + 5\ln(\sin(4x + 5\pi))$ на отрезке $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 5x - 2$, $y = 8 - x^2$, $y = 1,5^x$.

4. Вычислить приближенно интеграл $\int_1^5 \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 7}} dx$, разбив отрезок интегрирования на четыре части, по формуле прямоугольников, по формуле трапеции, по формуле парабол.

ВАРИАНТ № 23

1. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{\infty} x \cdot \ln(3x) dx$ или установить его расходимость.

2. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln(2x - 19)$ на отрезке $x \in [1; 7]$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 15x$, $y = x^2 + 2x$.

4. Вычислить приближенно интеграл $\int_1^9 \frac{e^x}{3x-1} dx$, разбив отрезок интегрирования на четыре части, по формуле прямоугольников, по формуле трапеции, по формуле парабол.

ВАРИАНТ № 24

1. Вычислить несобственный интеграл $\int_2^9 \frac{dx}{\ln(-5x+10)}$ или установить его расходимость.

2. Вычислить длину дуги кривой $y = 5 + 3\ln(\cos(x - 4\pi))$ на отрезке $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 15 - x^2$, $y = x^2 + 2x$.

4. Вычислить приближенно интеграл $\int_{-7}^5 \frac{4^x}{4x^2 + 5} dx$, разбив отрезок интегрирования на три части, по формуле прямоугольников, по формуле трапеции, по формуле парабол.

ВАРИАНТ № 25

1. Вычислить несобственный интеграл $\int_{-\infty}^5 \frac{dx}{sh^2(7-x)}$ или установить его расходимость.

2. Вычислить длину дуги кривой $y = -9x + 14$ на отрезке $x \in [0; 9]$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 15 - x^2$, $y = x^2 + 2x$.

4. Вычислить приближенно интеграл $\int_1^{11} \frac{x-5}{(-8x^4+15)} dx$, разбив отрезок интегрирования на пять частей, по формуле прямоугольников, по формуле трапеции, по формуле парабол.

ВАРИАНТ № 26

1. Вычислить несобственный интеграл $\int_{-\infty}^5 \frac{dx}{(7x^2 - x + 5)}$ или установить его расходимость.

2. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln(\sin(\pi + 4x))$ на отрезке $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4x + 10$, $y = x^2 + 2x$.

4. Вычислить приближенно интеграл $\int_1^{11} \left(\frac{5x+7}{x^3} \right) dx$, разбив отрезок интегрирования на пять частей, по формуле прямоугольников, по формуле трапеции, по формуле парабол.

ВАРИАНТ № 27

1. Вычислить несобственный интеграл $\int_1^{\infty} e^{2x} \cos(4x) dx$ или установить его расходимость.

2. Вычислить длину дуги кривой $y = (x-5) \cdot (2x+1)$ на отрезке $x \in [-15; 10]$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4x + 10$, $x = 3$, $y = x^2 + 2x$, $y = 15 - x^2$.

4. Вычислить приближенно интеграл $\int_1^5 \left(\frac{3x^4 - 5}{x^2 - 1} \right) dx$, разбив отрезок интегрирования на четыре части, по формуле прямоугольников, по формуле трапеции, по формуле парабол.

ВАРИАНТ № 28

1. Вычислить несобственный интеграл $\int_{-15}^2 \frac{x}{x^2 - 4} dx$ или установить его расходимость.

2. Вычислить длину дуги кривой $y = 8 - 3\ln(-6x + 2)$ на отрезке $x \in [2; 19]$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2x$, $y = 10 - x^2$.

4. Вычислить приближенно интеграл $\int_1^9 \frac{3x-9}{x^3+15} dx$, разбив отрезок интегрирования на четыре части, по формуле прямоугольников, по формуле трапеции, по формуле парабол.

ВАРИАНТ № 29

1. Вычислить несобственный интеграл $\int_{-\infty}^3 \frac{dx}{ch^2(3x-4)}$ или установить его расходимость.

2. Вычислить длину дуги кривой $y = (x-7)^2$ на отрезке $x \in [-15; 0]$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2x$, $y = 10x$.

4. Вычислить приближенно интеграл $\int_1^2 \frac{(x+2)^2}{x^5 - 6x} dx$, разбив отрезок интегрирования на пять частей, по формуле прямоугольников, по формуле трапеции, по формуле парабол.

ВАРИАНТ № 30

1. Вычислить несобственный интеграл $\int_1^9 \frac{7x}{\sqrt{(x-5) \cdot (x-9)}} dx$ или установить его расходимость.

2. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln(5x + 1)$ на отрезке $x \in [1; 7]$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -10x$, $y = x^2 - 20$, $y = 0$.

4. Вычислить приближенно интеграл $\int_1^{15} \left(\frac{9x + x^5}{7x - 1} \right) dx$, разбив отрезок интегрирования на семь частей, по формуле прямоугольников, по формуле трапеции, по формуле парабол.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для студентов втузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – Ч. 1. – М. : Оникс, 2008. – 816 с. : ил.
2. Демидович, Б. П. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Г. С. Бараненков, Б. П. Демидович, В. А. Ефименко и др. ; под ред. Б. П. Демидовича. – М. : Астрель, 2008. – 495 с. : ил.
3. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике. I курс : с контрольными работами / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. – 9-е изд., испр. – М. : Айрис-пресс, 2008. – 576 с. : ил.
4. Минорский, В. П. Сборник задач по высшей математике : учеб. пособие для вузов / В. П. Минорский. – М. : изд-во физико-математической литературы, 2006. – 336 с.
5. Письменный, Д. Т. Тридцать пять лекций : в 2 ч. – Ч. 1 / Д. Т. Письменный. – 9-е изд., испр. – М. : Айрис-пресс, 2008. – 288 с. : ил.
6. <http://novsu.ru/file/21443>.
7. <http://persona-center.ru/2009/03/26/hnnlncg-snibc-inlsyinyousn-ubpbsya-u-uyoei-nu-nin.html>..
8. <http://primmat.ru/>

Учебное издание

ЛАЗАРЕВА Валентина Георгиевна

МАТЕМАТИКА. ЧАСТЬ I

Учебно-методическое пособие

Верстка О. А. Надточий

Корректор М. Ф. Шатохина



Подписано в печать 02.07.2012. Бумага «Inasoria».
Гарнитура «Times New Roman». Формат 60x84¹/₈.
Тираж 500 экз. Объем 36 усл. п. л. Заказ № 1070-11.

Издательство Сахалинского государственного университета
693008, Южно-Сахалинск, ул. Ленина, 290, каб. 32.
Тел (4242) 45-23-16, факс (4242) 45-23-17.
E-mail: polygraph@sakhgu.sakhalin.ru