

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
Сахалинский государственный университет

Л. М. Богомолов
Г. С. Качесова

ВВЕДЕНИЕ В ВЕКТОРНЫЙ И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

Часть 1

Учебное пособие

Южно-Сахалинск
Издательство СахГУ
2012

УДК 51(076)
ББК 22.1я73
Б 74

Печатается по решению учебно-методического совета
Сахалинского государственного университета, 2012 г.

Рецензент:

Т. К. Злобин, доктор геолого-минералогических наук,
профессор, профессор кафедры физики и методики
преподавания физики СахГУ, главный научный сотрудник
ИМГиГ ДВО РАН.

Богомолов, Л. М. Введение в векторный и тензорный анализ : учебное пособие / Л. М. Богомолов, Г. С. Качесова. — Ч. 1. — Южно-Сахалинск : изд-во СахГУ, 2012. — 56 с.
Б 74 ISBN 978-5-88811-415-5

В пособии представлен материал по избранным разделам высшей математики, знание которых необходимо для изучения курсов «Уравнения математической физики» и «Основы теоретической физики»: аксиоматическому построению математики, линейной алгебре, элементам векторного и тензорного анализа. Внимание сфокусировано на рациональных способах записи важнейших результатов векторного и тензорного анализа, которые упрощают переход к практическим приложениям высшей математики, в частности к теоретической физике и компьютерному моделированию. Издание предназначено для студентов педагогических университетов, обучающихся по специальностям «Прикладная математика и информатика» и «Информатика и физика».

УДК 51(076)
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-88811-415-5

© Богомолов Л. М., 2012
© Качесова Г. С., 2012
© Сахалинский государственный
университет, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
ГЛАВА 1. Введение в аксиоматический метод. Аксиомы Г. Вейля	6
ГЛАВА 2. Основные понятия линейной алгебры	10
ГЛАВА 3. Векторная и тензорная алгебра в трехмерном евклидовом пространстве.....	24
ГЛАВА 4. Инварианты	33
ГЛАВА 5. Элементы векторного анализа в евклидовом трехмерном пространстве	43
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	52
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	53

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс высшей математики, читаемый в технических и педагогических университетах, является фундаментом для дальнейшего изучения специальных дисциплин и формирования у студентов научной картины мира. Исторически сложилась структура этого курса: сначала читаются основные блоки – математический анализ, линейная алгебра, теория обыкновенных дифференциальных уравнений, а затем на примерах уравнений в частных производных демонстрируется возможность синтеза результатов различных курсов с целью решения «практической» задачи. Фактически такая сборка разделов проводится при обучении уравнениям математической физики либо теоретической физики, либо специальным дисциплинам, завершающим высшее профессиональное образование. Цель настоящего пособия – выделить или напомнить те положения из различных разделов высшей математики, из которых составляется математический аппарат теоретической физики и специализированных дисциплин. Беседы со студентами Сахалинского государственного университета, обучающимися по специальностям «Прикладная математика» и «Информатика и физика», выявили, что такое пособие может быть полезным и для ликвидации пробелов в знаниях по математическому анализу и другим начальным разделам математического курса.

Другой аспект, определяющий актуальность издания с предельно компактным изложением ряда положений высшей математики и упором на практические навыки, – необходимость адаптации методики преподавания к реальным условиям, которые сложились во многих университетах в нулевых годах нашего века. Здесь имеется в виду снижение интереса студентов-программистов к высшей математике, недооценка ее роли как фундамента для прикладной математики и информационных технологий (по сути компьютерного моделирования либо реализации алгоритмов обработки и распространения данных). При этом как раз и оправдан быстрый переход от базовых положений, на которых основаны вычислительные алгоритмы, к представлениям, допускающим формализацию в компьютерных программах. Но такое ускорение получается за счет математической строгости. Примером компромисса между «доказательностью» и краткостью

является замечательная книга Зельдовича Я. Б., Мышкиса А. Д. «Элементы математической физики» [1]. Эта книга была начальным учебником для огромного числа инженеров, учителей и др. специалистов, которые обучались в прошлом веке в сложные по своему времени. Ее успех вдохновил авторов в написании настоящего справочно-методического пособия. Авторы также приняли во внимание, что краткие пособия по разделам высшей математики (вводные, пропедевтические курсы) рекомендованы студентам ряда инженерно-физических специальностей ведущих госуниверситетов наряду с классическими учебниками. Использование методичек-конспектов как дополнительной литературы должно сработать и при подготовке специалистов по прикладной математике в СахГУ и других педагогических университетах.

