Сахалинский государственный университет

В. Г. ЛАЗАРЕВА

МАТЕМАТИКА:

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Учебно-методическое пособие

Южно-Сахалинск

2011

УДК 517(076)
ББК 22.16я73
Л 17

*Печатается по решению учебно-методического совета
Сахалинского государственного университета, 2010 г.*

Л 17 Лазарева, В. Г. Математика: комплексные числа: учебно-методическое пособие / В. Г. Лазарева. – Южно-Сахалинск: СахГУ, 2011. – 28 с.

ISBN 978-5-88811-356-1

Учебно-методическое пособие разработано в соответствии с ФГОС, рекомендовано для практических занятий и самостоятельной работы студентов технических специальностей по теме «Комплексные числа».

Изложение материала произведено пошагово. Вначале даются краткие теоретические сведения, далее приведены образцы пошагового решения примеров и их объяснение после задания для самостоятельного решения.

Студент должен знать комплексные числа, так как многие проблемы, возникающие в функциях действительного переменного, снимаются в области комплексного переменного. Комплексная форма записи многих задач бывает удобной при математических формулировках физических процессов в физике, нефтегазовом деле и т. д.

Рецензент: кандидат технических наук Е. И. Мамчистова

9 785888 113561

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Цель пособия – разработка методических указаний и индивидуальных заданий по математике для оказания помощи студентам в приобретении навыков по разделу «Комплексные числа».

В методическом указании приведены краткие теоретические сведения, рассмотрено достаточное количество примеров и содержатся задания для самостоятельного выполнения по разделу «Комплексные числа». А также представлены алгоритмы решения задач. Поэтому методические указания могут служить пособием для самостоятельного освоения темы.

В результате изучения данного раздела студент должен знать комплексные числа, так как многие проблемы, возникающие в функциях действительного переменного, снимаются в области комплексного переменного. Комплексная форма записи многих задач бывает удобной при математических формулировках физических процессов в физике, нефтегазовом деле и т. д.

Студент должен уметь выделять действительную и мнимую часть комплексных чисел, выполнять действия над комплексными числами, изображать вектором комплексное число на комплексной плоскости, решать алгебраические уравнения в комплексной плоскости, возводить комплексное число в натуральную степень и извлекать корень.

Студент должен уметь самостоятельно разбираться в математическом аппарате, содержащемся в специальной литературе, выбирать метод исследования и доводить решение задач до корректного результата, пользоваться компьютерными технологиями, таблицами и справочной литературой.

1. ПОНЯТИЕ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

1.1. Основные понятия

Определение. *Комплексным числом* z называется упорядоченная пара двух действительных чисел x и y, записанных в виде $z = x + iy$.

Символ i называется комплексной (мнимой) единицей, $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$.

Определение. Число x называется действительной частью комплексного числа z и обозначается $x = \operatorname{Re} z$.

Определение. Число y называется мнимой частью комплексного числа z и обозначается $x = \operatorname{Im} z$.

ПРИМЕР 1. Найти действительную и мнимую часть комплексных чисел: $z_1 = 7 + i3$, $z_2 = -4 + i5$, $z_3 = 2$.

Решение:

Действительные части комплексных чисел: $\operatorname{Re} z_1 = 7$, $\operatorname{Re} z_2 = -4$, $\operatorname{Re} z_3 = 2$.

Мнимые части комплексных чисел: $\operatorname{Im} z_1 = 3$, $\operatorname{Re} z_2 = 5$, $\operatorname{Re} z_3 = 0$.

Ответ: Действительные части комплексных чисел z_1, z_2, z_3 равны: $\operatorname{Re} z_1 = 7$, $\operatorname{Re} z_2 = -4$, $\operatorname{Re} z_3 = 2$. Мнимые части комплексных чисел z_1, z_2, z_3 равны: $\operatorname{Im} z_1 = 3$, $\operatorname{Re} z_2 = 5$, $\operatorname{Re} z_3 = 0$.

Определение. Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающихся лишь знаком мнимой части, называются *комплексно-сопряженными*.

ПРИМЕР 2. Вычислить комплексно-сопряженные числа для комплексных чисел: $z_1 = 2 + i8$, $z_2 = 3 - i5$, $z_3 = 10$, $z_4 = -i10$.

