Сахалинский государственный университет

М. С. АДАМЧУК

МАТЕМАТИКА

ЧАСТЬ I

Учебно-методическое пособие
для студентов нематематических специальностей

Южно-Сахалинск
2010

УДК 512(075,8)
ББК 22.143я73
А 28

*Печатается по решению учебно-методического совета
Сахалинского государственного университета, 2010 г.*

А 28 Адамчук, М. С. Математика. Часть I: учебно-методическое пособие для студентов нематематических специальностей / М. С. Адамчук. – Южно-Сахалинск: СахГУ, 2010. – 72 с.

ISBN 978-5-88811-320-2

Учебно-методическое пособие по курсу математики охватывает вопросы высшей алгебры, входящие в ГОС для студентов специальностей «социология», «государственное и муниципальное управление» и других нематематических специальностей.

Пособие предназначено для организации индивидуальной и самостоятельной работы студентов очной и заочной форм обучения. Теоретический материал изложен справочно, без строгих доказательств; кроме того, приведены некоторые исторические сведения о возникновении основных понятий по рассмотренным темам. В пособии имеется большое количество решенных задач с подробным объяснением, оно содержит тренировочный тест с ответами, а также десять вариантов индивидуальных заданий для самостоятельной работы студентов.

Рецензенты:
А. Б. Никитина, канд. пед. наук, доцент кафедры математики СахГУ;
О. Н. Лихачева, канд. физ.-мат. наук, зам. директора ИМГиГ ДВО РАН.

УДК 512(075,8)
ББК 22.143я73

Учебное издание

Маргарита Станиславовна АДАМЧУК

МАТЕМАТИКА
Часть I

*Учебно-методическое пособие для студентов
нематематических специальностей*

Корректор В. А. Яковлева. **Верстка** Т. Ф. Филипенко

Подписано в печать 24.11.2010. Бумага «Gold».
Гарнитура «Times New Roman». Формат 60x84 1/8.
Тираж 500 экз. Объем 9 усл. п. л. Заказ № 1020-10

Издательство Сахалинского государственного университета
693008, Южно-Сахалинск, ул. Ленина, 290, каб. 32
Тел. (4242) 45-23-16, факс (4242) 45-23-17
E-mail: polygraph@sakhgu.sakhalin.ru

9 785888 113202

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебно-методическое пособие по курсу математики охватывает вопросы высшей алгебры, входящие в ГОС для студентов специальностей «социология», «государственное и муниципальное управление» и других нематематических специальностей. Здесь рассматриваются элементы теории множеств, вводятся понятие алгебраических операций и их свойства, дается понятие об алгебраических структурах, о поле комплексных чисел, а также рассматриваются основные вопросы линейной алгебры.

Учебно-методическое пособие составлено в соответствии с требованиями государственного образовательного стандарта ВПО Российской Федерации. В настоящее время наблюдается активный процесс математизации всех наук. Студенты большинства вузовских нематематических специальностей изучают дисциплину «математика» в течение трех или четырех семестров. При этом большое внимание уделяется организации самостоятельной работы студентов.

Учебно-методическое пособие «Математика, часть I» предназначено для организации индивидуальной и самостоятельной работы студентов очной и заочной форм обучения. Теоретический материал изложен справочно: даны строгие определения всех основных понятий, а также формулировки теорем, без строгих доказательств, но с необходимыми пояснениями. Кроме того, приведены некоторые исторические сведения о возникновении основных понятий по рассмотренным темам. В пособии имеется большое количество решенных задач с подробным объяснением, что поможет студентам самостоятельно изучить материал и научиться решать задачи по изложенным темам.

Пособие содержит тренировочный тест с ответами, а также десять вариантов индивидуальных заданий для самостоятельной работы студентов.

1. МНОЖЕСТВА И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

1.1. Элементы теории множеств

В математике встречаются самые разнообразные множества: множество точек на прямой, множество граней многогранника, множество натуральных чисел и т. д. Понятие «множество» настолько общее, что ему трудно дать какое-либо определение. Множество – это одно из первичных, неопределяемых понятий в математике. Под *множеством* понимают любую совокупность объектов, называемых *элементами* множества. Множества обозначают обычно прописными буквами латинского алфавита, а их элементы – строчными буквами. Так, буквами ***N*, *Z*, *Q*, *R*** обозначаются соответственно множества *натуральных* чисел, множество всех *целых* чисел, множество *рациональных* чисел и множество *действительных* (*вещественных*) чисел. Утверждение «элемент a принадлежит множеству A» символически записывается так: $a \in A$; запись $a \notin A$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A. Множество считают заданным, если о любом объекте можно сказать, принадлежит он этому множеству или не принадлежит. Множество называется *конечным*, если количество его элементов можно выразить каким-то определенным числом. В противном случае множество называется *бесконечным*. Конечное множество можно задать, перечислив все его элементы. Например, $A = \{a, b, c, d\}$ – множество, состоящее из элементов a, b, c, d. Другой способ задания множества – указание *характеристического* свойства его элементов, то есть свойства, которым обладают все элементы этого множества, и только они. Если $M(x)$ – характеристическое свойство элементов множества A, то записывают так: $A = \{x\colon M(x)\}$ или $A = \{x | M(x)\}$. Например, множество $A = \{a | a \in \boldsymbol{N}, 1 \le a \le 6\}$ состоит из натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6; а множество $B = \{b | b \in \boldsymbol{R}, -2 < b \le 3\}$ – из всех действительных чисел, принадлежащих полуинтервалу $(-2; 3]$.

Множество A называется *подмножеством* множества B, если все элементы множества A являются элементами множества B. Это свойство записывается как *операция включения*: $A \subset B$. Если известно, что $A \subset B$ и $B \subset A$, то, значит, множества A и B равны: $A = B$. Другими словами, множества A и B равны, если они состоят из одних и тех же элементов.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым множеством* и обозначается символом $\varnothing$. Любое множество содержит $\varnothing$ в качестве подмножества. Подмножества некоторого множества, отличные от него самого и пустого множества, называются *собственными подмножествами*.

Для символической записи структурного строения и описания качественных свойств множеств часто используются логические кванторы всеобщности и существования. Вместо выражения «любой элемент x множества» применяют запись $\forall x$, где $\forall$ – перевернутая первая буква английского слова «All» или немецкого «Alle» – «все». Вместо выражения «существует элемент x множества» применяют запись $\exists x$, где $\exists$ – перевернутая первая буква латинского слова «Existere» или английского «Exist» – «существовать».

Пусть A и B – произвольные множества. *Объединением* $A \bigcup B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B. Аналогично определяется объединение любого (конечного или бесконечного) числа множеств: если A_α – произвольные множества, то их объединение $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ есть совокупность элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A_α. *Пересечением* $A \bigcap B$ множеств *A* и *B* называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих как множеству *A*, так и множеству *B*. Пересечением любого (конечного или бесконечного) числа множеств A_α называется совокупность $\bigcap\limits_\alpha A_\alpha$ элементов, принадлежащих каждому из множеств A_α. Два множества, пересечение которых есть пустое множество, называются непересекающимися. Ясно, что $A \bigcup A = A,\ A \bigcap A = A,\ A \bigcup \varnothing = A,\ A \bigcap \varnothing = \varnothing$.

Операции объединения и пересечения множеств по самому своему определению коммутативны и ассоциативны, а также они взаимно дистрибутивны. То есть справедливы следующие равенства:

$$A \bigcup B = B \bigcup A, \quad (A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C);$$
$$A \bigcap B = B \bigcap A, \quad (A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C);$$
$$(A \bigcup B) \bigcap C = (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C);$$
$$(A \bigcap B) \bigcup C = (A \bigcup C) \bigcap (B \bigcup C).$$

Разностью A\B множеств *A* и *B* называется множество, состоящее из всех элементов множества *A*, не принадлежащих множеству *B*. Другими словами, разность множеств *A* и *B* состоит из тех элементов множества *A*, которые не принадлежат пересечению этих множеств: $A \setminus B = A \setminus (A \bigcap B)$. Для любых множеств *A*, *B*, *C* справедливы следующие равенства, связывающие операции объединения, пересечения и разности: $A \setminus (B \bigcap C) = (A \setminus B) \bigcup (A \setminus C),\ A \setminus (B \bigcup C) = (A \setminus B) \bigcap (A \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.

Иногда удобно рассматривать так называемую *симметрическую разность* двух множеств *A* и *B*: $A \Delta B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$.

Пример 1. Даны множества: A = {3, 5, 6, 7, 8, 9}, B = {2, 4, 5, 6, 8}.

Найти: $A \cup B,\ A \cap B$, A\B, B\A.

Решение. $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},\ A \cap B = \{5, 6, 8\}$, A\B = {3, 7, 9}, B\A = {2, 4}.

Пусть *A* и *B* – произвольные множества. Пару (*a*, *b*) элементов $a \in A, b \in B$, взятых в данном порядке, будем называть *упорядоченной парой*, считая при этом, что $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$. *Декартовым произведением* $A \times B$ двух множеств *A* и *B* называется множество всех упорядоченных пар (*a*, *b*), то есть $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$. Аналогичным образом можно ввести понятие декартова произведения трех, четырех и более множеств: если A_α – произвольные множества, то их декартово произведение состоит из упорядоченных наборов элементов этих множеств, т. е. $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) | a_\alpha \in A_\alpha\}$. При $A_1 = A_2 = \ldots = A_k = A$ говорят о *k*-й декартовой степени множества *A* и пишут сокращенно $A^k = A \times A \times \ldots \times A$. Например, декартов квадрат множества действительных чисел $\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ – это множество всех упорядоченных пар действительных чисел (или множество координат точек на плоскости относительно заданных координатных осей).

Пример 2. *Даны множества: A = {3, 5, 7}, B = {2, 8}*. Найти декартовы произведения $A \times B$ и $B \times A$.

Решение. Каждое декартово произведение будет содержать $3 \cdot 2 = 6$ пар соответствующих элементов. Заметим, что множества $A \times B$ и $B \times A$ различны:

$A \times B = \{(3, 2), (3, 8), (5, 2), (5, 8), (7, 2), (7, 8)\}$;

$B \times A = \{(2, 3), (2, 5), (2, 7), (8, 3), (8, 5), (8, 7)\}$.

Пусть A и B – произвольные непустые множества. Если каждому элементу a множества A поставлен в соответствие один элемент b множества B, то говорят, что задано *отображение* f множества A во множество B (пишут: $f : A \to B$). Элемент b при этом называют *образом* элемента a при отображении f и обозначают $b = f(a)$. Элемент a множества A, такой, что $f(a) = b$, называется *прообразом* элемента b при отображении f.

Если $f(A)=B$, то есть множество образов всех элементов a множества A совпадает с множеством B, то говорят, что f – отображение *A на B*, или *сюръективное* отображение. Другими словами, отображение f сюръективно, если каждый элемент b из B имеет прообраз. Если из $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$, то f называют *инъективным* отображением (инъекцией) или *отображением A в B*. При инъективном отображении каждый элемент b из B имеет не более одного прообраза. Отображение $f : A \to B$ называется *биективным* или *взаимно однозначным*, если оно инъективно и сюръективно. Таким образом, $f : A \to B$ – биективное отображение, если: а) каждому элементу $a \in A$ соответствует один и только один элемент $b \in B$; б) каждый элемент $b \in B$ соответствует одному и только одному элементу $a \in A$.

Отсюда следует, что если $f : A \to B$ биективно, то существует *обратное* отображение $f^{-1} : B \to A$, сопоставляющее каждому $b \in B$ его единственный прообраз, причем оно тоже биективно.

Два множества A и B называются *эквивалентными,* или *равномощными*, если одно из них можно биективно отобразить на другое. Другими словами, два множества равномощны, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Конечные множества равномощны только в том случае, когда они имеют одинаковое количество элементов. Следовательно, *мощность конечных множеств определяется числом их элементов*. Простейшим среди бесконечных множеств является множество N натуральных чисел. Любое бесконечное множество, эквивалентное множеству натуральных чисел, называется *счетным* множеством. Элементы счетного множества можно занумеровать как члены бесконечной последовательности: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Бесконечное множество, не являющееся счетным, называется *несчетным* множеством.

Теория множеств была создана работами математиков XIX в., которые ставили себе целью разработку оснований математического анализа: Б. Больцано (B. Bolzano), Р. Дедекинд (R. Dedekind). Уже в первых работах в этой области рассматривались числовые множества или множества функций и ставился вопрос о количественном сравнении бесконечных множеств. Ответ на этот вопрос дал немецкий математик Г. Кантор (G. Cantor), определив количественную эквивалентность, или равномощность, двух множеств как возможность установить между ними биективное соответствие. Главная заслуга Кантора состоит в признании того факта, что бесконечность – это не абстракция, придуманная философами, а реальность; что бесконечные совокупности предметов существуют наравне с конечными.

1.2. Бинарные операции. Алгебраические системы

В элементарной алгебре рассматриваются различные числовые множества, над элементами которых можно производить арифметические действия. Каждое из действий: сложение, вычитание, умножение и деление – это бинарная операция. Пусть X – произвольное множество. Сопоставление любой упорядоченной паре элементов данного множества однозначно определенного элемента того же множества называется *бинарной алгебраической операцией*. Таким образом, бинарная операция на множестве X – это отображение декартова квадрата $X \times X$ на множество X. Чаще всего бинарную операцию на множестве X обозначают каким-нибудь символом: «+», «•», «$*$». На любом множестве может быть задано, вообще говоря, много разных операций, обладающих различными свойствами.

Из школьного курса математики известно, что сложение и умножение чисел подчиняются переместительному, сочетательному и распределительному законам. В алгебре говорят о свойствах (или аксиомах) коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности бинарных операций.

Бинарная операция $*$ на множестве X называется *ассоциативной*, если $(a*b)*c = a*(b*c)$ для всех $a,b,c \in X$. Бинарная операция $*$ на множестве X называется *коммутативной*, если $a*b = b*a$ для всех $a,b \in X$.

Если на множестве X заданы две бинарные операции $*$ и $\circ$, то может выполняться свойство дистрибутивности. Говорят, что операция $\circ$ *дистрибутивна* относительно операции $*$, если $(a*b)\circ c = (a \circ c)*(b \circ c)$, $c \circ (a*b) = (c \circ a)*(c \circ b)$ для всех $a,b,c \in X$.

Для любых действительных чисел a, b, c справедливы равенства:

- $a+b=b+a$ – коммутативность сложения (переместительный закон);
- $(a+b)+c = a+(b+c)$ – ассоциативность сложения (сочетательный закон);
- $a \cdot b = b \cdot a$ – коммутативность умножения (переместительный закон);
- $(a \cdot b)\cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ – ассоциативность умножения (сочетательный закон);
- $(a+b)\cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ – дистрибутивность умножения относительно сложения (распределительный закон).

Вычитание – это действие, обратное сложению, деление – действие, обратное умножению. На множестве действительных чисел эти действия выполнимы (кроме деления на нуль), однако свойствами коммутативности и ассоциативности они не обладают.

Пусть на произвольном множестве X задана бинарная операция, обозначаемая символом $*$. Элемент e множества X называется *нейтральным* относительно рассматриваемой операции $*$, если $e*x = x*e = x$ для любого элемента x множества X. Можно доказать, что если для данной операции существует нейтральный элемент, то он единственный. Элемент x множества X называется *обратимым*, если существует элемент $x^{-1} \in X$, для которого $x*x^{-1} = x^{-1}*x = e$. Элемент x^{-1} называется *обратным* (или *симметричным*) к элементу x. Можно доказать, что если для элемента x существует обратный, то он единственный; кроме того, $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$.

Если рассматривается операция сложения, то нейтральный элемент называется *нулевым*, а элемент, обратный к элементу x, – *противоположным* элементом. Для сложения действительных чисел – это число «нуль» и число ($-x$) соответственно. Если рассматривается операция умножения, то нейтральный элемент называется *единичным*. Для умножения действительных чисел нейтральным элементом является число «1»; все действительные числа, отличные от нуля, являются обратимыми.

Особый интерес представляют множества, на которых заданы алгебраические операции, обладающие теми или иными свойствами. В таком случае говорят, что некоторая алгебраическая (не обязательно бинарная) операция $*$ определяет на непустом множестве X *алгебраическую структуру*, или что множество X с заданной на нем алгебраической операцией $*$ является *алгебраической системой* и обозначают (X, $*$). Например: $(\boldsymbol{N},+), (\boldsymbol{N},\cdot), (\boldsymbol{Z},+), (\boldsymbol{Z},\cdot), (\boldsymbol{Q},+), (\boldsymbol{Q},\cdot), (\boldsymbol{R},+), (\boldsymbol{R},\cdot)$ – различные алгебраические структуры.

Непустое множество X с заданной на нем бинарной алгебраической операцией $*$ называется *группоидом*.

Непустое множество G с заданной на нем бинарной алгебраической операцией $*$ называется *полугруппой*, если операция $*$ ассоциативна: $(x*y)*z = x*(y*z)$ для всех $x, y, z \in G$.

Непустое множество G с заданной на нем бинарной алгебраической операцией $*$ называется *группой*, если выполнены следующие аксиомы:

1) операция $*$ ассоциативна: $(x*y)*z = x*(y*z)$ для всех $x, y, z \in G$;

2) G обладает нейтральным элементом e: $x*e = e*x = x$ для всех $x \in G$;

3) для каждого элемента $x \in G$ существует обратный x^{-1}: $x*x^{-1} = x^{-1}*x = e$.

Группа с коммутативной операцией называется *коммутативной,* или *абелевой*, в честь норвежского математика Н. Х. Абеля (N. H. Abel). Термин «группа» принадлежит французскому математику Э. Галуа (E. Galois) – подлинному создателю теории групп. Полугруппа с коммутативной операцией также называется *коммутативной,* или *абелевой*.

Учитывая свойства сложения и умножения действительных чисел, можно сделать вывод о том, что множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел является абелевой группой относительно операции сложения, а множество всех действительных чисел, кроме нуля, является абелевой группой относительно операции умножения. Отметим также, что $(\boldsymbol{Z},+), (\boldsymbol{Q},+), (\boldsymbol{R},+)$, – абелевы группы, а $(\boldsymbol{N},+), (\boldsymbol{N},\cdot), (\boldsymbol{Z},\cdot), (\boldsymbol{Q},\cdot), (\boldsymbol{R},\cdot)$ – абелевы полугруппы.

Пусть K – непустое множество, на котором заданы две бинарные алгебраические операции: «+» – сложение и «•» – умножение. Алгебраическая структура (K, +, •) называется *кольцом*, если выполняются следующие условия:

1) K – абелева группа относительно сложения (эту группу называют аддитивной группой кольца);
2) операция умножения ассоциативна (то есть K – полугруппа относительно умножения);
3) умножение дистрибутивно относительно сложения.

Кольцо K называется *коммутативным*, если операция умножения коммутативна (в отличие от групп коммутативное кольцо не принято называть абелевым).

Если в кольце K существует нейтральный элемент относительно умножения (единичный элемент), то говорят, что *K – кольцо с единицей*.

Из определения кольца следует, что в нем определена операция, обратная сложению, – вычитание, но не определена операция, обратная умножению, т. е. в кольце не выполняется деление. Например, множество всех целых чисел является коммутативным кольцом с единицей. Рассматриваемое ниже множество всех квадратных матриц порядка n является некоммутативным кольцом с единицей.

Коммутативное кольцо P с единицей называется *полем*, если оно состоит не только из одного нуля и если в нем выполнимо деление, кроме случая деления на нуль. Например, множество всех действительных чисел с операциями сложения и умножения является полем. Также полем является и ($\boldsymbol{Q}$, +, •). Понятие поля возникает в алгебре при исследовании корней многочлена (или при разложении многочлена на множители). Например, в поле комплексных чисел многочлен степени n имеет ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Примерно до середины XIX в. были известны лишь отдельные примеры колец. Общее понятие кольца встречается в работах Р. Дедекинда после 1870 г. Термин «кольцо» был введен Д. Гильбертом (D. Hilbert) позднее.

Зарождение теории поля в рамках теории алгебраических уравнений относится к середине XIX в. Концепции поля появляются в работах немецких математиков Л. Кронекера (L. Kronecker) и Р. Дедекинда. Дедекинд ввел понятие поля, которое он первоначально называл «рациональной областью». Термин «поле» впервые появился в 1871 г. в примечаниях и дополнениях Дедекинда к «Теории чисел» П. Дирихле (P. Dirichlet).

1.3. Поле комплексных чисел

Комплексным числом называется выражение вида $z = a + bi$, где a и b – вещественные (действительные) числа, а i – так называемая мнимая единица, $i^2 = 1$.

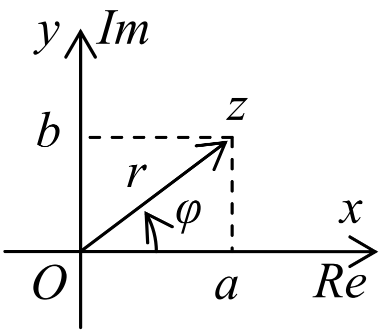
Число a называется *действительной частью* комплексного числа z и обозначается $a = \mathrm{Re}\, z$, а число b – *мнимой частью* комплексного числа z и обозначается $b = \mathrm{Im} z$. Знак «+», участвующий в определении комплексного числа, не имеет ничего общего со знаком сложения действительных чисел, но, как и i, является формальным символом.

Если $a = 0$, то число $0 + bi = bi$ называется *чисто мнимым числом*, а если $b = 0$, то число $a + 0 \cdot i$ отождествляется с действительным числом a. Число нуль $0 = 0 + 0i$ – единственное комплексное число, которое является одновременно и действительным, и чисто мнимым числом.

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называются *равными* тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$.