Авторы признательны профессору Т. К. Злобину за поддержку в работе над учебным пособием и рекомендации по его подготовке к публикации в СахГУ, а также дизайнерам-верстальщикам Б. В. Куницкому и С. А. Мызину за техническую помощь.

ГЛАВА 1

ВВЕДЕНИЕ В АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД. АКСИОМЫ Г. ВЕЙЛЯ

Рассмотрим следующие логические аксиомы, которые известны как аксиомы Евклида [2]:

1. Равные одному и тому же третьему равны также и между собой:

$$\begin{cases} a = b, \\ c = b \end{cases} \Rightarrow a = c. \quad (1.1)$$

2. В случае сложения равных с равными их суммы равны:

$$\begin{cases} a = b, \\ c = d \end{cases} \Rightarrow a + c = b + d. \quad (1.2)$$

3. Если вычесть равные из равных, то остатки также равны:

$$\begin{cases} a = b, \\ c = d \end{cases} \Rightarrow a - c = b - d. \quad (1.3)$$

4. Налагающиеся друг на друга равны.

5. Часть всегда меньше целого: $a > a - b$.

Аксиомы 1, 2, 3 и 5 утверждают, что отношения, которые они выражают, справедливы также для всех геометрических величин, таких как углы, отрезки и т. п. А согласно четвертой аксиоме определяющим фактором в вопросе о равенстве и неравенстве является совпадение величин при наложении. Однако идея движения в данном случае остается неопределенной. Возможно ли представить себе конгруэнтность, т. е. совпадение геометрических фигур при наложении без движения в физическом смысле? В классической геометрии Евклидом такая возможность считается постулатом. Чем же отличается аксиома от постулата? Аксио-

ма основана на логическом обобщении знаний, а постулат – на фактах пространственной интуиции. Именно этот момент в постулатах Евклида давал предпосылки для сомнения в непротиворечивости его системы аксиом и постулатов. Завершенная непротиворечивая система аксиом была введена Гильбертом [3]. Но для нашего курса более интересна иная, абсолютно новая система аксиом, которая была предложена Германом Вейлем. Это аксиоматическое построение особо важно для физиков и специалистов по прикладной математике.

В первую очередь Вейль ввел такие понятия, как точка и вектор. По Вейлю, определение вектора звучит следующим образом: *если отрезок обладает лишь длиной, то вектор обладает как длиной, так и направлением. Собственно говоря, вектор представляет собой то же самое, что и перенос, однако для векторов и переносов используют разную терминологию. Поэтому говорят не о переносе a , который переводит точку A в точку A' , а о векторе $\mathbf{a} = AA'$. И вместо фразы «Перенос a переводит точку A в точку A' » говорят, что точка A' является концом вектора, отложенного от точки A . И тот же самый вектор $\mathbf{a}$, отложенный от точки B , имеет конец в точке B' , если перенос, переводящий A в A' , переводит B в B' [4, с. 71].*

Теперь введем следующие аксиомы. В системе аксиом Вейля в основе определения «евклидово пространство» лежат такие объекты, как «точки» и «векторы». Между ними существует связь, определяемая тем, что двум любым точкам A и B ставится в соответствие один и только один вектор $\overrightarrow{AB}$, и любой точке A и вектору $\mathbf{a}$ соответствует одна-единственная точка B , такая, что вектор $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$; к тому же для произвольных точек A, B, C справедливо следующее равенство:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad (1.4)$$

Для всех векторов определены следующие операции: сложение векторов и умножение вектора на число. Эти операции удовлетворяют обычным свойствам векторов. В результате чего произвольная прямая AB представляет собой совокупность всех точек P , удовлетворяющих условию:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AB}. \quad (1.5)$$

Здесь точки O , A и B фиксированы, а λ является произвольным числом.

Произвольная плоскость ABC определяется совокупностью точек P , для которых справедливо следующее выражение:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}, \quad (1.6)$$

где O , A , B и C – фиксированные точки, а множители λ и μ обозначают произвольные числа.