Решение:

У комплексных чисел необходимо сменить знак мнимой части на противоположный. Комплексно-сопряженные числа: $\overline{z_1} = 2 - i8$, $\overline{z_2} = 3 + i5$, $\overline{z_3} = 10$, $\overline{z_4} = i10$.

Ответ: Комплексно-сопряженные числа комплексных чисел z_1, z_2, z_3, z_4 равны: $\overline{z_1} = 2 - i8$, $\overline{z_2} = 3 + i5$, $\overline{z_3} = 10$, $\overline{z_4} = i10$.

Определение. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными* тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части, т. е. $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Замечание. Комплексные числа не сравнивают между собой, понятие «больше», «меньше» для них не существует.

1.2. Комплексная плоскость

Любое комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой *M(x;y)* плоскости Oxy декартовых координат такой, что $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. И наоборот. На рисунке 1 изображено комплексное число *M*.

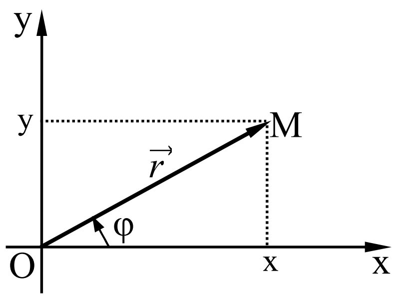

Рис. 1. *Геометрическое изображение комплексного числа*

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*. Число $z = 0$ является началом координат данной плоскости, ось абсцисс называется *действительной осью*, ось ординат – *мнимой осью комплексной плоскости*.

Комплексное число $z = x + iy$ можно изображать с помощью радиуса-вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x; y)$. Длина вектора $\vec{r}$, изображающего комплексное число z (см. рис. 1), называется модулем этого числа и обозначается $|z|$ или r. Модуль числа z вычисляется по формуле $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

ПРИМЕР 3. Вычислить модули комплексных чисел: $z_1 = 4 + i5$ и $z_2 = -3 + i4$.

Решение:

Для комплексного числа z_1 $x_1 = 4$, $y_1 = 5$, следовательно, $|z_1| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$.

Для комплексного числа z_2 $x_2 = -3$, $y_2 = 4$, следовательно, $|z_2| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

Ответ: Модули комплексных чисел z_1, z_2 равны: $|z_1| = \sqrt{41}$, $|z_2| = 5$.

Определение. Величина угла (см. рис. 1) между положительным направлением действительной оси и вектором $\vec{r}$, изображающим комплексное число, называется *аргументом этого комплексного числа* и обозначается $Argz$ или φ.

Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ определяется с точностью до $2\pi k$ (k=0, ± 1, $\pm 2, \ldots$). $Argz = \arg z + 2\pi k$, где $\arg z = \varphi$ – главное значение аргумента, $\pi < \arg z \le \pi$. Аргумент комплексного числа $z = 0$ не определен.

Из рисунка 1 видно, что $tg(\varphi) = \dfrac{y}{x}$, следовательно,

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} arctg\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{– для внутренних точек I, IV координатных четвертей} \\ & \text{(т. е. x > 0, y > 0 или x > 0, y < 0)} \\ arctg\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi & \text{– для внутренних точек II координатной четверти} \\ & \text{(т. е. x < 0, y > 0)} \\ arctg\left(\dfrac{y}{x}\right) - \pi & \text{– для внутренних точек III координатной четверти} \\ & \text{(т. е. x < 0, y < 0)} \end{cases}$$

Если точка z лежит на действительной или мнимой оси координат, то $\arg z$ можно вычислить непосредственно из графика.

Между множеством всех комплексных чисел и множеством точек комплексной плоскости устанавливается взаимно однозначное соответствие.

ПРИМЕР 4. Комплексные числа: $z_1 = 3$, $z_2 = -i2$, $z_3 = 4 + i4$, $z_4 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_5 = -3 - i\sqrt{3}$ изобразить векторами на комплексной плоскости и вычислить главное значение аргумента.

Решение:

1. Найти действительные и мнимые части комплексных чисел: z_1, z_2, z_3, z_4, z_5.