Два комплексных числа $z = a + bi, \bar{z} = a - bi$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются *сопряженными*. Любое действительное число является сопряженным самому себе.

Всякое комплексное число $z = a + bi$ можно изобразить точкой $M(a, b)$ плоскости Oxy. Обратно, каждую точку координатной плоскости можно рассматривать как образ или изображение комплексного числа $z = a + bi$. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс называется *действительной осью*, так как на ней лежат точки, изображающие действительные числа. Ось ординат называется *мнимой осью*, на ней лежат точки, изображающие чисто мнимые числа. Точки плоскости обычно *отождествляются* с комплексными числами, т. е. точку $M(a, b)$ называют числом $z = a + bi$. При этом длину вектора $\overrightarrow{OM}$ называют *модулем* комплексного числа $z = a + bi$ и обозначают $|z| = r$. Величину угла φ между положительным направлением действительной оси и вектором $\overrightarrow{OM}$ называют *аргументом* комплексного числа $z = a + bi$ и обозначают $\arg z = \varphi$. Аргумент числа 0 не определен. Если $z \neq 0$, то принимается, что $\arg z \in [0; 2\pi)$ или $\arg z \in (-\pi; \pi]$ (аргумент φ можно также определять и в градусной мере). Таким образом, модуль и аргумент комплексного числа $z = a + bi$ можно рассматривать как полярные координаты точки $M(a, b)$ в согласованной полярной системе координат с полюсом O.



Запись числа $z = a + bi$ называют *алгебраической формой* комплексного числа. Запись числа $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называют *тригонометрической формой* комплексного числа. Модуль и аргумент комплексного числа $z = a + bi$ определяются из формул: $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{a}{r}$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{r}$, $tg\varphi = \dfrac{b}{a}$. Так как имеет место формула Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, то комплексное число можно записать в *показательной* (или *экспоненциальной*) форме: $z = |z|e^{i\varphi} = re^{i\varphi}$.

Пример 1. Записать число z = 3+3i в тригонометрической форме.

Решение. Найдем модуль и аргумент числа z: $|z| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$; точка (3, 3) лежит в первой четверти, значит φ – острый угол и $tg\varphi = \dfrac{3}{3} = 1$, следовательно, $\varphi = 45^o$. Таким образом, тригонометрическая форма записи комплексного числа z = 3+3i имеет вид: $z = 3\sqrt{2}\left(\cos 45^0 + i\sin 45^0\right)$ или $z = 3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Арифметические действия над комплексными числами определяются так, чтобы естественным образом выполнялись действия над действительными числами $a + 0 \cdot i$.

Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ – произвольные комплексные числа. Тогда определены:

сумма $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$;

разность $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$;

произведение $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$;

частное $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \dfrac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{a_2^2 + b_2^2} i$, если $z_2 \neq 0$.

Практически действия сложения, вычитания и умножения над комплексными числами выполняют как аналогичные действия над многочленами, считая каждое комплексное число двучленом и учитывая, что $i^2 = 1$. Также обычно частное от деления z_1 на z_2 вычисляют путем умножения делимого и делителя (т. е. числителя и знаменателя дроби) на число, сопряженное делителю z_2: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \dfrac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2}$.

Пример 2. Найти $z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 \cdot z_2, z_1 : z_2$, если $z_1 = 5 - 2i, z_2 = 4 + 3i$.

Решение. $z_1 + z_2 = (5 - 2i) + (4 + 3i) = (5 + 4) + (-2 + 3)i = 9 + i;$

$$z_1 - z_2 = (5 - 2i) - (4 + 3i) = 5 - 2i - 4 - 3i = (5 - 4) + (-2 - 3)i = 1 - 5i;$$

$$z_1 z_2 = (5 - 2i)(4 + 3i) = 5 \cdot 4 + 5 \cdot 3i + (-2i) \cdot 4 + (-2i) \cdot 3i = 20 + 15i - 8i - 6i^2 = 20 + 7i - 6 \cdot (-1) = 26 + 7i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 - 2i}{4 + 3i} = \frac{(5 - 2i)(4 - 3i)}{(4 + 3i)(4 - 3i)} = \frac{5 \cdot 4 + 5 \cdot (-3i) + (-2i) \cdot 4 + (-2i)(-3i)}{4^2 - (3i)^2} = \frac{20 - 15i - 8i + 6i^2}{16 + 9} = \frac{14 - 23i}{25}$$

Если комплексные числа заданы в тригонометрической форме $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то можно получить следующие формулы для действий умножения, деления и возведения в степень комплексных чисел:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right), \text{ если } z_2 \neq 0,$$

$z^n = \left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ – формула Муавра.

Если аргумент результата не удовлетворяет условию $\arg z \in [0; 2\pi)$, то его приводят к нужному виду, прибавляя или вычитая число, кратное 2π.

Пример 3. Вычислить $(3 + 3i)^{10}$.

Решение. Так как $3 + 3i = 3\sqrt{2}\left(\cos 45^0 + i\sin 45^0\right)$, то по формуле Муавра $(3 + 3i)^{10} =$ $= \left(3\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos 450^0 + i\sin 450^0\right) = 3^{10} \cdot 2^5\left(\cos 90^0 + i\sin 90^0\right) = 3^{10} \cdot 2^5(0 + 1 \cdot i) = 3^{10} \cdot 2^5 i$, так как $\cos 90^0 = 0, \sin 90^0 = 1$.

Корнем n-й степени из комплексного числа z называется комплексное число $w = \sqrt[n]{z}$, удовлетворяющее равенству $w^n = z$. Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Для любого $z \neq 0$ корень n-й степени из комплексного числа z имеет ровно n различных значений. Так, например, $\sqrt{-1}$ имеет два значения: i и $-i$.

Пример 4. Найти $\sqrt[4]{1-i} = w$.

Решение. Пусть $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$. Чтобы воспользоваться формулой извлечения корня из комплексного числа z, запишем подкоренное выражение $z = 1 - i$ в тригонометрической форме: $1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$, т. е. $r = \sqrt{2}$, а $\varphi = \frac{7\pi}{4}$. Тогда $\rho = \sqrt[4]{\sqrt{2}} = \sqrt[8]{2}$, $\psi_k = \dfrac{\frac{7\pi}{4} + 2\pi k}{4}$, $k = 0, 1, 2, 3$. Подставляя в формулу каждое значение k, получим четыре значения w.

При $k = 0: \psi_0 = \dfrac{7\pi}{16}$, $w_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{16} + i\sin\dfrac{7\pi}{16}\right)$;

при $k = 1: \psi_1 = \dfrac{\frac{7\pi}{4} + 2\pi}{4} = \dfrac{15\pi}{16}$, $w_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\dfrac{15\pi}{16} + i\sin\dfrac{15\pi}{16}\right)$;

при $k = 2: \psi_2 = \dfrac{\frac{7\pi}{4} + 4\pi}{4} = \dfrac{23\pi}{16}$, $w_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\dfrac{23\pi}{16} + i\sin\dfrac{23\pi}{16}\right)$;

при $k = 3: \psi_3 = \dfrac{\frac{7\pi}{4} + 6\pi}{4} = \dfrac{31\pi}{16}$, $w_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\dfrac{31\pi}{16} + i\sin\dfrac{31\pi}{16}\right)$.

Из определения суммы и произведения следует, что множество комплексных чисел замкнуто относительно этих операций. Кроме того, нетрудно доказать, что эти операции ассоциативны и коммутативны, а также связаны дистрибутивным законом. Числа «0» и «1» играют роль нулевого и единичного элементов; деление любых комплексных чисел также определено, кроме деления на «0». Следовательно, множество комплексных чисел является полем, которое обычно обозначается ***C***.

Если $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ – квадратное уравнение с действительными коэффициентами и его дискриминант $D = b^2 - 4ac$ неотрицателен, то уравнение имеет два действительных корня, различных (при $D > 0$) либо равных (при $D = 0$). Эти корни могут быть вычислены по формуле: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Если же $D < 0$, то действительных корней уравнение не имеет (так как не определено арифметическое значение квадратного корня из отрицательного числа), зато это уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня: $x_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-D}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-D}}{2a}$.

Впервые мнимые числа появились в известном труде «Великое искусство, или Об алгебраических правилах» Дж. Кардано (G. Cardano, 1545), который счел их бесполезными, непригодными к употреблению. Пользу мнимых величин, в частности при решении кубического уравнения, впервые оценил Р. Бомбелли (R. Bombelli, 1572). Задача о выражении корней степени n из данного числа была в основном решена в работах А. Муавра (A. de Moivre) и Р. Котеса (R. Cotes). Символ $i = \sqrt{-1}$ предложил Л. Эйлер (L. Euler). К. Гаусс (C. Gauss) доказал алгебраическую замкнутость поля комплексных чисел и ввел термин «комплексное число». В 1832 г. К. Гауссом были впервые рассмотрены *гауссовы числа* – комплексные числа с целыми компонентами a и b.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

2.1. Матрицы и действия над ними

2.1.1. Понятие матрицы

Прямоугольная таблица из $n \cdot m$ чисел, содержащая m строк и n столбцов, называется *матрицей размера* $m \times n$ и обозначается

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix} \quad \text{или} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Коротко матрицу *размера* $m \times n$ обозначают $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ (или $A = \|a_{ij}\|$), где $i = 1, 2,\ldots, m$; $j = 1, 2,\ldots, n$. Числа a_{ij}, составляющие матрицу, называются *элементами* матрицы. Набор чисел $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ называется *i-й строкой* матрицы A, а набор $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$ – *j-м столбцом*. Каждый элемент матрицы снабжен двумя индексами: первый индекс (i) указывает номер строки, второй индекс (j) – номер столбца, в которых расположен этот элемент. Если матрица состоит из одного столбца или одной строки, то ее называют *вектором*: *вектор-столбец* $A_{m\times 1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_m \end{pmatrix}$ или *вектор-строка* $B_{1\times n} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ (говорят также *матрица-столбец* или *матрица-строка* соответственно).

Матрица размера 1×1 состоит из одного числа: $A_{1\times 1} = \left(a_{11}\right)$.

Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ считаются *равными*, т. е. $A = B$, если они имеют одинаковое количество строк и столбцов и равны их соответствующие элементы: $a_{ij} = b_{ij}$.

Матрица A^T называется *транспонированной* по отношению к матрице A, если столбцы матрицы A являются строками матрицы A^T.

<u>Пример.</u> Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$, тогда $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix}$.

Очевидно, что $(A^T)^T = A$.

Если в матрице число строк равняется числу столбцов, т. е. $m = n$, то матрица называется *квадратной матрицей n-го порядка*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Элементы квадратной матрицы $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ называются *диагональными* и образуют *главную диагональ* матрицы. Элементы $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \ldots, a_{n1}$ образуют *побочную диагональ* матрицы. Квадратная матрица называется *диагональной*, если все ее элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица называется *единичной*, если все ее диагональные элементы равны единице:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица называется *треугольной*, если все ее элементы, которые находятся над главной диагональю или под главной диагональю, равны нулю.

Квадратная матрица A называется *симметричной*, или *симметрической*, если $a_{ij} = a_{ji}$. Очевидно, что симметричная матрица совпадает с транспонированной к ней матрицей.

2.1.2. Сложение матриц

Пусть даны две матрицы $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$. *Суммой* матриц A и B с одинаковыми размерами называется матрица $C = A + B$ с теми же размерами, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$: $A_{m\times n} + B_{m\times n} = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = C_{m\times n}$.

Пример 1. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, тогда их сумма

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & -2+1 & 5-3 \\ 4+1 & 1-2 & 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 7 \end{pmatrix} = C.$$

Действие сложения матриц может быть распространено на случай любого конечного числа слагаемых одинаковых размеров. Отметим, что складывать матрицы с неодинаковым числом строк или с неодинаковым числом столбцов нельзя.

Матрица Θ, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* матрицей.

Пусть $A = (a_{ij})$; тогда матрица $-A = (-a_{ij})$ называется *противоположной* матрице A.

Пример 2. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, то $-A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Ясно, что $A + \Theta = \Theta + A = A$; $A + (-A) = (-A) + A = \Theta$, где A и Θ – матрицы одного и того же размера.

2.1.3. Умножение матрицы на число

Чтобы умножить матрицу $A = (a_{ij})$ на число k, надо умножить на это число каждый элемент матрицы: $kA = k(a_{ij}) = (ka_{ij})$.

Пример. Пусть $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 5\end{pmatrix}$, $k=3$. Тогда $kA=3A=\begin{pmatrix}3\cdot 2 & 3\cdot(-1)\\ 3\cdot 3 & 3\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -3\\ 9 & 15\end{pmatrix}$.

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают следующими свойствами:

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. $1\cdot A = A\cdot 1 = A$;
4. $\alpha\cdot(A+B)=\alpha A+\alpha B$;
5. $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha A+\beta A$;
6. $\alpha\cdot(\beta\cdot A)=(\alpha\beta)\cdot A$,

где A, B, C – матрицы одного и того же размера, α, β – произвольные действительные числа.

Кроме того, справедливы равенства: $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

2.1.4. Произведение двух матриц

Произведение матрицы A на матрицу B определено только в том случае, когда *число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B*. В результате умножения получим матрицу $C = AB$, в которой столько же строк, сколько их в матрице A, и столько же столбцов, сколько их в матрице B: $A_{m\times k}\cdot B_{k\times n}=C_{m\times n}$. Элемент c_{ij}, расположенный в i-й строке и j-м столбце матрицы C, равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{ik}\cdot b_{kj}$.

Например, если $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$, то $AB=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}$.

Умножение матриц обладает следующими свойствами, аналогичными свойствам умножения чисел (если определены все указанные действия):

1. $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$;
2. $A(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$;
3. $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$;
4. $\alpha(A\cdot B)=(\alpha A)\cdot B$.

Операция умножения матриц имеет также специфические свойства, отличные от свойств умножения чисел:

а) если существует произведение матриц AB, то произведение BA может и не существовать; например, $A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 3}=C_{2\times 3}$, но произведение $B_{3\times 3}\cdot A_{2\times 3}$ не определено;

б) если существуют оба произведения AB и BA, то они могут быть матрицами разных размеров; например, $A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 2}=C_{2\times 2}$, но $B_{3\times 2}\cdot A_{2\times 3}=D_{3\times 3}$;

в) если A и B – квадратные матрицы одного порядка, то произведения AB и BA всегда существуют, однако в общем случае умножение матриц не коммутативно: $AB \neq BA$.

Например, пусть $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix}$. Тогда $AB \neq BA$, так как:

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-2)+2\cdot 3 & 1\cdot 1+2\cdot 5\\ -1\cdot(-2)+3\cdot 3 & 1\cdot(-1)+3\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 11\\ -11 & 14\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cdot 1-1\cdot 1 & 2\cdot(-2)+1\cdot 3\\ 3\cdot 1+5\cdot(-1) & 3\cdot 2+5\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -2 & 21\end{pmatrix}.$$

Если для матриц A и B выполняется равенство $AB = BA$, то A и B называются *перестановочными матрицами*. В частности, если A – квадратная матрица, а E – единичная матрица того же порядка, то $AE = EA = A$, т. е. единичная матрица играет при умножении матриц ту же роль, что и число 1 при умножении чисел.

Таким образом, множество M_n всех квадратных матриц одного и того же порядка n является полугруппой с единицей относительно операции умножения и абелевой группой относительно сложения, следовательно $(M_n,+,\cdot)$ – некоммутативное кольцо с единицей;

г) произведение двух ненулевых матриц может равняться нулевой матрице, т. е. из того, что $AB = \Theta$, не следует, что $A = \Theta$ или $B = \Theta$.

Например, матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ – ненулевые, но их произведение – нулевая матрица: $AB=\begin{pmatrix}1\cdot 2+2\cdot(-1) & 1\cdot 2+2\cdot(-1)\\ 2\cdot 1+2\cdot(-1) & 2\cdot 1+2\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\Theta$;

д) произведение матриц согласовано с операцией транспонирования следующим образом: если определено произведение AB, то $(AB)^T = B^T A^T$.

2.1.5. Элементарные преобразования матрицы

Пусть дана произвольная матрица

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Элементарными преобразованиями матрицы являются:

- перестановка местами двух строк (двух столбцов) матрицы;
- умножение всех элементов строки (столбца) на число, отличное от нуля;
- прибавление ко всем элементам одной строки (столбца) матрицы соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число.

Две матрицы A и B называются *эквивалентными* (обозначается $A \sim B$), если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. С помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к так называемому ступенчатому виду. Матрица A называется *ступенчатой*, если она имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1l} & \ldots & a_{1s} & \ldots & a_{1n}\\ 0 & \ldots & a_{2k} & \ldots & a_{2l} & \ldots & a_{2s} & \ldots & a_{2n}\\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & a_{3l} & \ldots & a_{3s} & \ldots & a_{3n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & a_{rs} & \ldots & a_{rn}\\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0\end{pmatrix},$$

где $a_{11} \neq 0, \ldots, a_{2k} \neq 0, \ldots, a_{3l} \neq 0, \ldots, a_{rs} \neq 0$, эти элементы будем называть *угловыми элементами* ступенчатой матрицы. Таким образом, несколько первых строк ступенчатой матрицы – *ненулевые*, то есть содержат хотя бы по одному ненулевому элементу, причем если $a_{ij} \neq 0$ – первый ненулевой элемент *i*-й строки, то все элементы, стоящие в матрице ниже и левее a_{ij}, равны нулю. Если при элементарных преобразованиях получаются *нулевые* строки, состоящие только из нулей, то их переставляют вниз. (Заметим, что в некоторых учебных пособиях при элементарных преобразованиях матриц вместо символа «~» применяется символ «$\to$».)

Для приведения матрицы (1.1) к ступенчатому виду будем применять только элементарные преобразования строк, не преобразовывая столбцы матрицы. Пусть $a_{11} \neq 0$ (если $a_{11} = 0$, то поменяем местами строки так, чтобы первой в матрице стояла строка с ненулевым первым элементом). Теперь добьемся того, чтобы во всех остальных строках первые элементы стали равными нулю. Для этого умножим первую строку на число $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ и сложим со второй строкой; затем умножим первую строку на число $-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ и сложим с третьей строкой и т. д. Получится матрица, в которой все элементы первого столбца, кроме a_{11}, равны нулю. В дальнейших преобразованиях элементы первой строки матрицы не используются, а только переписываются без изменений. Если во втором столбце полученной матрицы есть элемент a_{i2}, отличный от нуля (не считая элемент a_{12} первой строки), то *i*-ю строку ставим на второе место, если же все элементы $a_{i2} = 0$, то аналогично рассматриваем третий столбец и т. д. Пусть *k* – номер столбца, в котором $a_{2k} \neq 0$, а все столбцы с меньшими номерами – нулевые (кроме первых элементов). Умножим вторую строку на число $-\dfrac{a_{3k}}{a_{2k}}$ и сложим с третьей строкой; затем умножим вторую строку на $-\dfrac{a_{4k}}{a_{2k}}$ и сложим с четвертой строкой и т. д. В результате *k*-й столбец полученной матрицы будет состоять из элементов $a_{1k}, a_{2k} \neq 0$ и (*m*-2) нулей. Этот процесс продолжается, пока возможно. Строка, которая используется для получения нулей в остальных строках, обычно называется *рабочей* строкой. Удобнее при вычислениях, чтобы первый ненулевой элемент рабочей строки был равен 1.

Пример. Привести матрицу $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ к ступенчатому виду.

Решение. Поменяем местами первую и вторую строки для того, чтобы первый элемент рабочей (первой) строки был равен 1, третью и четвертую строки перепишем без изменения. Далее умножим первую строку на (-2) и сложим ее со второй, результат запишем на месте второй строки; затем сложим первую строку с третьей и результат запишем на месте третьей строки и, наконец, умножим первую строку на (-1), сложим ее с четвертой и результат запишем на месте четвертой строки.

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ (-2)\cdot 1+2 & (-2)\cdot(-1)+(-2) & (-2)\cdot 1+3 & (-2)\cdot(-1)+(-4) \\ 1+(-1) & -1+1 & 1+0 & -1+(-1) \\ (-1)\cdot 1+1 & (-1)(-1)+(-1) & (-1)\cdot 1+2 & (-1)(-1)+3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

В полученной матрице все элементы первого и второго столбцов, кроме первых, равны нулю. Далее первую строку будем только переписывать без изменения; в следующих преобразованиях рабочей строкой будет вторая строка, ее также переписываем без изменения. Первый ненулевой элемент второй строки – это $a_{23}=1$. Умножим вторую строку на (-1), сложим ее с третьей и результат запишем на месте третьей строки; затем умножим вторую строку на (-1), сложим ее с четвертой и результат запишем на месте четвертой строки. Заметим, что при этих преобразованиях нулевые элементы третьей и четвертой строк останутся нулевыми, то есть первые два столбца матрицы меняться не будут.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & (-1)\cdot 1+1 & (-1)\cdot(-2)+(-2) \\ 0 & 0 & (-1)\cdot 1+1 & (-1)\cdot(-2)+4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для получения последней матрицы мы поменяли местами третью и четвертую строки для того, чтобы нулевая строка оказалась последней. В полученной ступенчатой матрице угловыми элементами являются: $a_{11}=1, a_{23}=1, a_{34}=6$.

Замечание. Треугольная матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ является частным случаем ступенчатой матрицы. Треугольная матрица может получиться из квадратной матрицы порядка n в результате элементарных преобразований.

Понятие матрицы впервые появилось в середине XIX в. в работах У. Гамильтона (W. Hamilton) и А. Кэли (A. Cayley). Фундаментальные результаты в теории матриц принадлежат К. Вейерштрассу (K. Weierstrass), К. Жордану (C. Jordan), Г. Фробениусу (G. Frobenius). И. А. Лаппо-Данилевский развил теорию аналитических функций многих матричных переменных и применил ее к изучению систем линейных дифференциальных уравнений.