Кроме того, необходимо, чтобы векторное множество удовлетворяло также аксиоме размерности, которая заключается в том, что любые четыре вектора должны быть линейно зависимы, однако должны существовать три линейно независимых вектора. И наконец, необходимо в любом множестве векторов определить операцию скалярного умножения, результатом которого является сопоставление двум произвольным векторам $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ числа $(X \cdot Y)$, которое удовлетворяет следующим условиям:

– условию коммутативности: $X \cdot Y = Y \cdot X$ для любых векторов $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$;

– условию линейности:

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \cdot b = \lambda_1 (x_1 \cdot b) + \lambda_2 (x_2 \cdot b) \quad (1.7)$$

для любых векторов x_1 , x_2 , b и чисел λ_1 , λ_2 ;

– условию положительной определенности

$$\begin{cases} a^2 = a \cdot a > 0, \text{ при } a \neq 0 \\ a^2 = 0, \text{ при } a = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

Здесь 0 – это нуль-вектор, сложение с которым не может изменить ни один вектор.

Система аксиом Германа Вейля особенно востребована физиками по многим причинам. Прежде всего ее можно применять

в случае n -мерных (и в случае, когда $n = \infty$) пространств. Кроме того, она может быть без особого труда распространена на пространство Минковского, используемое в теории относительности (псевдоевклидова метрика). И наконец, эта аксиоматика позволила несколько упростить сложный математический аппарат, применяемый в квантовой механике. Поль-Морис Дирак установил, что произведение вектора в прямом пространстве и вектора в комплексно-сопряженном пространстве представляет собой скалярное произведение. А согласно рассматриваемой нами аксиоматике скалярное произведение можно определить как произведение двух векторов, принадлежащих различным пространствам, если между ними установить взаимно однозначное соответствие в данных пространствах. Частным случаем такого соответствия является комплексное сопряжение квантово-механических функций состояния Ψ и Ψ^* .

При отказе от условия положительности скалярного произведения, например от положительной определенности $\mathbf{a}^2$, т. е. приняв, что $\mathbf{a}^2 \neq 0$, но может быть как положительным, так и отрицательным, оказывается возможным переход к псевдоевклидовой метрике пространства Минковского либо метрике релятивистской квантовой механики и специальной теории относительности.

Аксиомы Вейля дают возможность ввода преобразования симметрии, к примеру – понятие автоморфизма. Автоморфизмом называется преобразование фигуры либо пространства, которое не влечет за собой их изменение. При использовании аппарата векторной алгебры и векторного анализа в задачах теоретической физики, включая компьютерное моделирование, следует помнить, что вектор, по сути, есть то же самое, что и перенос (т. е. идеюную основу аксиоматики Вейля).

ГЛАВА 2

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Для начала приведем некоторые определения, известные из курса линейной алгебры [5], которые понадобятся в дальнейшем.

Линейным (векторным) пространством называется множество элементов M , а его элементы векторами, если для них определены следующие операции:

1) операция **сложения**, согласно которой любым двум элементам, принадлежащим пространству M , сопоставляется элемент, являющийся их суммой и также принадлежащий данному пространству;

2) операция **умножения** на число (вещественное или комплексное), согласно которой какому-либо элементу (вектору) X пространства M и числу α ставится в соответствие элемент данного пространства, называемый произведением X на α .

В частности, линейное пространство может быть образовано непрерывными функциями $f(t)$, которые определены на отрезке $a \leq t \leq b$. Тогда данные функции $f(t)$ тоже являются векторами.

Описанные выше операции сложения и умножения векторов на число могут быть представлены наглядно.

Здесь и далее договоримся обозначать векторы жирными буквами.

Прежде всего необходимо ввести понятие линейной независимости или «непараллельности» векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Данные векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются линейно независимыми, если линейная комбинация векторов не равна нулю:

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} \neq \mathbf{0} \text{ при любых } \alpha \neq 0 \ \beta \neq 0. \quad (2.1)$$

Линейное пространство с максимальным числом линейно независимых векторов, равным n : $\{\mathbf{e}_i\}, i = 1, 2, \dots, n$ – называется n -мерным, а число n – размерностью данного пространства.