Действительные части комплексных чисел: $\operatorname{Re} z_1 = x = 3 > 0$, $\operatorname{Re} z_2 = x = 0$, $\operatorname{Re} z_3 = x = 4 > 0$, $\operatorname{Re} z_4 = x = -1 < 0$, $\operatorname{Re} z_5 = x = -3 < 0$. Мнимые части комплексных чисел: $\operatorname{Im} z_1 = y = 0$, $\operatorname{Im} z_2 = y = -2 < 0$, $\operatorname{Im} z_3 = y = 4 > 0$, $\operatorname{Im} z_4 = y = \sqrt{3} > 0$, $\operatorname{Im} z_5 = y = -\sqrt{3} < 0$.

2. Изобразить векторами комплексные числа: z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 (см. рис. 2).

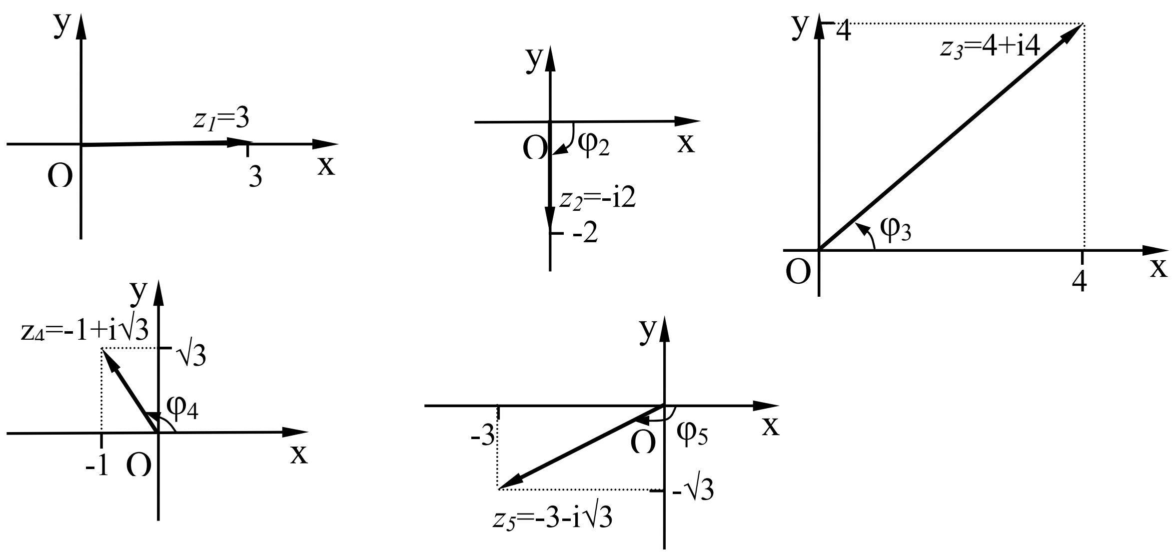

Рис. 2. *Геометрическое изображение комплексных чисел: z_1, z_2, z_3, z_4, z_5*

3. Вычислить главное значение аргумента комплексных чисел: z_1, z_2, z_3, z_4, z_5.

$\varphi_1 = arctg\left(\frac{0}{3}\right) = arctg(0) = 0$; $\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$; $\varphi_3 = arctg\left(\frac{4}{4}\right) = arctg(1) = \frac{\pi}{4}$;

$$\varphi_4 = arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) + \pi = arctg\left(-\sqrt{3}\right) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2}{3}\pi;$$

$$\varphi_5 = arctg\left(\frac{-\sqrt{3}}{-3}\right) - \pi = arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5}{6}\pi.$$

Ответ: Главные значения аргумента комплексных чисел: z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 равны: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$, $\varphi_3 = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_4 = \frac{2}{3}\pi$, $\varphi_5 = -\frac{5}{6}\pi$.

1.3. Формы записи комплексных чисел

Комплексное число может быть представлено в одной из трех форм записи:

1. Алгебраическая форма записи числа $z = x + iy$.

2. Тригонометрическая форма записи числа: $z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Используя формулу Эйлера $e^{i\varphi} = (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$, комплексное число можно записать в показательной форме.

3. Показательная (экспоненциальная) форма записи числа: $z = re^{i\varphi}$ или $z = |z|e^{i\varphi}$.

ПРИМЕР 5. Записать комплексное число $z = 2 + i2$ в тригонометрической и показательной форме записи.

Решение:

1. Вычислить модуль комплексного числа z: $z = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{2}$.

2. Найти главное значение аргумента комплексного числа: $x = 2 > 0$, $y = 2 > 0$, следовательно, $\varphi = arctg\left(\frac{2}{2}\right) = arctg(1) = \frac{\pi}{4}$.