2.2. Определители квадратных матриц

Квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число, называемое ее *определителем,* или *детерминантом* (от латинского «*determine»* – определяю), и обозначаемое det$A$ (или $\Delta(A)$, или $|A|$). Определитель матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ называется также *определителем n-*го *порядка* и записывается следующим образом:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Числа a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$), образующие определитель, называются его *элементами*. Так же, как и в квадратной матрице, элементы a_{11}, a_{22}, a_{33}, …, a_{nn} образуют *главную диагональ*, а элементы a_{1n}, $a_{2(n-1)}$, …, a_{n1} – *побочную диагональ* определителя. Определитель матрицы есть число, характеризующее ее и не зависящее от способа его вычисления.

2.2.1. Определители первого, второго и третьего порядков

Определителем матрицы $A=\left(a_{11}\right)$ *первого порядка* является число, равное единственному элементу этой матрицы: $\det A=a_{11}$.

Определителем матрицы $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ второго порядка (или *определителем второго порядка*) называется число $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$, равное разности произведения элементов главной диагонали и произведения элементов побочной диагонали матрицы. Таким образом:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Определителем матрицы $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ третьего порядка (или *определителем третьего порядка*) называется число:

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Для запоминания состава слагаемых, входящих в выражение для определителя, применяют следующее мнемоническое правило: определитель третьего порядка есть алгебраическая сумма всевозможных произведений его элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, причем знак «плюс» имеют произведение элементов, стоящих на главной диагонали, и два произведения элементов, образующих в определителе равнобедренные треугольники с основаниями, параллельными главной диагонали, а знак «минус» имеют произведение элементов, стоящих на побочной диагонали, и два произведения элементов, образующих треугольники с основаниями, параллельными побочной диагонали. Это правило называют *правилом треугольников*, символически это выглядит так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Укажем и другое правило составления выражения для определителя третьего порядка (правило Саррюса), которое является модификацией предыдущего. Запишем элементы определителя, к ним припишем справа первый и второй столбцы. Тогда вычисляются произведения элементов, соединенных отрезками прямых (знак, с которым берется каждое произведение, указан около нижнего конца отрезка):

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & -\ + & + & + \end{array}$$

2.2.2. Основные свойства определителей

Введем понятие минора и алгебраического дополнения элемента определителя. Для простоты рассмотрим определитель третьего порядка. Отметим, что все свойства определителей третьего порядка переносятся на определители любого порядка.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (2.1)$$

Если в определителе порядка n вычеркнуть какую-нибудь строку и какой-нибудь столбец, то получится определитель порядка (n-1), который называется *минором* определителя, соответствующим элементу, который находится на пересечении вычеркнутой строки и вычеркнутого столбца.

Например, если в определителе (2.1) вычеркнуть вторую строку и третий столбец, то останется определитель второго порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$. Этот определитель и есть минор элемента a_{23} и обозначается: $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Минор M_{ij}, соответствующий элементу a_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, называется *алгебраическим дополнением элемента* a_{ij} (i, j = 1, 2, …, n) и обозначается A_{ij}. Например, алгебраическое дополнение элемента a_{23} будет равно: $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Свойства определителей

Свойство 1. При замене строк столбцами величина определителя не меняется (т. е. при транспонировании матрицы ее определитель не меняется):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

<u>Свойство 2</u>. При перестановке двух строк (столбцов) местами определитель меняет знак.

<u>Свойство 3</u>. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

<u>Свойство 4</u>. Если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

<u>Свойство 5</u>. Если элементы некоторой строки (столбца) определителя представляют собой сумму двух слагаемых, то этот определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, у которых элементы рассматриваемой строки (столбца) равны соответственным слагаемым.

<u>Свойство 6</u>. Величина определителя не изменится, если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на один и тот же множитель k.

<u>Свойство 7</u>. Определитель равен сумме произведений элементов некоторой его строки (столбца) на алгебраические дополнения этих элементов. Например, определитель третьего порядка можно вычислить по любой из следующих шести формул:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}; \qquad \Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31};$$
$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}; \qquad \Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32};$$
$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}; \qquad \Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.$$

Замечание. Используя свойство 7, мы можем вычислить определитель любого порядка. Такой способ вычисления называется *разложением определителя по элементам* некоторой строки (столбца).

<u>Свойство 8</u>. Сумма произведений элементов некоторой строки (столбца) на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельной строки (столбца) равна нулю.

<u>Свойство 9</u>. Определитель равен нулю, если все элементы некоторой строки (столбца) равны нулю.

<u>Свойство 10</u>. Определитель треугольной и, в частности, диагональной матрицы равен произведению элементов ее главной диагонали.

Таким образом, существует еще один способ вычисления определителя любого порядка: с помощью элементарных преобразований, с учетом свойств 2, 4, 6, привести матрицу к треугольному виду, затем воспользоваться свойством 10.

<u>Свойство 11</u>. Определитель произведения двух (или нескольких) квадратных матриц порядка n равен произведению определителей этих матриц.

Пример 1. Вычислить определитель третьего порядка: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 6 & -3 & 8 \end{vmatrix}$.

Решение. *Первый способ.* Припишем к определителю справа его первый и второй столбцы, затем выпишем произведения элементов, стоящих на главной диагонали и параллельных ей отрезках, со знаком «плюс»; после этого выпишем произведения элементов, стоящих на побочной диагонали и параллельных ей отрезках, со знаком «минус».

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&-4\\3&0&5\\6&-3&8\end{vmatrix}\begin{matrix}1&2\\3&0\\6&-3\end{matrix}=1\cdot0\cdot8+2\cdot5\cdot6+(-4)\cdot3\cdot(-3)-(-4)\cdot0\cdot6-1\cdot5\cdot(-3)-2\cdot3\cdot8=$$
$$=0+60+36-0-(-15)-48=63.$$

Второй способ. Разложим определитель по элементам второй строки (для разложения определителя обычно выбирают ту строку (столбец), где есть нулевые элементы, т. к. содержащие их слагаемые в разложении будут равны нулю).

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&-4\\3&0&5\\6&-3&8\end{vmatrix}=3\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}2&-4\\-3&8\end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1&-4\\6&8\end{vmatrix}+$$
$$+5\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1&2\\6&-3\end{vmatrix}=3\cdot(-1)\cdot(2\cdot8-(-4)\cdot(-3))+0+5\cdot(-1)\cdot(1\cdot(-3)-2\cdot6)=$$
$$=(-3)\cdot4+(-5)\cdot(-15)=-12+75=63.$$

Третий способ. Вычислим определитель, приведя его матрицу к треугольному виду с помощью элементарных преобразований. Для этого умножим элементы первой строки на число (-3) и сложим их с соответственными элементами второй строки; затем умножим элементы первой строки на число (-6) и сложим их с соответственными элементами третьей строки. Тем самым добиваемся того, чтобы все элементы первого столбца (кроме $a_{11}=1$) оказались равными нулю (при этом, по свойству 6, определитель не меняется):

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&-4\\3&0&5\\6&-3&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&-4\\(-3)\cdot1+3&(-3)\cdot2+0&(-3)\cdot(-4)+5\\(-6)\cdot1+6&(-6)\cdot2+(-3)&(-6)\cdot(-4)+8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&-4\\0&-6&17\\0&-15&32\end{vmatrix}.$$

Далее, разделив все элементы второй строки на число (-6) и вынеся общий множитель (-6) за знак определителя (по свойству 4), добиваемся того, чтобы новый элемент a_{22} стал равным 1:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&-4\\0&-6&17\\0&-15&32\end{vmatrix}=-6\cdot\begin{vmatrix}1&2&-4\\0&1&-\frac{17}{6}\\0&-15&32\end{vmatrix}.$$

Для получения треугольной матрицы в данном случае достаточно умножить элементы второй строки на число 15 и сложить их с соответственными элементами третьей строки (при этом, по свойству 6, определитель не меняется). После этого вычислим определитель треугольной матрицы как произведение ее диагональных элементов (по свойству 10):

$$\Delta=-6\cdot\begin{vmatrix}1&2&-4\\0&1&-\frac{17}{6}\\0&-15&32\end{vmatrix}=-6\cdot\begin{vmatrix}1&2&-4\\0&1&-\frac{17}{6}\\0&15\cdot1+(-15)&15\cdot\left(-\frac{17}{6}\right)+32\end{vmatrix}=-6\cdot\begin{vmatrix}1&2&-4\\0&1&-\frac{17}{6}\\0&0&-\frac{63}{6}\end{vmatrix}=$$
$$=-6\cdot1\cdot1\cdot\left(-\frac{63}{6}\right)=63.$$

Пример 2. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение. Сначала преобразуем определитель, вычитая из первой строки вторую. При этом величина определителя не изменится (по свойству 6). Затем разложим полученный определитель по элементам первой строки, так как в этой строке два нулевых элемента и, следовательно, в разложении придется вычислять только два определителя третьего порядка, входящих в алгебраические дополнения ненулевых элементов.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (a-b)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} b & 1 & 1 \\ c & 0 & 1 \\ d & 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 + 0 =$$

$$= (a-b)(0\cdot0\cdot0 + 1\cdot1\cdot1 + 1\cdot1\cdot1 - 1\cdot0\cdot1 - 0\cdot1\cdot1 - 0\cdot1\cdot1) -$$
$$-1\cdot(b\cdot0\cdot0 + c\cdot1\cdot1 + d\cdot1\cdot1 - 1\cdot0\cdot d - 1\cdot0\cdot c - 1\cdot1\cdot b) = 2(a-b) - c - d + b = 2a - b - c - d.$$

Понятие определителя восходит к Г. Лейбницу (G. Leibnitz); первая публикация в 1750 г. принадлежит Г. Крамеру (G. Cramer). Теория определителей создана трудами А. Вандермонда (A. Vandermonde), П. Лапласа (P. Laplace), О. Коши (A. Cauchy) и К. Якоби (C. Jacobi). Термин «определитель» встречается впервые в 1801 г. у К. Гаусса. Современное обозначение введено в 1841 г. А. Кэли.

2.3. Обратная матрица

Пусть A – квадратная матрица n-го порядка. Квадратная матрица X порядка n называется *обратной* для A, если $AX = XA = E$, где E – единичная матрица того же порядка. Матрицу X, *обратную* для матрицы A, обозначают A^{-1}. Так как определитель единичной матрицы равен единице, то из определения следует, что определитель матрицы, обратной для матрицы A, есть число, обратное определителю матрицы A. То есть матрица, определитель которой равен нулю, не может иметь обратную матрицу.

Квадратная матрица n-го порядка называется *особенной* (*вырожденной*), если ее определитель равен нулю. Если же определитель $\det(A) \neq 0$, то A называется *неособенной* (*невырожденной*) матрицей. Можно доказать, что всякая невырожденная матрица имеет обратную матрицу. Есть несколько способов нахождения матрицы, обратной данной. Один из них состоит в вычислении алгебраических дополнений всех элементов невырожденной матрицы A.

Например, матрицей, обратной для матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$,

$\Delta = \det(A) \neq 0$, будет матрица $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{12}}{\Delta} \\ \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$,

где A_{ij} есть алгебраическое дополнение элемента a_{ij} определителя $\Delta = \det(A)$.

Аналогично матрицей, обратной для невырожденной матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ третьего порядка, $\Delta = \det(A) \neq 0$, будет матрица

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} есть алгебраическое дополнение элемента a_{ij} определителя $\Delta = \det(A)$.

Пример. Найти обратную матрицу A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Найдем определитель матрицы A: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 6 + 0 - 3 - 0 - 2 = -1 \neq 0$.

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 - 0 \cdot 2 = -1; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 1 - 3 \cdot 2) = 4; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 3 \cdot (-1) = 3; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

Записываем обратную матрицу, применяя формулу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Убеждаемся, что матрица, обратная данной матрице A, найдена правильно, проверяя, что $A\,A^{-1} = E$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2-3 & -8-10+18 & -6-6+12 \\ 1-1+0 & -4+5+0 & -3+3+0 \\ -1+2-1 & 4-10+6 & 3-6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

2.4. Ранг матрицы

2.4.1. Миноры матрицы

Рассмотрим прямоугольную матрицу, состоящую из m строк и n столбцов. Выделим в этой матрице какие-нибудь k строк и k столбцов, где $k \le m$ и $k \le n$. Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k-го порядка. Все такие определители называются *минорами* k-го *порядка* данной матрицы. Из матрицы размера $m \times n$ можно составить $C_m^k \cdot C_n^k$ миноров k-го порядка.

Например, из матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ можно составить $C_4^1 \cdot C_3^1 = 12$ миноров первого порядка – это сами элементы матрицы A, $C_4^2 \cdot C_3^2 = 18$ миноров второго порядка и $C_4^3 \cdot C_3^3 = 4$ минора третьего порядка.

Так как в матрице A третья строка получается при сложении первых двух строк, то все миноры третьего порядка равны нулю. Однако существуют миноры второго порядка, отличные от нуля, например $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \ne 0$.

2.4.2. Определение ранга матрицы

Рангом матрицы A называется наивысший порядок отличного от нуля минора этой матрицы и обозначается $r\,(A)$. В приведенном выше примере $r\,(A) = 2$.

Из определения следует, что: а) ранг матрицы $A_{m \times n}$ не превосходит меньшего из ее размеров, т. е. $r\left(A_{m\times n}\right) \le \min(m,n)$; б) $r\,(A) = 0$ тогда и только тогда, когда A – нулевая матрица. На основании свойств определителей можно доказать, что ранг матрицы не меняется, если произвести следующие элементарные преобразования:

1. Транспонирование, т. е. замена каждой строки столбцом с тем же номером.
2. Перестановка двух строк или двух столбцов.
3. Умножение всех элементов строки или столбца на любое число, отличное от нуля.
4. Прибавление ко всем элементам строки или столбца соответствующих элементов параллельной строки (столбца), умноженных на одно и то же число.

Таким образом, для определения ранга матрицы отпадает необходимость нахождения миноров всех порядков, так как с помощью элементарных преобразований данную матрицу можно привести к ступенчатому виду:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1s} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2l} & \dots & a_{2s} & \dots & a_{2n} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{3l} & \dots & a_{3s} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{rs} & \dots & a_{rn} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где $a_{11} \ne 0, \dots, a_{2k} \ne 0, \dots, a_{3l} \ne 0, \dots, a_{rs} \ne 0$. Так как в полученной матрице существует отличный от нуля минор порядка r, составленный из строк и столбцов, содержащих угловые элементы ступенчатой матрицы, то ее ранг (и ранг исходной матрицы A) равен r. Следовательно, ранг матрицы A равен числу r угловых элементов (либо числу ненулевых строк) ступенчатой матрицы B, полученной из данной матицы A с помощью элементарных преобразований.

Пример. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Решение. Приведем матрицу A к ступенчатому виду. Для этого умножим первую строку матрицы A на (-3) и сложим ее со второй строкой; затем умножим первую строку на (-4) и сложим ее с третьей строкой. Далее, умножим вторую строку новой матрицы на (-1) и сложим ее с третьей строкой. Получим:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -13 & -5 \\ 0 & 3 & -13 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица содержит две ненулевые строки (это строки с угловыми элементами, равными 1 и 3), поэтому ее ранг равен двум. Тогда и ранг исходной матрицы равен двум: $r(A) = 2$.

2.5. Линейное пространство

2.5.1. n-мерные векторы

Назовем упорядоченную последовательность n чисел *n-мерным арифметическим вектором* и запишем в виде $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, .., a_n)$. Числа $a_1, a_2, .., a_n$ называются *компонентами* вектора $\boldsymbol{a}$, а число n (количество компонент) называется *размерностью* вектора $\boldsymbol{a}$.

Два n-мерных вектора $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, .., a_n)$ и $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *равны* тогда и только тогда, когда равны их соответствующие компоненты, т. е. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, если $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, …, $a_n = b_n$.

Суммой двух векторов одинаковой размерности называется вектор $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, компоненты которого равны суммам соответствующих компонент слагаемых векторов: $c_i = a_i + b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Произведением вектора $\boldsymbol{a}$ на действительное число λ называется вектор $\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{a}$, каждая компонента которого равна произведению числа λ на соответствующую компоненту вектора $\boldsymbol{a}$: $p_i = \lambda a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Операции сложения векторов и умножения вектора на число называются *линейными операциями.* Нетрудно доказать, что линейные операции над n-мерными векторами удовлетворяют следующим условиям (где $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ – n-мерные векторы, α, β – числа):

1) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ – коммутативность сложения векторов;
2) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ – ассоциативность сложения векторов;
3) существование нулевого вектора $\boldsymbol{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, такого, что $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ для любого вектора $\boldsymbol{a}$;
4) существование противоположного вектора $(-\boldsymbol{a})$ для любого n-мерного вектора $\boldsymbol{a}$, такого, что $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = (-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$;
5) $\alpha(\beta\boldsymbol{a}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{a}$ – сочетательное относительно числового множителя свойство;
6) $\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$ – распределительное относительно суммы векторов свойство;
7) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}$ – распределительное относительно суммы числовых множителей свойство;
8) $1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ для любого вектора $\boldsymbol{a}$.

Множество всех n-мерных арифметических векторов, в котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющие указанным восьми условиям, называется *n-мерным арифметическим линейным* (*векторным*) *пространством* и обозначается $\boldsymbol{R}^n$.

Пример 1. Даны векторы $\boldsymbol{a} = (1, -1, 2, 5)$, $\boldsymbol{b} = (2, -1, -3, 4)$, $\boldsymbol{c} = (1, 0, 4, 1)$.

Найти: а) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$; б) $\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$; в) $2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{c}$.

Решение.

а) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (1, -1, 2, 5) + (2, -1, -3, 4) = (1+2, (-1)+(-1), 2+(-3), 5+4) = (3, -2, -1, 9)$.

б) $\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} = (1, -1, 2, 5) - 2(2, -1, -3, 4) = (1, -1, 2, 5) – (4, -2, -6, 8) =$
$= (1-4, (-1)-(-2), 2-(-6), 5-8) = (-3, 1, 8, -3)$.

в) $2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{c} = 2(1, -1, 2, 5) + (2, -1, -3, 4) - 3(1, 0, 4, 1) = (2, -2, 4, 10) + (2, -1, -3, 4) – - (3, 0, 12, 3) = (2+2-3, (-2)+(-1)-0, 4+(-3)-12, 10+4-3) = (1, -3, -11, 11)$.

Кроме линейных операций можно определить умножение векторов пространства $\boldsymbol{R}^n$.

Скалярным произведением двух n-мерных арифметических векторов $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, .., a_n)$ и $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называется число, равное сумме произведений их соответствующих компонент и обозначаемое $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ или $\boldsymbol{ab}$: $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$.

Свойства скалярного произведения ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ – n-мерные векторы, λ – число):

1) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ – скалярное произведение коммутативно;
2) $(\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ – числовой множитель можно выносить за знак скалярного произведения;
3) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ – скалярное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов;
4) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geq 0$ при любом $\boldsymbol{a}$, причем $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

Длиной n-мерного вектора $\boldsymbol{a}$ называется число $\sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}$, обозначаемое $|\boldsymbol{a}|$: $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$. Из свойства 4) скалярного произведения векторов следует, что каждый n-мерный вектор $\boldsymbol{a}$ обладает длиной, причем нулевой вектор $\boldsymbol{0}$ является единственным вектором, длина которого равна нулю: $|\boldsymbol{0}| = 0$. (Заметим, что $|\boldsymbol{a}|$ называется также *абсолютной величиной,* или *модулем,* вектора $\boldsymbol{a}$.)

Скалярное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$ называется *скалярным квадратом* вектора $\boldsymbol{a}$ и обозначается символом $\boldsymbol{a}^2$. Из определения длины вектора следует, что квадрат длины вектора равен его скалярному квадрату: $|\boldsymbol{a}|^2 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}^2$.

Для n-мерных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ можно доказать следующие числовые соотношения:

- $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{a}|$ (λ – любое действительное число);
- $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \leq |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|$ – неравенство Коши-Буняковского;
- $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$ – неравенство треугольника.

Вектор называется *нормированным*, или *единичным*, если его длина равна единице: $|\boldsymbol{a}| = 1$. Каждый ненулевой вектор $\boldsymbol{a}$ можно нормировать, т. е. умножить на такое действительное число λ, чтобы вектор $\lambda\boldsymbol{a}$ был нормированным. Действительно, если $\lambda = \dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}$, то $|\lambda\boldsymbol{a}| = \left|\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}\right| = \dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|} \cdot |\boldsymbol{a}| = 1$.

Из неравенства Коши-Буняковского следует, что для ненулевых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ справедливо следующее неравенство: $-1 \leq \dfrac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|} \leq 1$.

Углом между ненулевыми векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется число φ из отрезка [0, π], удовлетворяющее равенству $\cos\varphi = \dfrac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$. Из этого равенства следует, что скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равно произведению длин этих векторов на косинус угла между ними: $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\varphi$.

Два ненулевых вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются *коллинеарными*, если угол φ между ними равен нулю или π. Если φ = 0, то векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ считаются *одинаково направленными* (обозначается $\boldsymbol{a}\uparrow\uparrow\boldsymbol{b}$), а если φ = π, то векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ *противоположно направлены* (обозначается $\boldsymbol{a}\uparrow\downarrow\boldsymbol{b}$).

Можно доказать, что ненулевые векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существует такое число λ, что $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$. Таким образом, ненулевые *n*-мерные векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие компоненты пропорциональны. Заметим, что нулевой вектор считается коллинеарным с любым вектором $\boldsymbol{a}$, так как $\mathbf{0} = 0\cdot\boldsymbol{a}$.

Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются *ортогональными,* или *перпендикулярными*, если их скалярное произведение равно нулю. Ясно, что нулевой вектор ортогонален каждому вектору. Ненулевые векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ортогональны тогда и только тогда, когда угол между ними равен $\pi/2$.

Пример 2. Вычислить угол между векторами $\boldsymbol{a} = (1, 4, -2, 2)$ и $\boldsymbol{b} = (3, 1, 1, 5)$.

Решение. Сначала вычислим скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$: $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 1\cdot3+4\cdot1+(-2)\cdot1+2\cdot5=15$. Затем найдем длины каждого из векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$: $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{1^2+4^2+(-2)^2+2^2} = \sqrt{25} = 5$; $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{3^2+1^2+1^2+5^2} = \sqrt{36} = 6$. Вычислим косинус угла φ между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ по формуле $\cos\varphi = \dfrac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$: $\cos\varphi = \dfrac{15}{5\cdot6} = \dfrac{1}{2}$. Так как число $\varphi = \arccos\dfrac{1}{2}$ принадлежит отрезку [0, π], то $\varphi = \pi/3$.

Пример 3. Вычислить угол между векторами $3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – единичные перпендикулярные векторы.

Решение. Так как $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – единичные перпендикулярные векторы, то скалярный квадрат каждого вектора равен единице, а их скалярное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$.

Для удобства обозначим $\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} + 5\boldsymbol{b}$. Используя свойства скалярного произведения, найдем: $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) = (3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + 5\boldsymbol{b}) = (3\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + (3\boldsymbol{a}, 5\boldsymbol{b}) + (2\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) + (2\boldsymbol{b}, 5\boldsymbol{b}) = 3(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + 15(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + 2(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) + 10(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = 3(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + 15(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + 10(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = 3(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + 17(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + 10(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = 3\cdot1+15\cdot0+10\cdot1=13$. Далее найдем скалярные квадраты векторов $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$, а затем их длины: $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}) = (3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}, 3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}) = (3\boldsymbol{a}, 3\boldsymbol{a}) + (3\boldsymbol{a}, 2\boldsymbol{b}) + (2\boldsymbol{b}, 3\boldsymbol{a}) + (2\boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{b}) = 9(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + 6(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + 6(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) + 4(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = 9(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + 6(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + 6(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + 4(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = 9(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + 12(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + 4(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = 9 + 0 + 4 = 13$;

$(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} + 5\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + 5\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{a}, 5\boldsymbol{b}) + (5\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) + (5\boldsymbol{b}, 5\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + 5(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + 5(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) + 25(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + 5(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + 5(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + 25(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + 10(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + 25(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = 1 + 0 + 25 = 26$.

$|\boldsymbol{c}| = \sqrt{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{c})} = \sqrt{13}$; $|\boldsymbol{d}| = \sqrt{(\boldsymbol{d},\boldsymbol{d})} = \sqrt{26}$.

Вычислим косинус угла φ между векторами $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ по формуле $\cos\varphi = \dfrac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})}{|\boldsymbol{c}|\cdot|\boldsymbol{d}|}$:

$\cos\varphi = \dfrac{13}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}} = \dfrac{13}{13\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Угол φ между векторами $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ равен $\pi/4$.

2.5.2. Определение линейного пространства

Понятие линейного пространства является одним из основных понятий современной математики. Следует отметить, что в качестве «векторов» – элементов линейного пространства могут рассматриваться объекты любой природы. Поэтому определение линейного пространства формулируется следующим образом:

Непустое множество $\boldsymbol{V}$ элементов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, ... называется *линейным* (*векторным*) *пространством над полем действительных чисел*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

I. Для любых двух элементов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$ однозначно определен третий элемент $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V}$, называемый их *суммой* и обозначаемый $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, причем выполняются свойства:

1) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ (коммутативность);

2) $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$ (ассоциативность);

3) во множестве $\boldsymbol{V}$ существует такой элемент $\mathbf{0}$, что $\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ для всех $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ (существование нулевого элемента);

4) для каждого $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ существует такой элемент $-\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$, что $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ (существование противоположного элемента).

II. Для любого действительного числа α и любого элемента $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ определен элемент $\alpha\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ (*произведение* элемента $\boldsymbol{x}$ на число α), причем выполняются свойства:

5) $\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$ (ассоциативность произведения относительно числового множителя);

6) $\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$ (дистрибутивность произведения относительно суммы элементов);

7) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$ (дистрибутивность произведения относительно суммы числовых множителей);

8) $1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

Можно доказать, что нулевой элемент $\mathbf{0}$ и элемент $(-\boldsymbol{x})$, противоположный элементу $\boldsymbol{x}$, определяются однозначно.

Примеры линейных пространств

1. Совокупность свободных векторов на плоскости или в пространстве с операциями сложения векторов и умножения вектора на действительное число есть линейное пространство.

2. Арифметическое пространство $\boldsymbol{R}^n$ с операциями сложения векторов и умножения вектора на число есть линейное пространство.

3. Множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$ есть линейное пространство с обычными арифметическими операциями сложения и умножения чисел.

4. Множество комплексных чисел $\boldsymbol{C}$ есть линейное пространство с обычными арифметическими операциями сложения и умножения чисел.

5. Множество всех матриц одного и того же размера является линейным пространством относительно операций сложения матриц и умножения матрицы на число.

Важным понятием в теории линейных пространств является понятие линейной зависимости векторов.

Пусть дана система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$ линейного пространства $\mathbf{V}$; выберем m произвольных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ (чисел столько же, сколько векторов в системе). Вектор $\boldsymbol{b} = \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \dots + \lambda_m\boldsymbol{a}_m$ называется *линейной комбинацией* векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Говорят также, что вектор $\boldsymbol{b}$ *разлагается по векторам* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$. Числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ называются *коэффициентами разложения* вектора $\boldsymbol{b}$ по системе векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$.

Система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$ называется *линейно зависимой*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, не равные одновременно нулю, что $\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \dots + \lambda_m\boldsymbol{a}_m = \mathbf{0}$.

Система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ называется *линейно независимой*, если равенство $\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}$ выполняется только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$.

Отметим некоторые свойства линейно зависимых и линейно независимых систем векторов.

- Система, состоящая из одного ненулевого вектора $\boldsymbol{a}$, линейно независима.
- Система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.
- Система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ линейно зависима, если хотя бы один из векторов системы разлагается по остальным векторам этой системы.
- Если часть системы векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ линейно зависима, то и вся система $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ линейно зависима.
- Если система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ линейно независима, то и любая ее часть линейно независима.

Базисом системы векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ называется такая ее часть $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_r$ (каждый из векторов $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_r$ является одним из векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$), которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_r$ – линейно независимая система;

2) любой вектор системы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ разлагается по векторам $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_r$.

Второе условие равносильно следующему: любой вектор системы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$, не входящий в систему $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_r$, может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_r$. Можно доказать, что если система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ содержит ненулевой вектор, то она имеет базис и каждый вектор системы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ единственным образом разлагается по векторам ее базиса.

Система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ может иметь не один базис, но все базисы одной и той же системы векторов содержат одно и то же число векторов, которое называется *рангом* системы векторов. Ранг системы векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ обычно обозначается таким образом: $r(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m) = r$.

Так как базис системы векторов – это часть данной системы, то ранг системы векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ не превосходит числа векторов в системе, т. е. $r \le m$, причем $r < m$, если система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ линейно зависима, и $r = m$, если система векторов линейно независима. Верно и обратное: если $r = m$, то система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ линейно независима, а если $r < m$ – то линейно зависима.

Ранг системы векторов непосредственно связан с рангом матрицы. Так как матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

состоит из m строк и n столбцов, то ее строки можно рассматривать как n-мерные векторы, а столбцы – как m-мерные векторы. Тогда можно считать, что матрица A – это система из m векторов-строк или система из n векторов-столбцов. Можно доказать, что ранги этих двух систем векторов равны между собой и равны рангу матрицы A. Таким образом, для того, чтобы найти ранг системы векторов, нужно записать матрицу, для которой эти векторы будут столбцами или строками, и определить ранг этой матрицы, приведя ее к ступенчатому виду.

Пример. Выяснить, является ли данная система векторов линейно зависимой или линейно независимой: 1) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, -1, -2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (5, 8, -2, -3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3, 9, 3, 8)$;

2) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, -1, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (-1, 1, 2, 5)$, $\boldsymbol{a}_3 = (2, 1, 1, 8)$, $\boldsymbol{a}_4 = (3, 3, 1, -5)$.

Решение. а) Составим матрицу, строки которой равны данным векторам, и приведем ее к ступенчатому виду. Для этого сначала первую строку умножим на (-5) и сложим со второй строкой и, умножив первую строку на (-3), сложим ее с третьей строкой. Далее перепишем первую и вторую строки, а к получившейся третьей строке прибавим вторую строку, умноженную на (-2).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 5 & 8 & -2 & -3 \\ 3 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 6 & 6 & 14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ступенчатая матрица имеет две ненулевые строки, следовательно, ее ранг равен двум. Данная система векторов состоит из трех векторов, а ее ранг равен двум, следовательно, данная система векторов линейно зависима.

б) Составим матрицу, строки которой равны данным векторам, и приведем ее к ступенчатому виду. На первом шаге сложим первую и вторую строки; умножим первую строку на (-2) и сложим с третьей строкой; умножим первую строку на (-3) и сложим с четвертой строкой. На втором шаге прибавим вторую строку к третьей, затем прибавим вторую строку к четвертой строке. Далее разделим все элементы третьей строки на 4. И, наконец, умножив третью строку на (-5), сложим ее с четвертой строкой.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & 4 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -17 \end{pmatrix}$$

Последняя матрица – треугольная, ее ранг равен 4, следовательно, ранг системы векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ тоже равен четырем. Ранг системы векторов равен числу векторов системы, значит, данная система векторов линейно независима.

Линейное пространство $\boldsymbol{V}$ называется *n-мерным*, если в нем существует линейно независимая система из n векторов, а любая система из (n +1) векторов линейно зависима. Число n называется *размерностью* пространства $\boldsymbol{V}$ и обозначается: $n = \dim \boldsymbol{V}$.

Система линейно независимых векторов называется *базисом* пространства $\boldsymbol{V}$, если каждый вектор из $\boldsymbol{V}$ разлагается по векторам этой системы. Каждый базис n-мерного пространства состоит из n векторов, поэтому размерность линейного пространства равна числу векторов его любого базиса.

Пусть $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ – некоторый базис линейного пространства $\boldsymbol{V}$. Можно доказать, что каждый вектор $\boldsymbol{x}$ линейного пространства $\boldsymbol{V}$ можно представить и притом единственным способом в виде линейной комбинации векторов базиса: $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n$. Коэффициенты разложения $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вектора $\boldsymbol{x}$ по базису $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ называются *координатами вектора* $\boldsymbol{x}$ в этом базисе. Базис обычно записывают в виде матрицы-строки $(\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$, а координаты вектора представляют матрицей-столбцом $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Тогда $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a})X$.

Пусть в линейном пространстве $\boldsymbol{V}$ имеются два базиса: старый $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ и новый $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$. Каждый из векторов нового базиса можно выразить в виде линейной комбинации векторов старого базиса:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}_1 &= c_{11}\boldsymbol{a}_1 + c_{12}\boldsymbol{a}_2 + \ldots + c_{1n}\boldsymbol{a}_n, \\ \boldsymbol{b}_2 &= c_{21}\boldsymbol{a}_1 + c_{22}\boldsymbol{a}_2 + \ldots + c_{2n}\boldsymbol{a}_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{b}_n &= c_{n1}\boldsymbol{a}_1 + c_{n2}\boldsymbol{a}_2 + \ldots + c_{nn}\boldsymbol{a}_n. \end{aligned} \qquad (*)$$

Матрица $C^* = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$, составленная из коэффициентов разложения векторов нового базиса по векторам старого базиса (координаты векторов $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ располагаются в этой матрице по столбцам), называется *матрицей перехода* от старого базиса к новому. Если записать каждый базис как матрицу-строку $(\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$, $(\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$, то формулы (*) можно представить в матричном виде: $(\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a})C^*$. Столбцы матрицы C^* являются линейно независимыми, поэтому C^* – невырожденная матрица, следовательно, имеет обратную. Матрица $(C^*)^{-1}$ является матрицей обратного перехода – от нового базиса к старому, так как $(\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{b})(C^*)^{-1}$.

Если вектор $\boldsymbol{x}$ имеет координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ относительно старого базиса и координаты $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ относительно нового базиса, то зависимость между ними осуществляется по формулам:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \left(C^{-1}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ где } C = \left(C^*\right)^T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица C называется *матрицей преобразования координат вектора* при переходе от одного базиса к другому. Так как C является транспонированной по отношению к невырожденной матрице C^*, то она также невырожденная, причем $\det C = \det C^* \neq 0$.

Линейным подпространством $\boldsymbol{L}$ линейного пространства $\boldsymbol{V}$ называется подмножество $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{V}$, если выполняются следующие условия:

1) если $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}$, то $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}$;

2) если $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$, $\lambda \in R$, то $\lambda\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$.

Другими словами, подмножество линейного пространства является линейным подпространством, если оно замкнуто относительно операций сложения векторов и умножения вектора на число. Нетрудно показать, что линейное подпространство само является линейным пространством, т. е. для векторов подпространства выполняются все восемь условий из определения линейного пространства.

2.5.3. Евклидово пространство

Линейное пространство $\boldsymbol{V}$ называется *евклидовым*, если каждой упорядоченной паре векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ из $\boldsymbol{V}$ поставлено в соответствие некоторое действительное число $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, называемое *скалярным произведением* вектора $\boldsymbol{x}$ на вектор $\boldsymbol{y}$ и удовлетворяющее следующим условиям:

1) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ – коммутативность;
2) $(\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ – ассоциативность относительно умножения на число;

3) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, z) = (\boldsymbol{x}, z) + (\boldsymbol{y}, z)$ – дистрибутивность относительно сложения;

4) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$; причем если $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$, то $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ – неотрицательность скалярного квадрата вектора.

Чаще всего евклидово пространство обозначается буквой $\boldsymbol{E}$. В евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$ можно определить *длину* или *норму* вектора, а также угол между векторами.

Длиной (*нормой*) вектора $\boldsymbol{x}$ в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$ называется арифметическое значение корня квадратного из его скалярного квадрата. Обозначается норма (или длина) вектора $\boldsymbol{x}$ так: $|\boldsymbol{x}|$ или $\|\boldsymbol{x}\|$, мы будем применять первое обозначение; таким образом $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$.

Угол φ между двумя векторами $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ определяется условиями: $\cos\varphi = \dfrac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}|}$, $\varphi \in [0, \pi]$.

Два вектора называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю. Нулевой вектор ортогонален каждому вектору по определению. Ненулевые векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ ортогональны тогда и только тогда, когда угол между ними равен $\pi/2$, так как $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$.

Говорят, что векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ n-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{E}$ образуют ортонормированный базис, если эти векторы попарно ортогональны и норма (длина) каждого из них равна единице: $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = 0$ при $i \neq j$; $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i) = 1$, $|\boldsymbol{e}_i| = 1$; $i = 1, 2, \ldots n$.

Можно доказать, что во всяком n-мерном евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$ существует ортонормированный базис. Более того, любой базис евклидова пространства можно преобразовать в ортогональный базис с помощью процесса ортогонализации, а затем, разделив каждый вектор на его длину, получить ортонормированный базис.

Ясно, что n-мерное арифметическое пространство $\boldsymbol{R}^n$ является евклидовым. Примером ортонормированного базиса в $\boldsymbol{R}^n$ служит так называемый *стандартный базис*, состоящий из векторов: $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1, \ldots, 0)$, …, $\boldsymbol{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$. Каждый n-мерный вектор $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ разлагается по стандартному базису с коэффициентами, равными его компонентам: $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_n\boldsymbol{e}_n$, то есть $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – координаты n-мерного вектора $\boldsymbol{a}$ в стандартном базисе.

2.5.4. Понятие линейного оператора

Одно из фундаментальных понятий матричной алгебры – понятие линейного оператора, которое имеет много практических приложений. Пусть $\tilde{A}$: $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}'$ – отображение линейного пространства $\boldsymbol{V}$ в линейное пространство $\boldsymbol{V}'$, ставящее в соответствие каждому вектору $\boldsymbol{x}$ пространства $\boldsymbol{V}$ вектор $\boldsymbol{y} = \tilde{A}\boldsymbol{x}$ пространства $\boldsymbol{V}'$. Вектор называется $\boldsymbol{y}$ *образом* вектора $\boldsymbol{x}$, а вектор $\boldsymbol{x}$ – *прообразом* вектора $\boldsymbol{y}$.

Отображение $\tilde{A}$: $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}'$ называется *линейным*, если оно удовлетворяет следующим двум условиям («условиям линейности»):

1) для любых двух векторов $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ пространства $\boldsymbol{V}$: $\tilde{A}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \tilde{A}\boldsymbol{x}_1 + \tilde{A}\boldsymbol{x}_2$;

2) для любого вектора $\boldsymbol{x}$ пространства $\boldsymbol{V}$ и любого числа λ: $\tilde{A}(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda(\tilde{A}\boldsymbol{x})$.

Из данных условий следует, что любая линейная комбинация $\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + \lambda_m\boldsymbol{x}_m$ каких-либо векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ пространства $\boldsymbol{V}$ при линейном отображении переходит в линейную комбинацию $\lambda_1\boldsymbol{y}_1 + \lambda_2\boldsymbol{y}_2 + \ldots + \lambda_m\boldsymbol{y}_m$ векторов $\boldsymbol{y}_1 = \tilde{A}\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{y}_2 = \tilde{A}\boldsymbol{x}_2$, … $\boldsymbol{y}_m = \tilde{A}\boldsymbol{x}_m$ пространства $\boldsymbol{V}'$ с теми же коэффициентами.

Из первого условия также следует, что всякое линейное отображение переводит нулевой вектор пространства $\boldsymbol{V}$ в нулевой вектор пространства $\boldsymbol{V}'$.

Линейное отображение линейного пространства $\boldsymbol{V}$ в себя называется *линейным оператором*. Примерами являются *нулевой оператор* $\tilde{O}$, переводящий все векторы пространства в нулевой вектор $\tilde{O}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$, *тождественный оператор* $\tilde{I}$, переводящий каждый вектор в себя: $\tilde{I}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.

Пусть $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ – некоторый базис линейного пространства $\boldsymbol{V}$. Линейный оператор $\tilde{A}$ переводит векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ соответственно в векторы $\tilde{A}\boldsymbol{a}_1, \tilde{A}\boldsymbol{a}_2, \dots, \tilde{A}\boldsymbol{a}_n$. Тогда произвольный вектор $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \dots + x_n\boldsymbol{a}_n$ пространства $\boldsymbol{V}$ при отображении $\tilde{A}$ переходит в вектор $\tilde{A}\boldsymbol{x} = x_1\tilde{A}\boldsymbol{a}_1 + x_2\tilde{A}\boldsymbol{a}_2 + \dots + x_n\tilde{A}\boldsymbol{a}_n$. Таким образом, линейный оператор $\tilde{A}$ полностью определен, если заданы образы $\tilde{A}\boldsymbol{a}_1, \tilde{A}\boldsymbol{a}_2, \dots, \tilde{A}\boldsymbol{a}_n$ векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$, образующих какой-нибудь базис линейного пространства $\boldsymbol{V}$. Векторы $\tilde{A}\boldsymbol{a}_1, \tilde{A}\boldsymbol{a}_2, \dots, \tilde{A}\boldsymbol{a}_n$ линейно выражаются через векторы базиса $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$:

$$\begin{aligned}
\tilde{A}\boldsymbol{a}_1 &= a_{11}\boldsymbol{a}_1 + a_{21}\boldsymbol{a}_2 + \dots + a_{n1}\boldsymbol{a}_n,\\
\tilde{A}\boldsymbol{a}_2 &= a_{12}\boldsymbol{a}_1 + a_{22}\boldsymbol{a}_2 + \dots + a_{n2}\boldsymbol{a}_n,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
\tilde{A}\boldsymbol{a}_n &= a_{1n}\boldsymbol{a}_1 + a_{2n}\boldsymbol{a}_2 + \dots + a_{nn}\boldsymbol{a}_n.
\end{aligned}$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, столбцы которой есть координаты векторов

$\tilde{A}\boldsymbol{a}_1, \tilde{A}\boldsymbol{a}_2, \dots, \tilde{A}\boldsymbol{a}_n$ в базисе $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$, называется *матрицей линейного оператора* $\tilde{A}$. Если $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \dots + x_n\boldsymbol{a}_n = (\boldsymbol{a})X$ и $\boldsymbol{y} = \tilde{A}\boldsymbol{x} = y_1\boldsymbol{a}_1 + y_2\boldsymbol{a}_2 + \dots + y_n\boldsymbol{a}_n = (\boldsymbol{a})Y$, то справедливо равенство $Y = AX$. Таким образом, каждому линейному оператору n-мерного пространства $\boldsymbol{V}$ соответствует квадратная матрица A порядка n относительно данного базиса $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$. В разных базисах оператор $\tilde{A}$ имеет, вообще говоря, разные матрицы A и A'.