Набор векторов $\{\mathbf{e}_i\}$ называется базисом образованного ими пространства M_n . Любой вектор $\mathbf{m}$, принадлежащий множеству

М: $\mathbf{m} \in M_n$, может быть представлен как линейная сумма базисных векторов пространства М:

$$\mathbf{m} = \sum^n m_i \mathbf{e}_i. \quad (2.2)$$

Данное выражение называют свойством полноты набора $\{\mathbf{e}_i\}$. Выражение (2.2) может быть рассмотрено в качестве определения. Запись выражения (2.2) соответствует правилу суммирования Эйнштейна, которое принято в физике для более простой записи операции, где по дважды повторяющемуся индексу также производится суммирование, а знак $\sum$ не пишется. Числа m_i представляют собой *координаты* вектора $\mathbf{m}$ в данном базисе $\{\mathbf{e}_i\}$.

Принимая во внимание выражение (2.2), можно сделать вывод, что операция сложения векторов – это не что иное, как сложение их координат. Согласно определению (2.2) операция сложения векторов означает сложение:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = a_i \mathbf{e}_i + b_i \mathbf{e}_i = (a_i + b_i) \mathbf{e}_i. \quad (2.3)$$

Соответственно умножение вектора на число – это операция умножения всех его координат на это число:

$$\alpha \mathbf{a} = \alpha a_i \mathbf{e}_i. \quad (2.4)$$

Базисные вектора $\{\mathbf{e}_i\}$ называются *ортами*. Благодаря введенным нами формулам (2.2)–(2.4), линейное пространство М может быть представлено в качестве пространства с *системой координат*, которая определяется ортами $\{\mathbf{e}_i\}$.

Координаты вектора могут быть записаны как строка чисел:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n). \quad (2.5)$$

Причем данная строка упорядочена согласно порядку нумерации ортов $\{\mathbf{e}_i\}$. Отсюда следует, что вышеуказанная сумма двух произвольных векторов, которые записаны в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ (2.5), может быть представлена в виде упорядоченной строки чисел:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n), \quad (2.6)$$

соответственно операция умножения вектора на число также может быть записана в виде строки вида:

$$\alpha \mathbf{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n) . \quad (2.7)$$

Благодаря подобному представлению векторов в виде упорядоченных строк, мы можем и сами базисные вектора $\{\mathbf{e}_i\}$ (орты) записать в виде строк. Для большей наглядности приведем пример представления базисных единичных векторов $\{\mathbf{e}_i\}$ следующим образом:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1) . \quad (2.8)$$

Однако, если способ определения координат в рассматриваемом базисе не указан, то вектор не является определенным, а, следовательно, все приведенные нами формулы невозможно применить на практике. Можно считать вектор определенным, если существует строгий регулярный способ сопоставления данному вектору определенного упорядоченного набора чисел. Чтобы осуществить это посредством взаимодействия векторной алгебры и аналитической геометрии, потребуется ввести такие понятия, как длина вектора и угол между векторами линейного пространства M , тем самым определив скалярное произведение.

Скалярное произведение двух заданных векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ обозначается как $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и определяется следующим образом. Скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ является числом (скаляром), которое удовлетворяет условиям (2.9)–(2.11):

$$1) \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}) , \quad (2.9)$$

$$2) \quad (\mathbf{y}, \alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2) = \alpha (\mathbf{y}, \mathbf{x}_1) + \beta (\mathbf{y}, \mathbf{x}_2) , \quad (2.10)$$

$$3) \quad (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0, (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 = 0 \text{ только при } \mathbf{x} = 0 , \quad (2.11)$$

причем условие (2.11) обязательно только в Евклидовом пространстве.

Если скалярное произведение двух векторов равно нулю $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, то данные векторы являются $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ ортогональными. В большинстве случаев при рассмотрении физических задач применяют ортогональные базисы.

Система векторов $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ называется ортонормированной, если при любых $i \neq j$ их скалярное произведение равно нулю $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$, а при $i = j$ оно равно 1:

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}. \quad (2.12)$$

С учетом (2.12) для двух вещественных векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x_i \mathbf{e}_i, \mathbf{y} = y_i \mathbf{e}_i \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (x_i \mathbf{e}_i, y_k \mathbf{e}_k) = x_i y_k (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = x_i y_k \delta_{ik} = x_i y_k. \end{aligned} \quad (2.13)$$

ЗАДАЧА

Докажите, что данная система векторов в трехмерном пространстве является линейно независимой: $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 1, -1)$.