3. Записать комплексное число z в тригонометрической форме: $z = 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

4. Записать комплексное число z в показательной форме: $z = 2\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Ответ: Комплексное число z в тригонометрической форме – $z = 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$; комплексное число z в показательной форме – $z = 2\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

1. Сложение комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$.

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Свойства операции сложения комплексных чисел:

1^0) коммутативность $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;

2^0) ассоциативность $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

2. Вычитание комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$.

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

3. Произведение комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$.

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2),$$

или если числа $z_1 = r_1 \cdot (\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))$ и $z_2 = r_2 \cdot (\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2))$ заданы в тригонометрической форме, то

$$z = z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Свойства операции умножения комплексных чисел:

1^0) коммутативность $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$;

2^0) ассоциативность $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$;

3^0) дистрибутивное $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

4. Деление комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{\left|z_2^2\right|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2},$$

или если числа $z_1 = r_1 \cdot (\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))$ и $z_2 = r_2 \cdot (\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2))$ заданы в тригонометрической форме, то

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

ПРИМЕР 1. Найти z_1+2z_2, z_1-3z_2, $z_1\cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, если $z_1=2+i2$, $z_2=3-i2$.

Решение:

Используя пункты 1–5 данного раздела, находим:

$$z_1+2z_2=2+i2+2\cdot(3-i2)=2+i2+6-i4=8-i2;$$

$$z_1-3z_2=2+i2-3\cdot(3-i2)=2+i2-9+i6=-7+i8;$$

$$z_1\cdot z_2=(2+i2)\cdot(3-i2)=6-i4+i6-i^2 4=6+i2+4=10+i2;$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2+i2}{3-i2}=\frac{2+i2}{3-i2}\cdot\frac{3+i2}{3+i2}=\frac{6+i4+i6-4}{9+i6-i6+4}=\frac{2+i10}{13}=\frac{2}{13}+i\frac{10}{13}.$$

Ответ: $z_1+2z_2=8-i2$; $z_1-3z_2=-7+i8$; $z_1\cdot z_2=10+i2$; $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{2}{13}+i\dfrac{10}{13}$.

Возведение комплексного числа в степень с натуральным показателем и извлечение корней из комплексных чисел

При возведении комплексных чисел в натуральную степень используют формулу Муавра $z^n=r^n\left(\cos(\varphi n)+i\sin(\varphi n)\right)$.

Корень n-ой степени из комплексного числа z имеет n различных значений, которые вычисляются по формуле

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right),\ \text{где } k=0,1,2,\dots,n-1.$$

Точки, соответствующие значениям $\sqrt[n]{z}$, являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $R=\sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат.

ПРИМЕР 2. Найти z^9, $\sqrt[6]{z}$, если $z=-1-i\sqrt{3}$.

Решение:

1. Записать комплексное число z в тригонометрической форме. Для этого необходимо вычислить модуль этого комплексного числа $|z| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ и главное значение аргумента. Так как $x = -1 < 0$, $y = -\sqrt{3} < 0$, то $\varphi = arctg\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2}{3}\pi$.

Следовательно, $z = 2\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right)$.

2. Используя формулу Муавра, возвести комплексное число z в степень $z^9 = 2^9 \cdot \left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi \cdot 9\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi \cdot 9\right)\right) = 2^9 \cdot (\cos(-6\pi) + i\sin(-6\pi)) =$ $= 2^9 \cdot (1 + i0) = 2^9 = 512$.

Вычислить $\sqrt[6]{z}$

$$\sqrt[6]{z} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k}{6}\right)\right);$$

$$\sqrt[6]{z} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}\right)\right).$$

Ответ: $z^9 = 512$, $\sqrt[6]{z} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}\right)\right)$.

3. РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Рассмотрим квадратное уравнение $az^2+bz+c=0$, где z – переменная, a, b, c – постоянные коэффициенты, причем $a \neq 0$. Преобразовать квадратное уравнение, выделив в нем полный квадрат:

$$az^2+bz+c=a\cdot\left(z^2+2\cdot z\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)=a\cdot\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right).$$

Ввести обозначение $D=b^2-4ac$, тогда $a\cdot\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right)=0$,

следовательно, $z_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{-D}i}{2a}$.

ПРИМЕР 1. Решить квадратное уравнение $z^2+4z+53=0$.