Пусть в линейном пространстве $\boldsymbol{V}$ имеются два базиса: старый $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ и новый $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_n$, а C^* – матрица перехода от старого базиса к новому: $(\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a})C^*$. Можно доказать, что матрицы A и A' связаны равенством $A' = (C^*)^{-1}AC^*$. Матрицы A и A', связанные таким соотношением, называются *подобными*. Следовательно, матрицы линейного оператора $\tilde{A}$ в различных базисах подобны между собой, причем подобное преобразование осуществляется матрицами перехода от одного базиса к другому. Так как определитель произведения квадратных матриц одного и того же порядка равен произведению их определителей, а определители взаимно обратных матриц есть взаимно обратные числа, то подобные матрицы имеют равные определители. Линейное преобразование (оператор) пространства $\boldsymbol{V}$ называется *невырожденным* (неособенным), если его матрица невырожденная, то есть ее определитель отличен от нуля.

Заметим, что нулевому оператору $\tilde{O}$ в любом базисе соответствует нулевая матрица Θ порядка n, а тождественному оператору $\tilde{I}$ в любом базисе соответствует единичная матрица E порядка n.

На множестве всех линейных преобразований (операторов) пространства $\boldsymbol{V}$ можно ввести операции сложения, умножения числа на линейное преобразование, произведения линейных преобразований, причем результаты этих действий полностью определяются аналогичными действиями над матрицами линейных преобразований в некотором базисе.

Пространство – это логически мыслимая форма (или структура), служащая средой, в которой осуществляются другие формы и те или иные конструкции. Первым и важнейшим математическим пространством является трехмерное евклидово пространство, представляющее приближенный и абстрактный образ реального пространства. Общее понятие пространства в математике сложилось в результате обобщения и видоизменения понятий геометрии евклидова пространства. Общее понятие о математических пространствах как «многократной протяженности» было выдвинуто в 1854 г. Б. Риманом (Bernhard Riemann). В современной математике пространство определяют как множество каких-либо объектов, для которых учитываются только те свойства их совокупности, которые определяются принятыми во внимание или введенными по определению отношениями.

Понятие линейного оператора является наряду с понятием линейного пространства главным в линейной алгебре и играет значительную роль в самых разнообразных областях математики и физики, прежде всего в математическом анализе и его приложениях. Современное определение линейного оператора дал впервые Дж. Пеано (Giuseppe Peano) в 1888 г.

2.6. Системы линейных алгебраических уравнений

2.6.1. Основные понятия

Линейным уравнением относительно неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется выражение вида $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ – числа. При этом $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются *коэффициентами* уравнения, а b – *свободным членом*.

Последовательность n чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$ называется *решением уравнения*, если после подстановки $x_1 = k_1, x_2 = k_2, \ldots, x_n = k_n$ в данное уравнение оно превратится в верное числовое равенство. Решение уравнения можно записывать в виде матрицы-строки $K = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Два решения $K = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ и $L = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ уравнения считаются одинаковыми тогда и только тогда, когда $k_1 = l_1, k_2 = l_2, \ldots, k_n = l_n$. *Решить уравнение* – это значит найти все его решения или установить, что их нет.

Два линейных уравнения называются *равносильными*, если их решения совпадают.

Уравнение $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b$, где $b \neq 0$ называется *противоречивым*; оно не имеет решений.

Уравнение $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$ называется *тривиальным*, оно имеет бесконечно много решений, т. к. любая последовательность чисел $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ является решением этого уравнения: $0 \cdot k_1 + 0 \cdot k_2 + \ldots + 0 \cdot k_n = 0$.

Если в уравнении $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ хотя бы одно из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ отлично от нуля, то уравнение имеет решение. Предположим для определенности, что $a_1 \neq 0$. Тогда $x_1 = \frac{b}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}x_2 - \ldots - \frac{a_n}{a_1}x_n$. В этом случае неизвестное x_1 называется *разрешенным*, а остальные – *свободными* неизвестными. Если $n > 1$, то уравнение имеет бесконечно много решений, т. к. свободным неизвестным можно придавать любые значения бесконечным числом различных способов. При $n = 1$ уравнение имеет единственное решение.

Уравнение $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$ называется *однородным*. Однородное уравнение всегда имеет *нулевое* решение (0, 0, …, 0), т. е. $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Если число неизвестных более одного, то однородное уравнение имеет бесконечно много ненулевых решений; решение уравнения $K = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ считается *ненулевым*, если хотя бы одно из чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$ отлично от нуля.

Системой m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными называется система вида:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m.
\end{cases} \tag{6.1}
$$

Если в системе (6.1) все свободные члены $b_1, b_2, \ldots, b_m$ равны нулю, то она называется *однородной*; в противном случае – *неоднородной*.

Рассмотрим матрицу A, составленную из коэффициентов при неизвестных системы (6.1) и матрицу $\overline{A}$, получаемую из A добавлением столбца свободных членов:

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.
$$

Матрицу A называют *матрицей системы* (6.1), а матрицу $\overline{A}$ называют *расширенной матрицей* системы (6.1). Очевидно, что $r(A) \le r(\overline{A})$, так как каждый минор матрицы A будет минором матрицы $\overline{A}$, но не наоборот. (Заметим, что в некоторых пособиях расширенную матрицу системы уравнений обозначают A^*.)

Если обозначить столбец неизвестных и столбец свободных членов соответственно $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, то систему уравнений (6.1) удобно записывать в так называемой *матричной форме*:

$$
A \cdot X = B. \tag{6.2}
$$

Произведение матриц $A \cdot X$ определено, так как матрица A содержит n столбцов, а матрица X – n строк.

Решением системы линейных уравнений (6.1) называется совокупность n значений неизвестных $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, которая является решением каждого уравнения системы. Система уравнений, имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной*, а система, не имеющая ни одного решения, называется *несовместной*. Совместная система уравнений называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется *частным решением* системы уравнений. Совокупность всех частных решений называется *общим решением*. Решить систему уравнений – это значит выяснить, совместна она или несовместна, и если система совместна, то найти ее общее решение.

Две системы уравнений называются *равносильными,* или *эквивалентными*, если они имеют одно и то же общее решение или обе несовместны. Другими словами, две системы уравнений эквивалентны, если каждое решение одной из них является решением другой и наоборот.

Следующие действия над уравнениями системы называются *элементарными* преобразованиями:

1) перестановка местами двух уравнений системы;

2) умножение обеих частей какого-либо уравнения системы на отличное от нуля число;

3) замена i-го уравнения системы уравнением, которое получается путем почленного сложения i-го и j-го уравнений системы.

Можно доказать, что элементарные преобразования переводят данную систему уравнений в равносильную ей систему уравнений.

Если в результате элементарных преобразований получится тривиальное уравнение, то его можно отбросить; если же получится противоречивое уравнение, то это будет означать, что система уравнений несовместна.

Заметим, что элементарные преобразования над уравнениями системы (6.1) будут соответствовать элементарным преобразованиям над строками матрицы $\overline{A}$, поэтому на практике удобнее работать не с системой уравнений, а с ее расширенной матрицей. Появление тривиального уравнения будет соответствовать нулевой строке расширенной матрицы, а появление противоречивого уравнения – появлению строки, в которой все элементы, кроме последнего, равны нулю.

2.6.2. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Теорема Кронекера-Капелли. Для того чтобы система линейных уравнений (6.1) была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы был равен рангу ее расширенной матрицы, т. е. чтобы $r(A) = r(\overline{A})$.

Обозначим $r(A) = r(\overline{A}) = r$. Из теоремы Кронекера-Капелли следует:

а) если ранг r матрицы A системы линейных уравнений (6.1) равен числу неизвестных (т. е. $r = n$), то эта система имеет единственное решение, причем все неизвестные являются разрешенными;

б) если ранг матрицы совместной системы линейных уравнений (6.1) меньше числа неизвестных ($r < n$), то эта система имеет бесконечно много решений, а именно: некоторым ($n - r$) неизвестным, называемым *свободными неизвестными*, можно придавать произвольные значения, тогда оставшиеся r неизвестных определяются уже единственным образом, т. е. *являются разрешенными*.

Практически для решения систем линейных уравнений чаще всего применяется метод Гаусса, состоящий в последовательном исключении неизвестных.

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений (6.1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) с помощью элементарных преобразований система уравнений (или ее расширенная матрица) приводится к ступенчатому виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \qquad\qquad\qquad a_{rr}x_r + \dots + a_{rn}x_n = b_r, \end{cases} \tag{6.3}$$

где $r \le n,\ a_{ii} \ne 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r.$

Если после определенного шага получится система, содержащая противоречивое уравнение, тогда исходная система уравнений несовместна. Если ступенчатая система

(6.3) не содержит противоречивого уравнения, то можно переходить ко второму этапу метода Гаусса.

На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из ступенчатой системы (6.3).

Возможны два случая:

- $r = n$. Тогда последнее уравнение системы имеет вид: $a_{nn}x_n = b_n$, откуда $x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$. Из предпоследнего уравнения находим x_{n-1} и т. д. Из первого уравнения системы (6.3) находим x_1. Система уравнений имеет единственное решение;
- $r < n$. Тогда система имеет бесчисленное множество решений. Полагаем $x_{r+1},\ldots,x_n$ свободными неизвестными. Из последнего уравнения этой системы выражаем x_r через свободные неизвестные $x_{r+1},\ldots,x_n$. Затем подставляем значение x_r в предпоследнее уравнение системы (3) и выражаем x_{r-1} через свободные неизвестные $x_{r+1},\ldots,x_n$ и так далее. Получим общее решение системы уравнений (6.3), которое будет общим решением равносильной ей исходной системы (6.1).

Замечание. Обычно разрешенными (несвободными) считаются неизвестные, коэффициенты при которых в ступенчатой системе – угловые элементы, хотя это не обязательно.

Пример 1. Решить методом Гаусса систему уравнений: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$.

Решение. Запишем расширенную матрицу данной системы уравнений:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Умножив первую строку на $-\dfrac{3}{2}$, сложим ее со второй; затем, умножив первую строку на $-\dfrac{5}{2}$, сложим ее с третьей строкой; и, наконец, умножив первую строку на -1, сложим ее с четвертой строкой. В полученной матрице умножим вторую и третью строки на 2 (для того чтобы получились целые числа; но это делать не обязательно).

$$\overline{A} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -7 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Далее первую и вторую строки оставляем без изменения. Потом умножим вторую строку на $-\dfrac{3}{7}$ и сложим с третьей строкой, затем умножим вторую строку на $-\dfrac{2}{7}$ и сложим с четвертой строкой. После этого умножим третью и четвертую строки на 7. Затем умножим третью строку на $\frac{1}{2}$ и сложим результат с четвертой строкой.

$$\overline{A} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{20}{7} & -\frac{52}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{7} & \frac{19}{7} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -52 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -52 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Последняя, четвертая, строка полученной ступенчатой матрицы означает, что система уравнений, равносильная данной системе, содержит противоречивое уравнение $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -7$, следовательно, она несовместна. Тогда и данная система уравнений тоже несовместна.

Пример 2. Решить методом Гаусса систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4 \end{cases}$.

Решение. Запишем расширенную матрицу данной системы уравнений:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Умножим сперва первую строку на (-1) и сложим со второй строкой, затем умножим первую строку на (-3) и сложим с третьей строкой и, наконец, умножим первую строку на (-2) и сложим с четвертой строкой. После этого сложим вторую строку с третьей, затем сложим вторую строку с четвертой.

$$\overline{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нулевые строки отбрасываем. Остается система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ \quad x_2 - 10x_3 + 17x_4 = -2 \end{cases}$$

Будем считать x_3 и x_4 свободными неизвестными. Из второго уравнения системы найдем x_2: $x_2 = 10x_3 - 17x_4 - 2$. Подставив найденное значение x_2 в первое уравнение, получим: $x_1 + 2(10x_3 - 17x_4 - 2) - 3x_3 + 5x_4 = 1$, или $x_1 + 20x_3 - 34x_4 - 4 - 3x_3 + 5x_4 = 1$. Откуда $x_1 = -17x_3 + 29x_4 + 5$.

Таким образом, данная система имеет бесчисленное множество решений. Ее общее решение: $\begin{cases} x_1 = -17x_3 + 29x_4 + 5 \\ x_2 = 10x_3 - 17x_4 - 2 \end{cases}$.

Пример 3. Решить методом Гаусса систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15 \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11 \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23 \end{cases}$.

Решение. Рассмотрим расширенную матрицу системы уравнений

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 15 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 5 & 23 \end{pmatrix}.$$

Умножим первую строку на (-4) и сложим с третьей строкой, затем умножим первую строку на (-1) и сложим с четвертой строкой. Затем умножим вторую строку на 8 и сложим с третьей строкой, а также прибавим вторую строку к четвертой. Получим

$$\overline{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 15 \\ 0 & -8 & -3 & 1 & 21 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 21 & 9 & 99 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 30 \end{pmatrix}.$$

Разделим третью строку на 3, а четвертую строку на 2 и поменяем местами третью и четвертую строки; после этого умножим третью строку на (-7) и сложим с четвертой строкой.

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 7 & 3 & 33 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -18 & -72 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, первоначальная система уравнений сводится к системе:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15 \\ x_3 + 3x_4 = 15 \\ -18x_4 = -72 \end{cases}$$

Из последнего уравнения $x_4 = 4$. Из третьего уравнения $x_3 = 15 - 3x_4 = 3$. Из второго уравнения $x_2 = 15 - 3x_3 - x_4 = 2$. Из первого уравнения $x_1 = 8 - 2x_2 - x_3 = 1$.

Таким образом, данная система имеет единственное решение $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$ или (1, 2, 3, 4).

Метод последовательного исключения переменных при решении системы линейных уравнений был впервые описан К. Гауссом в 1849 г. Этот метод является универсальным методом решения систем линейных уравнений и удобен при небольших *n*. Так как он является алгоритмичным, то этот метод пригоден и для осуществления на ЭВМ.

2.6.3. Решение невырожденных систем линейных уравнений

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{6.4}$$

или в матричной форме $A \cdot X = B$.

Матрица A такой системы квадратная. Если определитель этой матрицы $\det A = \Delta$ отличен от нуля, то система уравнений, как и сама матрица, называется *невырожденной*. В этом случае существует матрица A^{-1}, обратная матрице A. Умножив обе части уравнения $A \cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Поскольку $A^{-1} \cdot A = E$ и $E \cdot X = X$, то

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{6.5}$$

Отыскание решения системы уравнений (6.4) по формуле (6.5) называют *матричным способом* решения системы.

Так как матрицей, обратной для невырожденной матрицы A, будет матрица

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} есть алгебраическое дополнение элемента a_{ij} определителя $\Delta = \det(A)$, то равенство (6.5) можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

откуда следует, что

$$x_1 = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n}{\Delta},$$

$$x_2 = \frac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n}{\Delta},$$

....

$$x_n = \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n}{\Delta}.$$

Но $A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n$ есть разложение определителя

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

по элементам первого столбца. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов. Таким образом, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$. Аналогично: $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, где определитель Δ_2 получен из определителя Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов; точно так же $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$, …, $x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$, а любой из определителей Δ_i получен из определителя Δ путем замены i-го столбца коэффициентов столбцом из свободных членов. Формулы

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},\ \dots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \qquad (6.6)$$

называются формулами Крамера, по имени швейцарского математика Габриеля Крамера.

Вывод. Невырожденная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение, которое может быть найдено (помимо метода Гаусса) либо матричным способом (6.5), либо по формулам Крамера (6.6).

Пример. Решить систему уравнений матричным методом и по формулам Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = -5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

Решение. 1) Матричный метод.

Выпишем матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Находим определитель матрицы A:

$$\Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 12 + 3 + 27 - 2 + 2 = 45 \neq 0$$

Так как $\Delta \neq 0$, то матрица A – невырожденная, следовательно, существует обратная матрица A^{-1}. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1;\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-2-3) = 5;\ A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 9 = 13$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-6) = 7;\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 9 = -10;\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2-3) = 1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 9 = 10;\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1-6) = 5;\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5.$$

Теперь выпишем матрицу A^{-1}, обратную матрице A:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 10 \\ 5 & -10 & 5 \\ 13 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Найдем решение системы по формуле (6.5):

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 10 \\ 5 & -10 & 5 \\ 13 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 1 \cdot (-5) + 7 \cdot 0 + 10 \cdot 5 \\ 5 \cdot (-5) - 10 \cdot 0 + 5 \cdot 5 \\ 13 \cdot (-5) + 1 \cdot 0 - 5 \cdot 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 45 \\ 0 \\ -90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

или $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, отсюда $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -2$.

2) Решение по формулам Крамера.

Определитель матрицы системы уже вычислен: $\Delta = 45 \neq 0$. Составим и вычислим определители Δ_1, Δ_2, Δ_3.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -15 + 5 + 0 + 45 + 10 + 0 = 45;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 15 + 30 - 0 - 5 - 10 = 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -15 + 0 - 20 - 45 - 10 - 0 = -90.$$

По формулам (6.6) находим:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{45}{45} = 1;\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{45} = 0;\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-90}{45} = -2.$$

Формулы (6.6) были найдены швейцарским математиком Г. Крамером (G. Cramer) и опубликованы в 1750 г. Значение правила Крамера заключается в том, что когда это правило применимо, оно дает явное выражение для решения системы через коэффициенты этой системы. Матричный метод обычно применяется в случае многократного решения систем линейных уравнений с одной и той же невырожденной матрицей.

2.6.4. Однородные системы линейных алгебраических уравнений

Система линейных уравнений называется *однородной*, если все ее свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (6.7)$$

или в матричной форме $A \cdot X = \Theta$.

Так как расширенная матрица $\overline{A}$ системы в данном случае получается путем приписывания нулевого столбца к основной матрице A системы, то $r(A) = r(\overline{A})$. Следовательно, однородная система всегда совместна. Одним из решений системы (6.7) является *нулевое,* или *тривиальное,* решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$,..., $x_n = 0$. Всякое другое решение (если оно существует), у которого значение хотя бы одного неизвестного отлично от нуля, называется *ненулевым* (*нетривиальным*).

Вопрос о существовании ненулевых решений связан с рангом матрицы системы уравнений (6.7). А именно: если ранг матрицы $r = n$, то система имеет единственное нулевое решение. Если $r < n$, то система (6.7) имеет бесконечно много решений, среди которых есть и нулевое решение.

Таким образом, имеет место:

Теорема 1. Для того чтобы однородная система линейных уравнений имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был меньше числа неизвестных.

Если число уравнений системы совпадает с числом неизвестных, то условие $r < n$ равносильно тому, что определитель системы равен нулю. Таким образом, для случая $m = n$ справедлива:

Теорема 2. Для того чтобы однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю.

Пример 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$.

Решение. Найдем определитель системы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6 - 6 - 1 + 9 + 8 = 6 \neq 0$$

Так как $\Delta \neq 0$, то данная система имеет единственное нулевое решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

Пример 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$

Решение. Выпишем матрицу системы и найдем ее ранг, приведя к ступенчатому виду. Для этого умножим элементы первой строки последовательно на (-2), (-3), (-2) и сложим их с соответствующими элементами второй, третьей и четвертой строк соответственно. Имеем:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Последнюю матрицу мы получили, поменяв в предыдущей матрице местами вторую и четвертую строки. Умножим далее вторую строку на 4 и сложим ее с третьей строкой, затем умножим вторую строку на 5 и сложим ее с четвертой строкой. Получим:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как число угловых элементов ступенчатой матрицы равно трем, то ранг матрицы системы равен 3, т. е. $r(A) = 3$. Выпишем ступенчатую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ -x_2 - x_3 = 0, \\ -8x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

Число неизвестных $n = 5$, т. е. $r < n$, следовательно, система имеет бесчисленное множество решений. Чтобы найти эти решения, будем считать свободными неизвестными x_4 и x_5. Из последнего уравнения ступенчатой системы выразим x_3 через x_4 и x_5: $x_3 = \frac{4}{8}x_4 - \frac{5}{8}x_5$. Подставим полученное выражение во второе уравнение и выразим из него x_2: $-x_2 - \left(\frac{4}{8}x_4 - \frac{5}{8}x_5\right) = 0;$ $x_2 = -\frac{4}{8}x_4 + \frac{5}{8}x_5$. Теперь подставим найденные значения x_2 и x_3 в первое уравнение системы и выразим x_1: $x_1 - 2\cdot\left(-\frac{4}{8}x_4 + \frac{5}{8}x_5\right) + \left(\frac{4}{8}x_4 - \frac{5}{8}x_5\right) - x_4 + x_5 = 0$; $x_1 + \frac{4}{8}x_4 - \frac{7}{8}x_5 = 0$; $x_1 = -\frac{4}{8}x_4 + \frac{7}{8}x_5$.

Общее решение системы: $x_1 = -\frac{4}{8}x_4 + \frac{7}{8}x_5$; $x_2 = -\frac{4}{8}x_4 + \frac{5}{8}x_5$; $x_3 = \frac{4}{8}x_4 - \frac{5}{8}x_5$.

Придавая свободным неизвестным x_4 и x_5 всевозможные действительные значения, можно получить бесконечно много частных решений.

Решения однородной системы уравнений обладают следующими свойствами:

1. Если K и L – решения однородной системы, то $K+L$ также является решением этой системы.

2. Если K – решение однородной системы, то αK, где α – число, также является решением этой системы.

Так как $K=(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ и $L=(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ – векторы линейного арифметического пространства $\boldsymbol{R}^n$, то из указанных свойств следует, что множество всех решений однородной системы линейных уравнений с n неизвестными является подпространством пространства $\boldsymbol{R}^n$ и называется *пространством решений* однородной системы линейных уравнений. Любой базис пространства решений однородной системы линейных уравнений называется *фундаментальной системой решений* (ФСР). Другими словами, фундаментальная система решений – это такая линейно независимая система решений F_1,

F_2, …, F_k однородной системы уравнений $A \cdot X = \Theta$, что каждое решение системы $A \cdot X = \Theta$ является линейной комбинацией решений F_1, F_2, …, F_k.

Если ранг матрицы системы $A \cdot X = \Theta$ меньше числа неизвестных, $r < n$, то число свободных неизвестных равно n-r, следовательно, всякая ФСР этой системы уравнений состоит из n-r решений. Находят их обычно следующим образом. Если $x_1, x_2, \ldots, x_r$ набор разрешенных неизвестных, а $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ свободные неизвестные, рассматриваем n-r наборов значений для свободных неизвестных, в каждом из которых одному неизвестному дается значение 1, а остальным – значение 0. Далее в общее решение системы подставляем значения свободных неизвестных из каждого набора и находим значения разрешенных неизвестных.

Пример 3. Найти фундаментальную систему решений однородной системы уравнений
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 7x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + x_5 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 - x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Запишем матрицу A системы уравнений и приведем ее к ступенчатому виду:
$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & -2 & 7 \\ 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -7 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & -2 & 7 \\ 3 & -2 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & -7 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 26 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 13 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 13 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 13 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 26 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 13 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 13 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выпишем систему уравнений с коэффициентами из последней матрицы:
$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_5 = 0, \\ 13x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

В качестве разрешенных неизвестных этой системы удобнее взять x_1 и x_4 (если взять x_2, то в общем решении будут дробные коэффициенты), тогда свободными неизвестными будут x_2, x_3 и x_5. Найдем общее решение системы уравнений:
$$\begin{cases} x_1 = 5x_2 - x_5, \\ x_4 = 13x_2 + 2x_3 + x_5. \end{cases}$$

Найдем ФСР. Возьмем три набора значений для свободных неизвестных:

$x_2 = 1, x_3 = 0, x_5 = 0,$

$x_2 = 0, x_3 = 1, x_5 = 0,$

$x_2 = 0, x_3 = 0, x_5 = 1.$

Подставляя значения первого набора в общее решение, найдем $x_1 = 5$, $x_4 = 13$. Значит, первое решение из ФСР имеет вид: $F_1 = (5, 1, 0, 13, 0)$. Подставляя значения второго и третьего наборов в общее решение, получим: $F_2 = (0, 0, 1, 2, 0)$, $F_3 = (-1, 0, 0, 1, 1)$.

Векторы F_1, F_2, F_3 образуют фундаментальную систему решений данной однородной системы уравнений.

Можно оформить нахождение ФСР в виде таблицы (свободные неизвестные и их значения выделены):

x_1	**x_2**	**x_3**	x_4	**x_5**
5	**1**	**0**	13	**0**
0	**0**	**1**	2	**0**
-1	**0**	**0**	1	**1**

2.6.5. Общее решение системы линейных алгебраических уравнений в векторной форме

Рассмотрим совместную систему линейных уравнений $A \cdot X = B$. Если заменить столбец свободных членов B нулевым столбцом Θ, то получится однородная система $A \cdot X = \Theta$, которая называется *приведенной* для системы уравнений $A \cdot X = B$.

Можно доказать, что произвольное решение X совместной системы линейных уравнений $A \cdot X = B$ определяется формулой $X = K + \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \ldots + \alpha_k F_k$, где K – какое-нибудь частное решение этой системы, а $F_1, F_2, \ldots, F_k$ – фундаментальная система решений приведенной системы уравнений, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – произвольные числа.

Решение совместной системы линейных уравнений $A \cdot X = B$, записанное в виде $X = K + \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \ldots + \alpha_k F_k$, называется *общим решением системы уравнений в векторной форме.*

Так как в качестве частного решения однородной системы уравнений можно взять нулевое решение, то общее решение однородной системы уравнений в векторной форме имеет вид: $X = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \ldots + \alpha_k F_k$, где $F_1, F_2, \ldots, F_k$ – фундаментальная система решений данной однородной системы уравнений, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – произвольные числа.

Таким образом, общее решение совместной системы уравнений в векторной форме равно сумме какого-либо частного решения этой системы и общего решения приведенной системы в векторной форме.

Пример. Найти в векторной форме общее решение системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение. Выпишем основную матрицу и расширенную матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выпишем ступенчатую систему и приведенную ступенчатую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0, \\ -4x_3 + 4x_4 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0, \\ -4x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Найдем общее решение неприведенной системы уравнений, считая x_4 свободным неизвестным:

$$-4x_3 = -4x_4 \Rightarrow x_3 = x_4;$$
$$-x_2 - 2\cdot x_4 - 7x_4 = 0 \Rightarrow -x_2 = 9x_4 \Rightarrow x_2 = -9x_4;$$
$$x_1 + 2\cdot(-9x_4) + 3\cdot x_4 + 4x_4 = 1 \Rightarrow x_1 - 11x_4 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 + 11x_4.$$
$$\begin{cases} x_1 = 1 + 11x_4, \\ x_2 = -9x_4, \\ x_3 = x_4. \end{cases}$$

Найдем частное решение этой системы: пусть $x_4 = 0$, тогда $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$; значит, $K = (1, 0, 0, 0)$ – частное решение данной системы.

Найдем ФСР приведенной системы уравнений. Сначала найдем общее решение приведенной системы, считая x_4 свободным неизвестным:

$$-4x_3 = -4x_4 \Rightarrow x_3 = x_4;$$
$$-x_2 - 2\cdot x_4 - 7x_4 = 0 \Rightarrow -x_2 = 9x_4 \Rightarrow x_2 = -9x_4;$$
$$x_1 + 2\cdot(-9x_4) + 3\cdot x_4 + 4x_4 = 0 \Rightarrow x_1 - 11x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = 11x_4.$$
$$\begin{cases} x_1 = 11x_4, \\ x_2 = -9x_4, \\ x_3 = x_4. \end{cases}$$

Свободное неизвестное одно, поэтому ФСР содержит всего один вектор; при x_4 = 1 получим: $x_1 = 11$, $x_2 = -9$, $x_3 = 1$; $F_1 = (11, -9, 1, 1)$.

Тогда общее решение данной системы уравнений в векторной форме имеет вид:

$X = K + \alpha_1 F_1 = (1, 0, 0, 0) + \alpha_1\ (11, -9, 1, 1)$, где α_1 – любое число.

2.7. Собственные векторы и собственные значения матрицы

Пусть A – квадратная матрица порядка n, $\boldsymbol{x}$ – n-мерный вектор. Число λ называется *собственным значением* (или *характеристическим числом*) матрицы A, если существует такой ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$, что $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Вектор $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ называется при этом *собственным вектором* матрицы A, принадлежащим ее собственному значению λ.

Из определения следует, что собственный вектор при умножении на матрицу A преобразуется в коллинеарный ему вектор, а несобственные векторы преобразуются более сложным образом. Понятие собственного вектора является удобным при изучении многих вопросов матричной алгебры и ее приложений.

Для того, чтобы найти собственные значения матрицы A, равенство $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ перепишем в виде $A\boldsymbol{x} - \lambda\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, или, что то же самое, $A\boldsymbol{x} - \lambda E\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Умножение матриц дистрибутивно относительно сложения, поэтому $(A - \lambda E)\ \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Последнее равенство определяет однородную систему уравнений с квадратной матрицей $(A - \lambda E)$ порядка n. Для существования ненулевого решения $\boldsymbol{x}$ необходимо и достаточно, чтобы определитель этой матрицы был равен нулю: $\det\ (A - \lambda E) = 0$. Определитель $\det\ (A - \lambda E)$ является многочленом n-й степени относительно неизвестного λ и называется *характеристическим многочленом* матрицы A. Уравнение $\det\ (A - \lambda E) = 0$ называется *характеристическим уравнением* матрицы A.

Можно доказать, что множество всех собственных значений матрицы A совпадает с множеством всех решений характеристического уравнения $\det\ (A - \lambda E) = 0$ матрицы A.

Из определения собственного вектора матрицы следует, что если $\boldsymbol{x}$ – собственный вектор матрицы A, принадлежащий ее собственному значению λ, то и $\alpha\boldsymbol{x}$, где α – число, тоже собственный вектор матрицы A, принадлежащий собственному значению λ. Обозначим через $A(\lambda)$ множество всех собственных векторов матрицы A, принадлежащих собственному значению λ. Нетрудно показать, что множество $A(\lambda)$ всех собственных векторов матрицы A порядка n, принадлежащих собственному значению λ, совпадает с множеством всех решений однородной системы линейных уравнений $(A - \lambda E)X = \Theta$, где X – вектор-столбец неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Таким образом, для того, чтобы найти все собственные векторы матрицы A, нужно:

1) составить и решить характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$; полученные значения λ_i будут собственными значениями матрицы A;

2) для каждого из собственных значений λ_i записать систему однородных уравнений $(A - \lambda_i E)X = \Theta$ и найти ее фундаментальную систему решений $f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, \ldots, f_k^{(i)}$;

3) произвольный собственный вектор $\boldsymbol{x}^{(i)}$ из $A(\lambda_i)$ имеет вид $\boldsymbol{x}^{(i)} = \alpha_1 f_1^{(i)} + \alpha_2 f_2^{(i)} + \ldots + \alpha_k f_k^{(i)}$.

Пример. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Найдем характеристический многочлен матрицы A:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 6 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(2-\lambda) + 4\cdot 2\cdot 0 + 6\cdot 0\cdot 1 - 6\cdot(3-\lambda)\cdot 0 -$$

$$-(5-\lambda)\cdot 2\cdot 1 - 4\cdot 0\cdot(2-\lambda) = (5-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(2-\lambda) - (5-\lambda)\cdot 2\cdot 1 = (5-\lambda)\cdot((3-\lambda)(2-\lambda) - 2) =$$

$$= (5-\lambda)(6 - 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 2) = (5-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4).$$

Решим характеристическое уравнение:

$(5-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0;\quad \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 1$. Матрица имеет три различных собственных значения.

1) Найдем множество $A(5)$ всех собственных векторов матрицы A, принадлежащих собственному значению $\lambda_1 = 5$.

Так как $A - 5E = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$,

то система линейных уравнений $(A - 5E)X = \Theta$ имеет вид: $\begin{cases} 4x_2 + 6x_3 = 0, \\ -2x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

Найдем общее решение этой системы методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\begin{cases} x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases}$ $x_1 -$ свободное неизвестное.

Придавая свободному неизвестному x_1 значение 1, выпишем вектор $f_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, составляющий фундаментальную систему решений (ФСР) данной системы уравнений. Произвольный собственный вектор $\boldsymbol{x}^{(1)}$ из $A(5)$ имеет вид $\boldsymbol{x}^{(1)} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, α_1– любое действительное число, отличное от нуля.

2) Найдем множество $A(4)$ всех собственных векторов матрицы A, принадлежащих собственному значению $\lambda_2 = 4$.

Так как $A - 4E = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$,

то система линейных уравнений $(A - 4E)X = \Theta$ имеет вид: $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0, \\ -x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

Найдем общее решение этой системы методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0, \\ -x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Пусть x_3 – свободное неизвестное; найдем: $\begin{matrix} x_2 = 2x_3, \\ x_1 + 4 \cdot 2x_3 + 6x_3 = 0, \Rightarrow x_1 = -14x_3 \end{matrix}$. Таким образом, общее решение системы имеет вид: $\begin{cases} x_1 = -14x_3, \\ x_2 = 2x_3. \end{cases}$ Придавая свободному неизвестному x_3 значение 1, выпишем вектор $f_1^{(2)} = \begin{pmatrix} -14 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, составляющий ФСР этой системы уравнений. Произвольный собственный вектор $\boldsymbol{x}^{(2)}$ из $A(4)$ имеет вид $\boldsymbol{x}^{(2)} =$ $=\beta_1 \begin{pmatrix} -14 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, где β_1 – любое действительное число, отличное от нуля.

3) Найдем множество $A(1)$ всех собственных векторов матрицы A, принадлежащих собственному значению $\lambda_3 = 1$.

Так как $A - 1 \cdot E = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, то система линейных уравнений $(A - E)X = \Theta$ имеет вид: $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0, \\ 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

Найдем общее решение этой системы методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Пусть x_3 – свободное неизвестное; найдем: $\begin{matrix} x_2 = -x_3, \\ 4x_1 + 4 \cdot (-x_3) + 6x_3 = 0, \Rightarrow x_1 = -0{,}5x_3 \end{matrix}$.

Таким образом, общее решение системы имеет вид: $\begin{cases} x_1 = -0{,}5x_3, \\ x_2 = -x_3. \end{cases}$ Придавая свободному неизвестному x_3 значение 1, выпишем вектор $f_1^{(3)} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, составляющий ФСР данной системы уравнений. Произвольный собственный вектор $\boldsymbol{x}^{(3)}$ из $A(1)$ имеет вид $\boldsymbol{x}^{(3)} =$ $= \gamma_1 \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, γ_1 – любое действительное число, отличное от нуля.

Свойства собственных векторов матрицы

1. Линейная комбинация собственных векторов матрицы, принадлежащих одному и тому же собственному значению λ, есть собственный вектор этой матрицы, принадлежащий собственному значению λ.

2. Собственные векторы матрицы, принадлежащие ее различным собственным значениям, линейно независимы.

3. Матрица A порядка n имеет не более n различных собственных значений.

4. Если матрица A порядка n имеет ровно n различных собственных значений, то соответствующие им n собственных векторов образуют базис пространства R^n.

5. Если A – симметрическая матрица порядка n, то в пространстве R^n существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов матрицы A.

Замечание. Собственные векторы определяются, прежде всего, для линейного оператора. Всякий ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$ линейного пространства $\boldsymbol{L}$ называется *собственным вектором* линейного оператора Ã, если Ã$\boldsymbol{x}$ = λ$\boldsymbol{x}$ при некотором числе λ, которое называется *собственным значением* оператора Ã. Линейный оператор определяется матрицей в некотором базисе, поэтому собственные векторы и собственные значения линейного оператора – это собственные векторы и собственные значения соответствующей матрицы. Можно доказать, что подобные матрицы имеют одни и те же собственные векторы и собственные значения. Так как матрицы линейного оператора Ã в различных базисах подобны между собой, то задача нахождения собственных векторов и собственных значений линейного оператора Ã сводится к нахождению собственных векторов и собственных значений матрицы A, задающей оператор Ã в каком-либо базисе.

2.8. Квадратичные формы

Квадратичной формой $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется сумма, каждое слагаемое которой является или квадратом одного из этих неизвестных, или произведением двух разных неизвестных, взятым с каким-либо коэффициентом. Коэффициент при x_i^2 обозначается a_{ii}, а коэффициент при произведении $x_i x_j$ $(i \neq j)$ – через $a_{ij} + a_{ji}$, причем $a_{ij} = a_{ji}$, поэтому $a_{ij} + a_{ji} = 2\,a_{ij}$. Например, выпишем в общем виде квадратичные формы от двух и трех неизвестных: $Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2$;
$Q(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$.

Симметрическая матрица из коэффициентов a_{ij} называется *матрицей квадратичной формы*. Для квадратичных форм от двух и трех неизвестных это будут соответственно матрицы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $a_{12} = a_{21}$ и $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\begin{matrix} a_{12} = a_{21}, \\ a_{13} = a_{31}, \\ a_{23} = a_{32}. \end{matrix}$

Квадратичную форму можно записать в матричном виде:

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Пример 1. Записать квадратичную форму $Q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_3 - 12x_2x_3$ в матричном виде.

Решение. Определим элементы матрицы квадратичной формы; выпишем коэффициенты при квадратах неизвестных: $a_{11} = 4$, $a_{22} = -3$, $a_{33} = 1$; так как отсутствует произведение x_1x_2, то $2a_{12} = 0$, значит, и $a_{12} = a_{21} = 0$; далее $2a_{13} = 6$, следовательно, $a_{13} = a_{31} = 3$; $2a_{23} = -12$, следовательно, $a_{23} = a_{32} = -6$. Матрица данной квадратичной формы имеет вид: $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$. Запишем квадратичную форму в матричном виде:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 3 & -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Говорят, что квадратичная форма $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет *канонический вид*, если все коэффициенты при произведениях неизвестных равны нулю, то есть в ее записи присутствуют только квадраты неизвестных: $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2$. Матрица квадратичной формы в каноническом виде является диагональной. Существуют различные способы приведения квадратичной формы к каноническому виду. Рассмотрим один из них, а именно *метод выделения полных квадратов*.

Пример 2. Привести к каноническому виду квадратичную форму: $Q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_3 - 12x_2x_3$.

Решение.

1) Вначале выделим полный квадрат при неизвестном, коэффициент при квадрате

которого отличен от нуля, например возьмем x_1. Выпишем все члены, содержащие x_1, и дополним это выражение до квадрата двучлена, предварительно вынося за скобки коэффициент при x_1^2:

$$4x_1^2+6x_1x_3=4\left(x_1^2+\frac{6}{4}x_1x_3\right)=4\left(x_1^2+2\cdot\frac{3}{4}x_1x_3\right)=4\left(x_1^2+2\cdot x_1\cdot\left(\frac{3}{4}x_3\right)+\left(\frac{3}{4}x_3\right)^2-\left(\frac{3}{4}x_3\right)^2\right)=$$

$$=4\left(\left(x_1^2+2\cdot x_1\cdot\left(\frac{3}{4}x_3\right)+\left(\frac{3}{4}x_3\right)^2\right)-\left(\frac{3}{4}x_3\right)^2\right)=4\left(x_1+\frac{3}{4}x_3\right)^2-4\cdot\frac{9}{16}x_3^2=4\left(x_1+\frac{3}{4}x_3\right)^2-\frac{9}{4}x_3^2.$$

Таким образом, исходная форма будет иметь вид:

$$Q(x_1,x_2,x_3)=4\left(x_1+\frac{3}{4}x_3\right)^2-\frac{9}{4}x_3^2-3x_2^2+x_3^2-12x_2x_3=4\left(x_1+\frac{3}{4}x_3\right)^2-3x_2^2-\frac{5}{4}x_3^2-12x_2x_3.$$

Теперь выделяем полный квадрат при неизвестном x_2, коэффициент при квадрате которого отличен от нуля. Выпишем все члены, содержащие x_2, и дополним это выражение до квадрата двучлена, предварительно вынося за скобки коэффициент при x_2^2:

$$-3x_2^2-12x_2x_3=-3\left(x_2^2+4x_2x_3\right)=-3\left(x_2^2+2\cdot x_2\cdot(2x_3)+(2x_3)^2-(2x_3)^2\right)=$$
$$=-3\left(\left(x_2^2+2\cdot x_2\cdot(2x_3)+(2x_3)^2\right)-4x_3^2\right)=-3(x_2+2x_3)^2+12x_3^2.$$

После этого исходная форма примет вид: $Q(x_1, x_2, x_3)=$

$$4\left(x_1+\frac{3}{4}x_3\right)^2-3(x_2+2x_3)^2+12x_3^2-\frac{5}{4}x_3^2=4\left(x_1+\frac{3}{4}x_3\right)^2-3(x_2+2x_3)^2+10\frac{3}{4}x_3^2.$$

Обозначив $y_1=x_1+\frac{3}{4}x_3$, $y_2=x_2+2x_3$, $y_3=x_3$, получим канонический вид исходной формы:

$Q_1(y_1, y_2, y_3) = 4y_1^2-3y_2^2+10\frac{3}{4}y_3^2$. Формулы $y_1=x_1+\frac{3}{4}x_3$, $y_2=x_2+2x_3$, $y_3=x_3$ являются формулами невырожденного линейного преобразования, которое приводит исходную квадратичную форму к каноническому виду.

2) Теперь выполним приведение квадратичной формы к каноническому виду по-другому. Вначале выделим полный квадрат при неизвестном x_3, коэффициент при квадрате которого отличен от нуля. Выпишем все члены, содержащие x_3, и дополним это выражение до квадрата двучлена:

$$x_3^2+6x_1x_3-12x_2x_3=x_3^2+2\cdot x_3\cdot(3x_1-6x_2)=$$
$$=x_3^2+2\cdot x_3\cdot(3x_1-6x_2)+(3x_1-6x_2)^2-(3x_1-6x_2)^2=$$
$$=(x_3+(3x_1-6x_2))^2-(3x_1-6x_2)^2=(x_3+(3x_1-6x_2))^2-9x_1^2+36x_1x_2-36x_2^2.$$

После этого исходная квадратичная форма принимает вид:

$$4x_1^2-3x_2^2+(x_3+3x_1-6x_2)^2-9x_1^2+36x_1x_2-36x_2^2=(x_3+3x_1-6x_2)^2-5x_1^2+36x_1x_2-39x_2^2.$$

Теперь выпишем все члены, содержащие x_1, и дополним это выражение до квадрата двучлена:

$$-5x_1^2+36x_1x_2=-5\left(x_1^2+\frac{36}{5}x_1x_2\right)=-5\left(x_1^2+2\cdot x_1\cdot\left(\frac{18}{5}x_2\right)+\left(\frac{18}{5}x_2\right)^2-\left(\frac{18}{5}x_2\right)^2\right)=$$

$$=-5\left(x_1+\frac{18}{5}x_2\right)^2+\frac{324}{5}x_2^2.$$

Таким образом, исходная квадратичная форма будет иметь вид: $Q(x_1, x_2, x_3)$ = $(3x_1 - 6x_2 + x_3)^2 - 5\left(x_1 + \frac{18}{5}x_2\right)^2 + \frac{324}{5}x_2^2$.

Обозначив $z_1 = 3x_1 - 6x_2 + x_3$, $z_2 = x_1 + \frac{18}{5}x_2$, $z_3 = x_2$, получим канонический вид исходной формы: $Q_2(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - 5z_2^2 + 64\frac{4}{5}z_3^2$.