Решение:

1. Вычислить дискриминант квадратного уравнения: $D=4^2-4\cdot1\cdot53=16-212=-196$. Дискриминант меньше нуля, следовательно, квадратное уравнение имеет комплексные корни.

2. Вычислить z_1, z_2: $z_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{-196}}{2\cdot1}=\dfrac{-4\pm14\sqrt{-1}}{2\cdot1}=-2\pm i7$.

Ответ: $z_1=-2-i7$, $z_2=-2+i7$.

4. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Вариант 1

1. Даны комплексные числа $z_1 = -7 + 7i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $z_1 + 2z_2$, $z_1 - z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^6, $\sqrt[8]{z_1}$.

Вариант 2

1. Даны комплексные числа $z_1 = 7 + 7i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $z_1 + 2z_2$, $z_1 - z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{10}, $\sqrt[6]{z_1}$.

Вариант 3

1. Даны комплексные числа $z_1 = 3 + 3\sqrt{3}i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $z_1 + 3z_2$, $z_1 - 2z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{30}, $\sqrt[4]{z_1}$.

Вариант 4

1. Даны комплексные числа $z_1 = 8$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $z_1 + 4z_2$, $z_1 - z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{30}, $\sqrt[5]{z_1}$.

Вариант 5

1. Даны комплексные числа $z_1 = 6 + 2\sqrt{3}i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $z_1 + 5z_2$, $z_1 - 4z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{15}, $\sqrt[7]{z_1}$.

Вариант 6

1. Даны комплексные числа $z_1 = -2 + 2i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $z_1 + 6z_2$, $z_1 - 3z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{100}, $\sqrt[9]{z_1}$.

Вариант 7

1. Даны комплексные числа $z_1 = -2 + 2\sqrt{3}i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $z_1 + 7z_2$, $z_1 - 2z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{15}, $\sqrt[10]{z_1}$.

Вариант 8

1. Даны комплексные числа $z_1 = 6 - 6i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $z_1 + 8z_2$, $z_1 - z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{14}, $\sqrt[3]{z_1}$.

Вариант 9

1. Даны комплексные числа $z_1 = 4 - 4\sqrt{3}i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{15}, $\sqrt[8]{z_1}$.

Вариант 10

1. Даны комплексные числа $z_1=-3$ и $z_2=3+2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1\cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, z_1+2z_2, z_1-z_2.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{25}, $\sqrt[6]{z_1}$.

Вариант 11

1. Даны комплексные числа $z_1=3i$ и $z_2=3+2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1\cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, z_1+z_2, z_1-2z_2.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{20}, $\sqrt[4]{z_1}$.

Вариант 12

1. Даны комплексные числа $z_1=3+\sqrt{3}i$ и $z_2=3+2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1\cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, z_1+3z_2, z_1-z_2.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{9}, $\sqrt[5]{z_1}$.

Вариант 13

1. Даны комплексные числа $z_1=-12+4\sqrt{3}i$ и $z_2=3+2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1\cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, z_1+z_2, $3z_1-z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^6, $\sqrt[7]{z_1}$.

Вариант 14

1. Даны комплексные числа $z_1 = -9 - 3\sqrt{3}i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $z_1 + z_2$, $z_1 - 3z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^6, $\sqrt[9]{z_1}$.

Вариант 15

1. Даны комплексные числа $z_1 = 3 + 3i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $z_1 + 4z_2$, $z_1 - z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{30}, $\sqrt[10]{z_1}$.

Вариант 16

1. Даны комплексные числа $z_1 = -6 - 6\sqrt{3}i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $z_1 + z_2$, $z_1 - 4z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{12}, $\sqrt[2]{z_1}$.

Вариант 17

1. Даны комплексные числа $z_1 = 2$ и $z_2 = 3+2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $z_1 + 5z_2$, $z_1 - z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{20}, $\sqrt[3]{z_1}$.

Вариант 18

1. Даны комплексные числа $z_1 = 3\sqrt{3}i$ и $z_2 = 3+2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $z_1 + z_2$, $z_1 - 5z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{12}, $\sqrt[4]{z_1}$.

Вариант 19

1. Даны комплексные числа $z_1 = -1+\sqrt{3}i$ и $z_2 = 3+2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $z_1 + 6z_2$, $z_1 - z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{30}, $\sqrt[5]{z_1}$.