Канонический вид квадратичной формы не является однозначно определенным, так как одна и та же квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду многими способами. Однако полученные различными способами канонические виды одной и той же квадратичной формы обладают рядом общих свойств. Одно из наиболее важных свойств – *закон инерции квадратичной формы*, который можно сформулировать следующим образом: *число слагаемых с положительными* (отрицательными) *коэффициентами в каноническом виде квадратичной формы не зависит от способа приведения формы к каноническому виду*, то есть однозначно определяется самой исходной формой. Число ненулевых слагаемых в каноническом виде квадратичной формы называется ее *рангом*. Ранг квадратичной формы равен рангу матрицы этой формы.

Если в квадратичную форму $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ подставить вместо неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ числа $k_1, k_2, \ldots, k_n$, то получится *значение квадратичной формы* $Q(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ *на векторе* $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ или при $x_1 = k_1, x_2 = k_2, \ldots, x_n = k_n$.

Квадратичная форма $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *положительно определенной*, если ее значение на каждом ненулевом векторе положительно.

Квадратичная форма $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *отрицательно определенной*, если ее значение на каждом ненулевом векторе отрицательно.

Квадратичная форма $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *неотрицательной* (*неположительной*), если ее значение на каждом векторе неотрицательно (неположительно).

Неотрицательные и неположительные формы называются *знакопостоянными*. В каноническом виде знакопостоянной формы все коэффициенты имеют одинаковые знаки; если форма $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ строго положительная (отрицательная), то ее канонический вид содержит ровно n слагаемых. Квадратичная форма, рассмотренная в примере 2, не является знакопостоянной, так как ее канонический вид содержит два положительных и один отрицательный коэффициент. Можно доказать, что квадратичная форма положительно (отрицательно) определена тогда и только тогда, когда все собственные значения ее матрицы положительны (отрицательны).

Для выяснения вопроса о знакопостоянстве квадратичной формы также применяется критерий Сильвестра. Прежде чем сформулировать его, введем понятие углового минора матрицы. *Угловым минором порядка* k матрицы называется определитель Δ_k, элементы которого стоят на пересечении первых k строк и первых k столбцов данной матрицы:

$$\Delta_1 = |a_{11}|,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots,\ \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

Критерий Сильвестра. Справедливы следующие утверждения:

1. Квадратичная форма $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры ее матрицы положительны.

2. Квадратичная форма $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ отрицательно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры четного порядка ее матрицы положительны, а все угловые миноры нечетного порядка отрицательны.

Пример 3. Выяснить, является ли квадратичная форма $Q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 6x_2x_3$ знакопостоянной?

Решение. Выпишем матрицу квадратичной формы, для этого найдем ее элементы: $a_{11} = 5$, $a_{22} = 4$, $a_{33} = 3$, $a_{12} = a_{21} = 2:2 = 1$, $a_{13} = a_{31} = (-4):2 = -2$, $a_{23} = a_{32} = (-6):2 = -3$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим угловые миноры матрицы A:

$$\Delta_1 = |5| = 5,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5\cdot 4 - 1\cdot 1 = 19,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \\ -2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 60 + 6 + 6 - 16 - 3 - 45 = 8.$$

Так как $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$, то по критерию Сильвестра данная квадратичная форма является положительно определенной.

3. РЕШЕНИЕ ПРИМЕРНЫХ ЗАДАНИЙ

1. Выполнить действия: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^T + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Сначала выполним транспонирование матрицы: $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Далее выполним умножение матриц на числа, а затем вычитание и сложение матриц:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^T + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\cdot 0 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 5 & 2\cdot(-3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\cdot 1 & 4\cdot 0 \\ 4\cdot 0 & 4\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 10 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0+4 & 3-4+0 \\ -1-10+0 & 4-(-3)+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -11 & 11 \end{pmatrix}$$

2. Найти, если можно, произведения матриц *AB* и *BA*:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Решение. 1) Число столбцов матрицы *A* равно числу строк матрицы *B*, поэтому произведение матриц существует: $A_{2\times 3} \cdot B_{3\times 1} = C_{2\times 1}$. Нужно умножить каждый элемент строки матрицы *A* на соответствующий элемент столбца *B* и полученные произведения сложить:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 7 + 2\cdot 8 + 3\cdot 9 \\ 4\cdot 7 + 5\cdot 8 + 6\cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+16+27 \\ 28+40+54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 122 \end{pmatrix} = C_{2\times 1}.$$

В результате получилась матрица, содержащая две строки и один столбец.

Так как число столбцов матрицы *B* не равно числу строк матрицы *A* ($1 \neq 2$), то произведение матриц $B_{3\times 1} \cdot A_{2\times 3}$ не существует.

Замечание. В том случае, когда второй множитель содержит более одного столбца, то удобно выполнять умножение строк первого множителя последовательно на первый столбец, затем на второй, на третий и т. д.

2) В матрице *A* одна строка и три столбца, а в матрице *B* – три строки и один столбец, поэтому произведение матриц $A_{1\times 3} \cdot B_{3\times 1} = C_{1\times 1}$ существует; в результате получится матрица, состоящая из одного элемента – квадратная матрица первого порядка:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(2\cdot 5 + (-1)\cdot 3 + 4\cdot 0\right) = \left(10 + (-3)\right) = (7).$$

Произведение матриц *BA* также существует, в результате получится квадратная матрица третьего порядка: $B_{3\times 1} \cdot A_{1\times 3} = D_{3\times 3}$, т. е. $AB \neq BA$. Заметим, что каждая строка матрицы *B* и каждый столбец матрицы *A* состоит из одного элемента, поэтому каждый элемент матрицы D является произведением соответствующих элементов:

$$D = B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 2 & 5\cdot(-1) & 5\cdot 4 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot(-1) & 3\cdot 4 \\ 0\cdot 2 & 0\cdot(-1) & 0\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 20 \\ 6 & -3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Выяснить, какие из следующих действий можно выполнить:

$1) A+B;\ 2) A^T + B;\ 3) A + A^T;\ 4) B + B^T;\ 5) AB;\ 6) BA;$

$7) A^T B;\ 8)\ AB^T;\ 9) A^T B^T;\ 10)\ B^T A^T;\ 11)\ AA^T;\ 12)\ A^T A$.

Решение.

1. $A_{2\times3}, B_{2\times2}$ – матрицы имеют неравное число столбцов, складывать их нельзя.

2. $A^T_{3\times2}, B_{2\times2}$ – матрицы имеют неравное число строк, складывать их нельзя.

3. $A_{2\times3}, A^T_{3\times2}$ – матрицы имеют неравное число строк и столбцов, складывать их нельзя.

4. Матрицы B и B^T – квадратные второго порядка, их сумма существует: $B + B^T = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+6 & 4+1 \\ 1+4 & -2+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$. При сложении квадратной матрицы с транспонированной к ней матрицей всегда будет получаться симметричная матрица.

5. Произведение $A_{2\times3} \cdot B_{2\times2}$ не существует, так как число столбцов матрицы A не равно числу строк матрицы B.

6. Произведение $B_{2\times2} \cdot A_{2\times3} = C_{2\times3}$ существует:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\cdot3+4\cdot2 & 6\cdot(-1)+4\cdot5 & 6\cdot0+4\cdot(-3) \\ 1\cdot3+(-2)\cdot2 & 1\cdot(-1)+(-2)\cdot5 & 1\cdot0+(-2)\cdot(-3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 18+8 & -6+20 & 0+(-12) \\ 3+(-4) & -1+(-10) & 0+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 14 & -12 \\ -1 & -11 & 6 \end{pmatrix}.$$

7. Произведение $A^T_{3\times2} \cdot B_{2\times2} = C_{3\times2}$ существует:

$$A^T B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot6+2\cdot1 & 3\cdot4+2\cdot(-2) \\ -1\cdot6+5\cdot1 & -1\cdot4+5\cdot(-2) \\ 0\cdot6+(-3)\cdot1 & 0\cdot4+(-3)\cdot(-2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 18+2 & 12+(-4) \\ -6+5 & -4+(-10) \\ 0+(-3) & 0+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 8 \\ -1 & -14 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

8. Произведение $A_{2\times3} \cdot B^T_{2\times2}$ не существует, так как число столбцов матрицы A не равно числу строк матрицы B^T.

9. Произведение $A^T_{3\times2} \cdot B^T_{2\times2} = C_{3\times2}$ существует:

$$A^T B^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot6+2\cdot4 & 3\cdot1+2\cdot(-2) \\ -1\cdot6+5\cdot4 & -1\cdot1+5\cdot(-2) \\ 0\cdot6+(-3)\cdot4 & 0\cdot1+(-3)(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18+8 & 3+(-4) \\ -6+20 & -1+(-10) \\ 0+(-12) & 0+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & -1 \\ 14 & -11 \\ -12 & 6 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая результаты заданий 6) и 9), убеждаемся, что выполняется равенство $A^T B^T = (BA)^T$.

10. Произведение $B^T_{2\times2} \cdot A^T_{3\times2}$ не существует, так как число столбцов матрицы B^T не равно числу строк матрицы A^T.

11. и 12. Произведение матрицы на транспонированную к ней существует всегда, в результате получается квадратная симметричная матрица. Однако, если A – не квадратная матрица, то произведения AA^T и A^TA – квадратные матрицы неравных порядков. Так как в матрице A две строки, то AA^T – матрица второго порядка, а так как в матрице A^T три строки, то A^TA – матрица третьего порядка.

$$AA^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot3+(-1)\cdot(-1)+0\cdot0 & 3\cdot2+(-1)\cdot5+0\cdot(-3) \\ 2\cdot3+5\cdot(-1)+(-3)\cdot0 & 2\cdot2+5\cdot5+(-3)\cdot(-3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9+1+0 & 6+(-5)+0 \\ 6+(-5)+0 & 4+25+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 38 \end{pmatrix};$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot3+2\cdot2 & 3\cdot(-1)+2\cdot5 & 3\cdot0+2\cdot(-3) \\ -1\cdot3+5\cdot2 & -1\cdot(-1)+5\cdot5 & -1\cdot0+5\cdot(-3) \\ 0\cdot3+(-3)\cdot2 & 0\cdot(-1)+(-3)\cdot5 & 0\cdot0+(-3)(-3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9+4 & -3+10 & 0+(-6) \\ -3+10 & 1+25 & 0+(-15) \\ 0+(-6) & 0+(-15) & 0+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 7 & -6 \\ 7 & 26 & -15 \\ -6 & -15 & 9 \end{pmatrix}.$$

4. Решить уравнения $AX = B$, $AZB = C$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1. Чтобы решить уравнение $AX = B$, нужно умножить обе его части слева на матрицу A^{-1}, обратную матрице A, если она существует, тогда $X = A^{-1}B$. Найдем определитель матрицы A: $\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot6-(-2)\cdot3 = 12 \neq 0$. Далее вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A: $A_{11} = 6$, $A_{12} = -3$, $A_{21} = -(-2) = 2$, $A_{22} = 1$. Запишем матрицу A^{-1} по формуле $A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$: $A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Проверяем равенство $A\cdot A^{-1} = E$: $A\cdot A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$

Находим решение уравнения:

$$X = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6\cdot3+2\cdot5 & 6\cdot2+2\cdot(-1) \\ (-3)\cdot3+1\cdot5 & (-3)\cdot2+1\cdot(-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 28 & 10 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

2. Для решения уравнения $AZB = C$ нужно умножить обе его части слева на матрицу A^{-1}, обратную матрице A, а справа – на матрицу B^{-1}, обратную матрице B, если эти матрицы существуют; тогда $Z = A^{-1}CB^{-1}$.

Найдем определитель матрицы B: $\Delta_B = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)-2\cdot5 = -13 \neq 0$.

Далее вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы B:
$B_{11}=-1, B_{12}=-5, B_{21}=-2$, $B_{22}=3$. Запишем матрицу B^{-1}:
$B^{-1}=\dfrac{1}{\Delta_B}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} \\ B_{12} & B_{22}\end{pmatrix}=\dfrac{1}{-13}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 3\end{pmatrix}$. Проверяем: $BB^{-1}=E$.

Так как матрица A^{-1} уже найдена в задании 1), находим решение уравнения по формуле $Z=A^{-1}CB^{-1}$: $\qquad Z=\dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1\end{pmatrix}\dfrac{1}{-13}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 3\end{pmatrix}=$

$$=\frac{1}{-156}\begin{pmatrix} 6\cdot 1+2\cdot 2 & 6\cdot(-2)+2\cdot(-1) \\ (-3)\cdot 1+1\cdot 2 & (-3)(-2)+1\cdot(-1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{-156}\begin{pmatrix} 10 & -14 \\ -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 3\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{-156}\begin{pmatrix} 10(-1)+(-14)(-5) & 10(-2)+(-14)3 \\ (-1)(-1)+5\cdot(-5) & (-1)(-2)+5\cdot 3\end{pmatrix}=\frac{1}{-156}\begin{pmatrix} 60 & -62 \\ -24 & 17\end{pmatrix}.$$

5. Вычислить определитель матрицы, приведя ее к ступенчатому виду:
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64\end{pmatrix}.$$

Решение. Приведем матрицу A к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований. Сначала умножим первую строку на (-1) и сложим ее поочередно с каждой из остальных строк матрицы. Затем вторую строку умножим на (-3) и на (-7) и сложим соответственно с третьей и четвертой строками. И, наконец, умножим третью строку на (-6) и сложим с четвертой строкой. Получится треугольная матрица:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 8 & 15 \\ 0 & 7 & 26 & 63\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 12 & 42\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6\end{pmatrix}.$$

В результате этих элементарных преобразований определитель матрицы не изменился (по свойству 6), поэтому вычисляем определитель матрицы A как произведение диагональных элементов последней, треугольной, матрицы (по свойству 10):
$\det A=1\cdot 1\cdot 2\cdot 6=12$.

6. Определить, при каких значениях α матрица $\begin{pmatrix} 2 & -\alpha & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ \alpha & 6 & 4\end{pmatrix}$ является вырожденной.

Решение. Квадратная матрица называется вырожденной, если ее определитель равен нулю. Поэтому нужно составить и решить уравнение $\det A=0$. Определитель третьего порядка вычисляем по правилу треугольника.

$$\begin{vmatrix} 2 & -\alpha & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ \alpha & 6 & 4\end{vmatrix}=2\cdot 5\cdot 4+(-\alpha)\cdot\alpha\cdot 0+2\cdot 3\cdot 6-2\cdot 5\cdot\alpha-(-\alpha)\cdot 3\cdot 4-2\cdot 0\cdot 6=$$
$$=40+0+36-10\alpha+12\alpha-0=76+2\alpha.$$

Решаем уравнение $76 + 2\alpha = 0$: $\alpha = -39$.

Данная матрица является вырожденной при $\alpha = -39$.

7. Доказать, что система векторов $\boldsymbol{f}_1(1, -1, 2)$, $\boldsymbol{f}_2(1, 2, 0)$, $\boldsymbol{f}_3(2, -1, 1)$ образует базис в R^3. Найти координаты вектора $\boldsymbol{a}(1, 1, 3)$ в базисе $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$. Выписать матрицу перехода от стандартного базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ к базису $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$.

Решение. 1. Для того, чтобы система трех векторов образовывала базис трехмерного арифметического векторного пространства R^3, необходимо и достаточно, чтобы эти векторы были линейно независимыми. Вычислим определитель, составленный из координат этих векторов, разлагая его по элементам третьего столбца:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) + 0 + 1 \cdot 3 = -7 \neq 0 .$$

Так как определитель, составленный из координат векторов, отличен от нуля, то система векторов линейно независима, то есть векторы $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ образуют базис в R^3.

2. Координатами вектора $\boldsymbol{a}(1, 1, 3)$ в базисе $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ являются коэффициенты α, β, γ разложения вектора $\vec{a}$ по этому базису: $\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{f}_1 + \beta \boldsymbol{f}_2 + \gamma \boldsymbol{f}_3$.

Так как (1, 1, 3) = α(1, -1, 2) + β(1, 2, 0) + γ(2, -1, 1) или (1, 1, 3) = (α+β+2γ, -α+2β-γ, 2α+γ), то нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 1, \\ -\alpha + 2\beta - \gamma = 1, \\ 2\alpha + \gamma = 3. \end{cases}$$

Решаем систему методом Гаусса. Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду. Для этого сначала перепишем без изменения первую строку, ко второй строке прибавим первую, а к третьей строке прибавим первую, умноженную на (-2). В получившейся матрице ко второй строке прибавим третью, а затем, считая вторую строку рабочей, умножим ее на 2 и прибавим к третьей строке.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Далее выпишем и решим полученную ступенчатую систему уравнений.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 1, \\ \beta - 2\gamma = 3, \\ -7\gamma = 7; \end{cases} \begin{cases} \alpha = 2, \\ \beta = 1, \\ \gamma = -1. \end{cases}$$

Таким образом, $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 - \boldsymbol{f}_3$.

3. Так как по условию задачи предполагается, что координаты векторов $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ даны в стандартном базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, то матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ к базису $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ состоит из координат этих векторов, записанных столбцами:

$$C^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \end{cases}$ тремя способами.

Решение. 1. Решим систему методом Гаусса. Выпишем расширенную матрицу системы уравнений и приведем ее к ступенчатому виду. Сначала вычтем из первой строки третью (для того чтобы первый элемент первой рабочей строки стал равным – 1). Далее умножим первую строку на 2 и 3 и сложим соответственно со второй и третьей строками. В полученной матрице к третьей строке прибавим вторую.

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}2&1&3&7\\2&3&1&1\\3&2&1&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&-1&2&1\\2&3&1&1\\3&2&1&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&-1&2&1\\0&1&5&3\\0&-1&7&9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&-1&2&1\\0&1&5&3\\0&0&12&12\end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы системы равен трем, т. е. числу неизвестных, поэтому данная система уравнений имеет единственное решение. Последняя матрица соответствует системе уравнений:

$$\begin{cases}-x_1-x_2+2x_3=1,\\x_2+5x_3=3,\\12x_3=12.\end{cases}$$

Решая эту систему, получим: $x_3=1;\ x_2+5\cdot1=3,\ x_2=-2;\quad -x_1-(-2)+2\cdot1=1,$ $x_1=3$. Таким образом, система имеет единственное решение: $x_1=3$, $x_2=-2,\ x_3=1$.

2. Решим систему уравнений по формулам Крамера. Так как матрица системы состоит из первых трех столбцов расширенной матрицы, то, приводя к ступенчатому виду расширенную матрицу, мы одновременно привели к ступенчатому виду и матрицу A системы уравнений:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&3\\2&3&1\\3&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&-1&2\\0&1&5\\0&0&12\end{pmatrix}.$$

Мы не выполняли перестановки строк или умножения всех элементов какой-либо строки на число, отличное от 1, без дальнейшего сложения элементов этой строки с элементами другой строки, поэтому определитель полученной треугольной матрицы равен определителю матрицы A. Таким образом, $\Delta=\det A=(-1)\cdot1\cdot12=-12$.

Найдем Δ_1, Δ_2, Δ_3 по правилу треугольника.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}7&1&3\\1&3&1\\6&2&1\end{vmatrix}=7\cdot3\cdot1+1\cdot1\cdot6+3\cdot1\cdot2-3\cdot3\cdot6-1\cdot1\cdot1-7\cdot1\cdot2=-36.$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2&7&3\\2&1&1\\3&6&1\end{vmatrix}=2\cdot1\cdot1+7\cdot1\cdot3+3\cdot2\cdot6-3\cdot1\cdot3-7\cdot2\cdot1-2\cdot1\cdot6=24.$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2&1&7\\2&3&1\\3&2&6\end{vmatrix}=2\cdot3\cdot6+1\cdot1\cdot3+7\cdot2\cdot2-7\cdot3\cdot3-1\cdot2\cdot6-2\cdot1\cdot2=-12.$$

Находим по формулам Крамера:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-36}{-12}=3,\ x_2\,\frac{\Delta_{2=}}{\Delta}=\frac{24}{-12}=-2,\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-12}{-12}=1.$$

3. Решим систему уравнений матричным методом. Так как определитель матрицы A отличен от нуля, то для нее существует обратная матрица. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1,\ A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=1,\ A_{13}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-5,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=5,\ A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-7,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-8,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=4,\ A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=4.$$

Теперь выпишем матрицу A^{-1}, обратную матрице A:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta(A)}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{-12}\begin{pmatrix}1 & 5 & -8\\ 1 & -7 & 4\\ -5 & -1 & 4\end{pmatrix}.$$

Вычислим значения неизвестных:

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=A^{-1}B=\frac{1}{-12}\begin{pmatrix}1 & 5 & -8\\ 1 & -7 & 4\\ -5 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\ 1\\ 6\end{pmatrix}=\frac{1}{-12}\begin{pmatrix}-36\\ 24\\ -12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -2\\ 1\end{pmatrix}.$$

Ответ: система уравнений имеет единственное решение: $x_1=3$, $x_2=-2$, $x_3=1$.

9. Найти фундаментальную систему решений однородной системы уравнений и записать общее решение системы в векторной форме: $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-4x_4=0,\\ x_2-x_3+x_4=0,\\ x_1+3x_2-3x_4=0,\\ -7x_2+3x_3+x_4=0.\end{cases}$

Решение. Выпишем матрицу коэффициентов однородной системы уравнений и приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований.

Первую и вторую строки матрицы переписываем, затем умножим первую строку на (-1) и сложим с третьей строкой. Четвертую строку переписываем без изменения. На следующем шаге рабочей строкой будет вторая строка. Умножим вторую строку на (-5) и на 7 и прибавим соответственно к третьей и четвертой строкам. На последнем шаге перепишем без изменения три первые строки и, умножив третью строку на 2, сложим ее с четвертой строкой.