Вариант 20

1. Даны комплексные числа $z_1 = 4 - 4\sqrt{3}i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\mathrm{Im}\, z_1$, $\mathrm{Re}\, z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $z_1 + z_2$, $z_1 - 6z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{21}, $\sqrt[6]{z_1}$.

Вариант 21

1. Даны комплексные числа $z_1 = 4 - 4i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\mathrm{Im}\, z_1$, $\mathrm{Re}\, z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $z_1 + 7z_2$, $z_1 - z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{20}, $\sqrt[7]{z_1}$.

Вариант 22

1. Даны комплексные числа $z_1 = -8i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\mathrm{Im}\, z_1$, $\mathrm{Re}\, z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $z_1 + z_2$, $z_1 - 7z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{9}, $\sqrt[8]{z_1}$.

Вариант 23

1. Даны комплексные числа $z_1 = -2$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\mathrm{Im}\, z_1$, $\mathrm{Re}\, z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $z_1 + 8z_2$, $z_1 - z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{10}, $\sqrt[9]{z_1}$.

Вариант 24

1. Даны комплексные числа $z_1 = 6 - 2\sqrt{3}i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $z_1 + z_2$, $z_1 - 8z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{4}, $\sqrt[10]{z_1}$.

Вариант 25

1. Даны комплексные числа $z_1 = 5\sqrt{3}i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $z_1 + 9z_2$, $z_1 - z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{15}, $\sqrt[11]{z_1}$.

Вариант 26

1. Даны комплексные числа $z_1 = 3 - \sqrt{3}i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $z_1 + z_2$, $z_1 - 9z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^6, $\sqrt[12]{z_1}$.

Вариант 27

1. Даны комплексные числа $z_1 = 4$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $3z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{15}, $\sqrt[13]{z_1}$.

Вариант 28

1. Даны комплексные числа $z_1 = 2 + 2i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 + z_2$, $3z_1 - z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^{16}, $\sqrt[14]{z_1}$.

Вариант 29

1. Даны комплексные числа $z_1 = -i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $2z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^6, $\sqrt[15]{z_1}$.

Вариант 30

1. Даны комплексные числа $z_1 = -10 + 10i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Найти: $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Re} z_1$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $z_1 + 7z_2$, $4z_1 - 3z_2$.

2. Записать число z_1 в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Изобразить число z_1 графически.

3. Вычислить z_1^9, $\sqrt[35]{z_1}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебно-методическом пособии рассмотрен раздел высшей математики «Комплексные числа». Знание этого материала в дальнейшем необходимо для изучения: непрерывности и дифференцируемости функции комплексного переменного; элементарных функций и конформного отображения; интегрирования функции комплексного переменного; разложения функции комплексного переменного в ряды Тейлора и Лорана; теории вычетов; операционного исчисления, а также для корректного использования математического аппарата для решения задач в нефтегазовой отрасли.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для студентов втузов. – Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М.: Оникс, 2008. – 816 с.: ил.

2. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике. I курс: с контрольными работами / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. – 9-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 576 с.: ил.

3. Минорский, В. П. Сборник задач по высшей математике: учебное пособие для вузов / В. П. Минорский. – М.: изд-во физико-математической литературы, 2006. – 336 с.

4. Письменный, Д. Т. Тридцать пять лекций: в 2 ч. – Ч. 1 / Д. Т. Письменный. – 9-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 288 с.: ил.

5. http://afrodita.phys.msu.ru/study/tcvf/

6. http://window.edu.ru/window_catalog/files/r19160/metod279.pdf.

7. http://www.exponenta.ru/educat/class/courses/student/tfkp/examples.asp.

Учебное издание

ЛАЗАРЕВА Валентина Георгиевна

МАТЕМАТИКА:

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Учебно-методическое пособие

Корректор М. Ф. Шатохина
Верстка Е. Ю. Иосько

Подписано в печать 10.07.2011. Бумага «SvetoCopy»
Гарнитура «Times New Roman». Формат 60x84$^{1}/_{16}$
Тираж 500 экз. Объем 1,75 усл. п. л. Заказ № 534-11

Издательство Сахалинского государственного университета
963008, Южно-Сахалинск, ул. Ленина, 290, каб. 32
Тел. (4242) 45-23-16. Факс (4242) 45-23-17
E-mail: polygraph@sakhgu.sakhalin.ru