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 0 & -3\\ 0 & -7 & 3 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 5 & -3 & 1\\ 0 & -7 & 3 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & -4\\ 0 & 0 & -4 & 8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Запишем ступенчатую систему уравнений: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$

Ранг полученной матрицы равен трем, а значит, и ранг системы тоже равен трем. Так как число неизвестных – четыре – больше ранга системы, то одно из неизвестных является свободным. Пусть x_4 – свободное неизвестное. Выразим остальные неизвестные через x_4. Из последнего уравнения получим: $x_3 = 2x_4$. Далее из второго уравнения: $x_2 = x_4$ и, наконец, из первого уравнения: $x_1 - 2x_4 + 3 \cdot 2x_4 - 4x_4 = 0,\ x_1 = 0$. Общее решение системы уравнений имеет вид: $x_1 = 0,\ x_2 = x_4,\ x_3 = 2x_4$.

Так как свободное неизвестное всего одно, то фундаментальная система решений состоит из одного решения, например, при $x_4 = 1$ получим: $x_2 = 1, x_3 = 2$; заметим, что $x_1 = 0$ независимо от значений x_4. Таким образом, ФСР данной системы уравнений – это вектор F = (0, 1, 2, 1), а общее решение системы уравнений в векторной форме имеет вид: $X = \alpha(0, 1, 2, 1)$, где α – любое действительное число.

10. Проверить, что вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ является собственным вектором матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Какому собственному значению принадлежит этот вектор?

Решение. Из определения следует, что ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$ является собственным вектором матрицы A, принадлежащим ее собственному значению λ, тогда и только тогда, когда выполняется равенство $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.

Вычислим произведение матрицы A и данного вектора:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Так как произведение матрицы A на данный вектор преобразует его в коллинеарный ему вектор, то $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ является собственным вектором матрицы A, принадлежащим ее собственному значению λ=5.

11. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Найдем характеристический многочлен матрицы A:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(3-\lambda) - 2 \cdot 2 = (3-\lambda)^2 - 2^2 =$$

$$= (3 - \lambda - 2)(3 - \lambda + 2) = (1-\lambda)(5-\lambda)$$

Решим характеристическое уравнение: $(1-\lambda)(5-\lambda) = 0; \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5.$ Собственные значения матрицы – это числа 1 и 5.

1. Найдем множество $A(1)$ всех собственных векторов матрицы A, принадлежащих собственному значению $\lambda_1 = 1$. Так как

$$A - 1 \cdot E = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

то система линейных уравнений $(A - E)X = \Theta$ состоит из одного уравнения $2x_1 + 2x_2 = 0$.

Пусть x_2 – свободное неизвестное, тогда $x_1 = -x_2$. Придавая свободному неизвестному x_2 значение 1, выпишем вектор $f_1^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, составляющий ФСР данной системы уравнений. Произвольный собственный вектор $\boldsymbol{x}^{(1)}$ из $A(1)$ имеет вид: $\boldsymbol{x}^{(1)} = =\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, где α – любое действительное число, отличное от нуля.

2. Найдем множество $A(5)$ всех собственных векторов матрицы A, принадлежащих собственному значению $\lambda_2 = 5$. Так как

$$A - 5 \cdot E = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-5 & 2 \\ 2 & 3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

то система линейных уравнений $(A - E)X = \Theta$ состоит из одного уравнения: $-2x_1 + 2x_2 = 0$.

Пусть x_2 – свободное неизвестное, тогда $x_1 = x_2$. Придавая свободному неизвестному x_2 значение 1, выпишем вектор $f_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, составляющий ФСР данной системы уравнений. Произвольный собственный вектор $\boldsymbol{x}^{(2)}$ из $A(5)$ имеет вид: $\boldsymbol{x}^{(2)} = \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, где β – любое действительное число, отличное от нуля.

12. Выписать матрицу квадратичной формы $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$. С помощью критерия Сильвестра выяснить, является ли эта квадратичная форма положительно определенной.

Решение. 1. Определим элементы матрицы квадратичной формы, учитывая запись в общем виде квадратичной формы от трех неизвестных: $Q(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$. В нашем случае отсутствуют x_3^2 и x_1x_2, значит, коэффициенты при этих слагаемых равны нулю. Поэтому элементы матрицы равны соответственно: $a_{11} = 2, a_{22} = 1, a_{33} = 0$, $a_{12} = a_{21} = 0, a_{13} = a_{31} = \frac{-4}{2} = -2,$ $a_{23} = a_{32} = \frac{-4}{2} = -2.$ Следовательно, матрица квадратичной формы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислим угловые миноры матрицы A квадратичной формы:

$$\Delta_1 = 2, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -12.$$

Так как $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$, а $\Delta_3<0$, то условия критерия Сильвестра не выполняются, следовательно, данная квадратичная форма не является положительно определенной.

13. Найти все значения параметра m, при которых положительно определены квадратичные формы:

1) $Q(x_1, x_2) = mx_1^2 + mx_2^2 - 4x_1x_2$; 2) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 - 2mx_2x_3$.

Решение. 1. Запишем матрицу квадратичной формы и вычислим ее угловые миноры.

$$A=\begin{pmatrix} m & -2 \\ -2 & m \end{pmatrix},\ \Delta_1=m,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} m & -2 \\ -2 & m \end{vmatrix}=m^2-4.$$

По критерию Сильвестра, для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все ее угловые миноры были положительны, то есть $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$. Решаем систему неравенств:

$$\begin{cases} m>0, \\ m^2-4>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0, \\ m<-2 \text{ или } m>2; \end{cases} \Leftrightarrow \{m>2.$$

Данная квадратичная форма положительно определена при $m>2$.

2. Запишем матрицу квадратичной формы и вычислим ее угловые миноры.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -m \\ 1 & -m & 2 \end{pmatrix},\ \Delta_1=1,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=4,\ \Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -m \\ 1 & -m & 2 \end{vmatrix}=4-m^2.$$

Для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все ее угловые миноры были положительны, то есть $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$, $\Delta_3>0$. Так как $\Delta_1 = 1 > 0$ и $\Delta_2 = 4 > 0$, то осталось решить неравенство $4-m^2>0$. Таким образом, данная квадратичная форма положительно определена при $-2 < m < 2$.

4. ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ТЕСТ

1) В матрице $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 4 & 4 \\ 5 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ сумма элементов главной диагонали равна

2) Если матрица $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$, то транспонированная матрица A^T имеет вид:

3) Если $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, то матрица $C=A-2B$ имеет вид:

4) Если $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$, то матрица $C=B\cdot A$ имеет вид:

5) Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ равен

6) Матрица $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ вырождена при λ, равном

7) Установить соответствие между двумя множествами (каждой матрице поставить в соответствие обратную ей)

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ 3. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$

а) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ б) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1{,}5 & 0{,}5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ в) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$ г) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$

8) Характеристическое уравнение матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ имеет вид:

9) Расширенной матрицей системы уравнений $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 - 4 = 0, \end{cases}$ является матрица

10) Из перечисленных систем несовместной является

A. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 + 2x_2 = 4; \end{cases}$ B. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 = 1; \end{cases}$ C. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 = 1; \end{cases}$ D. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 = 0. \end{cases}$

11) Матрицей квадратичной формы $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 - 6x_2x_3$ является матрица

12) Матрице $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ соответствует квадратичная форма

13) Тригонометрическая форма записи комплексного числа $z = -2 + 2i$ имеет вид:

14) Если $z = 5 - 4i$, то число, сопряженное z, имеет вид:

15) Если $z_1 = 5 + 4i$ и $z_2 = 3 - 2i$, то произведение $z_1 \cdot z_2$ равно

16) Модуль комплексного числа $z = 5 - 4i$ равен

17) Если $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{4, 5, 6, 8\}$, то $A \backslash B$ и $B \backslash A$ – это множества

Ответы: **1)** 8; **2)** $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}$; **3)** $C = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}$**; 4)** C = (-2 8); **5)** 8; **6)** λ = -1;

7) 1-б, 2-в, 3-а; **8)** $\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$; **9)** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -5 & -3 \\ 2 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; **10)** C; **11)** $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$;

12) $x_1^2 + 4x_1x_2 - 5x_2^2$; **13)** $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; **14)** $\bar{z} = 5 + 4i$; **15)** $z_1 \cdot z_2 = 23 + 2i$;

16) $|z| = \sqrt{41}$ **; 17)** $A \backslash B = \{1, 3, 7\}$, $B \backslash A = \{4, 6, 8\}$.

5. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

ЗАДАНИЕ 1. Найти $2A + B - 3E$, если E – единичная матрица второго порядка и:

1.1. $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -5 & 1\end{pmatrix};$

1.2. $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix};$

1.3. $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 5 & 7\end{pmatrix};$

1.4. $A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 2 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -3 & 0\end{pmatrix};$

1.5. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 0 & -3\end{pmatrix};$

1.6. $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 2 & 1\end{pmatrix};$

1.7. $A=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 4\end{pmatrix};$

1.8. $A=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix};$

1.9. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -5 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix};$

1.10. $A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & -4\end{pmatrix}.$

ЗАДАНИЕ 2. Найти произведения $A\cdot A^T$, $A^T\cdot A$, если:

2.1. $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 4\\ -2 & 5 & 1\end{pmatrix};$

2.2. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 8 & -7 & 6\end{pmatrix};$

2.3. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix};$

2.4. $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -6\\ 2 & 4 & 0\end{pmatrix};$

2.5. $A=\begin{pmatrix}8 & -7 & -6\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix};$

2.6. $A=\begin{pmatrix}3 & -5 & 4\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix};$

2.7. $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ -2 & 2 & 7\end{pmatrix};$

2.8. $A=\begin{pmatrix}9 & 2 & -5\\ 0 & 3 & 7\end{pmatrix};$

2.9. $A=\begin{pmatrix}-6 & 1 & 11\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix};$

2.10. $A=\begin{pmatrix}2 & 6 & 1\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}.$

ЗАДАНИЕ 3. Решить уравнения $AX = B$, $YB = A$, если это возможно:

3.1. $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -5 & 1\end{pmatrix};$

3.2. $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix};$

3.3. $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 5 & 7\end{pmatrix};$

3.4. $A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 2 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -3 & 0\end{pmatrix};$

3.5. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 0 & -3\end{pmatrix};$

3.6. $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 2 & 1\end{pmatrix};$

3.7. $A=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 4\end{pmatrix};$

3.8. $A=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix};$

3.9. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -5 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix};$

3.10. $A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & -4\end{pmatrix}.$

ЗАДАНИЕ 4. Определить, при каких значениях α матрица A является вырожденной:

4.1. $A=\begin{pmatrix}5 & 2\alpha\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ 4.2. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\alpha\\ -2 & 3\end{pmatrix}$ 4.3. $A=\begin{pmatrix}5 & -2\\ \alpha & -3\end{pmatrix}$

4.4. $A=\begin{pmatrix}3\alpha & 2\\ 9 & 5\end{pmatrix}$ 4.5. $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -2 & \alpha\end{pmatrix}$ 4.6. $A=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 2 & -\alpha\end{pmatrix}$

4.7. $A=\begin{pmatrix}3\alpha & -4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ 4.8. $A=\begin{pmatrix}2 & 3\alpha\\ 4 & -6\end{pmatrix}$ 4.9. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ \alpha & 4\end{pmatrix}$

4.10. $A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -\alpha & 2\end{pmatrix}$

ЗАДАНИЕ 5. Решить систему уравнений тремя способами:

5.1. $\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=7,\\ 2x_1+3x_2+x_3=1,\\ 3x_1+2x_2+x_3=6,\end{cases}$ 5.2. $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3=3,\\ x_1+x_2+2x_3=-4,\\ 4x_1+x_2+4x_3=-3,\end{cases}$ 5.3. $\begin{cases}3x_1-x_2+x_3=12,\\ x_1+2x_2+4x_3=6,\\ 5x_1+x_2+2x_3=3,\end{cases}$

5.4. $\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=-4,\\ x_1+3x_2-x_3=11,\\ x_1-2x_2+2x_3=-7,\end{cases}$ 5.5. $\begin{cases}3x_1-2x_2+4x_3=12,\\ 2x_1-x_2-x_3=-9,\\ 3x_1+4x_2-2x_3=6,\end{cases}$ 5.6. $\begin{cases}8x_1+3x_2-6x_3=-4,\\ x_1+x_2-x_3=2,\\ 4x_1+x_2-3x_3=-5,\end{cases}$

5.7. $\begin{cases}4x_1+x_2-3x_3=9,\\ x_1+x_2-x_3=-2,\\ 8x_1+3x_2-6x_3=12,\end{cases}$ 5.8. $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3=0,\\ 4x_1+x_2+4x_3=6,\\ x_1+x_2+2x_3=4,\end{cases}$ 5.9. $\begin{cases}2x_1-x_2-3x_3=0,\\ 3x_1+4x_2+2x_3=1,\\ x_1+5x_2+x_3=-3,\end{cases}$

5.10. $\begin{cases}3x_1-x_2+x_3=9,\\ 5x_1+x_2+2x_3=14,\\ x_1+2x_2+4x_3=19.\end{cases}$

ЗАДАНИЕ 6. Найти фундаментальную систему решений однородной системы уравнений и записать общее решение системы в векторной форме:

6.1. $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-4x_4=0,\\ x_2-x_3+x_4=0,\\ x_1+3x_2-3x_4=0,\\ -7x_2+3x_3+x_4=0.\end{cases}$ 6.2. $\begin{cases}x_1+3x_2-3x_4=0,\\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4=0,\\ x_2-x_3+x_4=0,\\ x_1-4x_2+3x_3-2x_4=0.\end{cases}$

6.3. $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3-x_4=0,\\ -2x_1+x_2+x_3+3x_4=0,\\ 4x_1+3x_2+5x_3-5x_4=0,\\ 3x_1+x_2+2x_3-4x_4=0.\end{cases}$ 6.4. $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+4x_4=0,\\ x_1+x_2-4x_3+11x_4=0,\\ 5_1+2x_2+x_3+x_4=0,\\ 2x_1+6x_3-14x_4=0.\end{cases}$

6.5. $\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3+4x_4=0,\\ 3x_2-15x_3+18x_4=0,\\ 3x_1+5x_2-4x_3+6x_4=0,\\ 7x_1+10x_2-x_3+4x_4=0.\end{cases}$ 6.6. $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3-x_4=0,\\ 3x_1+5x_2+4x_3-2x_4=0,\\ 2x_1+3x_2+x_3-x_4=0,\\ 3x_1+4x_2-3x_3-x_4=0.\end{cases}$

6.7. $\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ x_1-3x_2+11x_3+x_4=0, \\ -3x_1+2x_2-x_3+x_4=0, \\ 4x_1-11x_3-3x_4=0. \end{cases}$

6.8. $\begin{cases} -x_1+2x_2+x_3+4x_4=0, \\ -4x_1+x_2+x_3+11x_4=0, \\ x_1+5x_2+2x_3+x_4=0, \\ 6x_1+2x_2-14x_4=0. \end{cases}$

6.9. $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3-x_4=0, \\ 3x_1+4x_2+5x_3-2x_4=0, \\ 2x_1+x_2+3x_3-x_4=0, \\ 3x_1-3x_2+4x_3-x_4=0. \end{cases}$

6.10. $\begin{cases} 3x_2+18x_3-15x_4=0, \\ x_1+x_2+4x_3-3x_4=0, \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0, \\ x_1-8x_3+7x_4=0. \end{cases}$

ЗАДАНИЕ 7. Проверить, что вектор ***a*** является собственным вектором матрицы A. Какому собственному значению принадлежит этот вектор?

7.1. $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}$;

7.2. $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}1&3\\2&2\end{pmatrix}$;

7.3 $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}3&4\\5&2\end{pmatrix}$;

7.4. $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}4&-3\\-1&2\end{pmatrix}$;

7.5. $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}$,

7.6. $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}3&-2\\-3&4\end{pmatrix}$;

7.7. $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}$;

7.8. $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}2&-3\\-3&2\end{pmatrix}$;

7.9. $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}2&-4\\-5&3\end{pmatrix}$;

7.10. $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}-1&5\\2&2\end{pmatrix}$.

ЗАДАНИЕ 8. Найти собственные значения и собственные векторы матриц:

8.1. а) $\begin{pmatrix}3&-2\\-2&3\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}7&-4&-2\\-2&5&-2\\0&0&9\end{pmatrix}$.

8.2. а) $\begin{pmatrix}3&4\\5&2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}5&-2&-2\\0&5&0\\0&2&3\end{pmatrix}$.

8.3. а) $\begin{pmatrix}1&3\\2&2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}4&0&0\\2&3&-2\\1&-1&2\end{pmatrix}$.

8.4. а) $\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\-1&1&3\end{pmatrix}$.

8.5. а) $\begin{pmatrix}4&-3\\-1&2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$.

8.6. а) $\begin{pmatrix}1&2\\5&-2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}3&-1&1\\0&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$.

8.7. а) $\begin{pmatrix}2&-2\\-3&1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}3&-2&2\\0&3&0\\0&2&1\end{pmatrix}$.

8.8. а) $\begin{pmatrix}2&-4\\-5&3\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}4&-2&1\\0&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$.

8.9. а) $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

8.10. а) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

ЗАДАНИЕ 9. Выписать матрицу квадратичной формы $Q(x_1, x_2, x_3)$. С помощью критерия Сильвестра выяснить, является ли эта квадратичная форма положительно определенной. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом выделения полных квадратов.

9.1. $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_3 - 6x_2x_3$.

9.2. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.

9.3. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3$.

9.4. $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.

9.5. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3$.

9.6. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$.

9.7. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

9.8. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_2x_3$.

9.9. $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

9.10. $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_1x_3 + 8x_2x_3$.

ЗАДАНИЕ 10. Доказать, что система векторов $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{f}_3$ образует базис в R^3. Найти координаты вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{f}_3$:

10.1. $\boldsymbol{f}_1(1, 2, 5)$, $\boldsymbol{f}_2(-2, 3, 2)$, $\boldsymbol{f}_3(0, -1, -3)$, $\boldsymbol{a}$ (-1, 4, 4).

10.2. $\boldsymbol{f}_1(1, 1, 0)$, $\boldsymbol{f}_2(0, 1, 1)$, $\boldsymbol{f}_3(1, 0, -3)$, $\boldsymbol{a}$ (3, 1, -4).

10.3. $\boldsymbol{f}_1(1, 1, 1)$, $\boldsymbol{f}_2(2, 1, 0)$, $\boldsymbol{f}_3(3, 1, 0)$, $\boldsymbol{a}$ (5, 1, -2).

10.4. $\boldsymbol{f}_1(1, -1, 3)$, $\boldsymbol{f}_2(1, 0, 2)$, $\boldsymbol{f}_3(1, 4, 6)$, $\boldsymbol{a}$ (2, -5, 1).

10.5. $\boldsymbol{f}_1(1, -1, 2)$, $\boldsymbol{f}_2(-1, 2, -1)$, $\boldsymbol{f}_3(2, -1, 1)$, $\boldsymbol{a}$ (3, 0, 5).

10.6. $\boldsymbol{f}_1(2, 2, 3)$, $\boldsymbol{f}_2(1, 3, 2)$, $\boldsymbol{f}_3(3, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}$ (7, 1, 6).

10.7. $\boldsymbol{f}_1(3, 1, 5)$, $\boldsymbol{f}_2(-1, 2, 1)$, $\boldsymbol{f}_3(1, 4, 2)$, $\boldsymbol{a}$ (12, 6, 3).

10.8. $\boldsymbol{f}_1(2, 1, 4)$, $\boldsymbol{f}_2(-1, 1, 1)$, $\boldsymbol{f}_3(2, 2, 4)$, $\boldsymbol{a}$ (3, -4, -3).

10.9. $\boldsymbol{f}_1(2, 1, 1)$, $\boldsymbol{f}_2(-1, 3, 2)$, $\boldsymbol{f}_3(3, -1, 2)$, $\boldsymbol{a}$ (-4, 11, 7).

10.10. $\boldsymbol{f}_1(3, 1, 1)$, $\boldsymbol{f}_2(1, 0, 1)$, $\boldsymbol{f}_3(1, 2, 0)$, $\boldsymbol{a}$ (1, 3, 1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров, П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / П. С. Александров. – М.: «Наука», главная редакция физ.-мат. литературы, 1979.
2. Бугров, Я. С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Ростов н/Д.: Феникс, 1997.
3. Высшая математика для экономистов: учеб. пособие для вузов / Н. Ш. Кремер [и др.]; под ред. Н. Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи. ЮНИТИ, 1997.
4. Жолков, С. Ю. Математика и информатика для гуманитариев: учебник / С. Ю. Жолков. – М.: Альфа-М; ИНФРА-М, 2005.
5. Кострикин, А. И. Введение в алгебру / А. И. Кострикин. – М.: «Наука», 1977.
6. Красс, М. С., Чупрынов, Б. П. Математика для экономистов / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – СПб.: Питер, 2005.
7. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – М.: Высшая школа, 2005.
8. Малыхин, В. И. Математика в экономике: учеб. пособие / В. И. Малыхин. – М.: ИНФРА-М, 2000.
9. Математическая энциклопедия / Глав. ред. И. М. Виноградов. – М.: «Советская энциклопедия», 1977.
10. Общий курс высшей математики для экономистов: учебник / Под ред. В. И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2000.
11. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – 4-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2006.
12. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб. пособие для вузов / Кремер Н. Ш. [и др.]; под ред. Н. Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003.
13. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учеб. пособие / Под ред. В. И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2003.
14. Стройк, Д. Я. Краткий очерк истории математики / Д. Я. Стройк. – М.: «Наука», 1978.
15. Турецкий, В. Я. Математика и информатика / В. Я. Турецкий. – 3-е изд. – М.: ИНФРА-М, 2005.
16. Шипачев, В. С. Основы высшей математики / В. С. Шипачев. – М.: Высшая школа, 1988.