В случае же неортогональности базисных векторов (ортов) скалярное произведение произвольных векторов в данном пространстве определяется следующим образом:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g_{ik} x_i y_k, \quad (2.14)$$

где g_{ik} представляет собой скалярное произведение базисных векторов:

$$g_{ik} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k). \quad (2.15)$$

Совокупность элементов g_{ik} представляет собой метрический тензор. Определение тензора будет дано ниже. Запись (2.15) можно считать определением метрического тензора как частного вида тензоров. Для построения математического аппарата, описывающего различные физические процессы, метрический тензор является крайне важным элементом. Стоит отметить, что при специальном выборе ортогональных базовых векторов, задающих криволинейные системы координат (цилиндрическую, сферическую и др.), диагональные компоненты метрического тензора, которые не обращаются в нуль, в курсах векторного анализа аналитиче-

ской механики, как правило, называются коэффициентами Ламэ: $g_{11} = h_1^2, g_{22} = h_2^2 \dots$.

Помимо упорядоченных строк таблицы элементов размером $m \times n$ также удовлетворяют условию (2.1) и, по определению, являются элементами линейного пространства:

$$(a_{ij}) \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Совокупность $m \cdot n$ чисел, представленных в виде таблицы из m строк и n столбцов, принято называть матрицей. Множество подобных матриц образует линейное пространство размерности $m \times n$. Важно, чтобы для матриц выполнялись условия определения. Заметим, что базис в указанном пространстве тоже образован матрицами $m \times n$.

ПРИМЕР 1

Компоненты введенного в (2.15) метрического тензора g_{ik} образуют квадратную матрицу, $m = n$, у которой $g_{ik} = g_{ki}$.

ПРИМЕР 2

Рассмотрим пространство матриц размерностью 2×2 . В нем выберем базис, образованный следующими матрицами:

$$\begin{aligned} a_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & a_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ a_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & a_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Совершенно ясно, что матрицы (2.17) можно заменить любой их линейной комбинацией. При рассмотрении физических задач в основном используют комбинацию (2.18):

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
(2.18)

где $\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = \sigma_y$, $\sigma_3 = \sigma_z$ – это матрицы Паули, используемые в квантовой механике. Матрица I имеет особое значение, она называется единичной.

УПРАЖНЕНИЕ

Докажите следующее: квадрат ненулевых матриц $\sigma_{\pm} = \sigma_x \pm i \sigma_y$ равен нулю.

Введем еще несколько понятий, связанных с матрицами.

1. Транспонированная матрица. Матрицу $\tilde{A}$ называют транспонированной матрицей A , если каждая ее строка является столбцом матрицы A с тем же номером (а каждый столбец $\tilde{A}$ является строкой A):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

2. Если матрица A состоит из комплексных элементов $a_{jk} = x_{jk} + y_{jk} i$, то матрица A^* , составленная из элементов $\bar{a}_{jk}$, комплексно сопряженных элементам a_{jk} , называется комплексно сопряженной матрице A .

$$A^* = (a_{jk}^*). \quad (2.20)$$

3. Матрица является эрмитово сопряженной, если выполняется следующее:

$$A^+ = (a_{ij})^+ = (a_{ji}^*) = \tilde{A}^*. \quad (2.21)$$

В случае, когда $A^+ = A$, матрицу называют эрмитовой.

Для физиков эрмитовы матрицы очень важны. В квантовой механике каждой физической величине ставится в соответствие своя эрмитова матрица. Эрмитовы матрицы обладают следующими свойствами:

1. Собственные значения эрмитовой матрицы являются действительными.
2. Собственные векторы эрмитовой матрицы представляют собой базис.

Для тензорных физических величин, описывающих анизотропную среду (например, электропроводность), требование эрмитовости матрицы, составленной из компонент физической величины в заданной системе координат, сводится к условию $A = \tilde{A}$ или, другими словами, симметрии квадратной матрицы ($m = n$) относительно главной диагонали.

Отметим, что произведение двух матриц $A \cdot B$ существует только в том случае, если число столбцов матрицы слева (A) и число строк матрицы справа (B) равны.

$$A \cdot B = \boxed{m \times n} \times \begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline k \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline m \\ \hline k \\ \hline \end{array} \quad (2.22)$$

либо:

$$A \cdot B = \begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline k \\ \hline \end{array} \times \boxed{k \times m} = \boxed{n \times m} . \quad (2.23)$$

Матричные произведения обладают следующими свойствами:

1. Свойство ассоциативности: $(AB)C = A(BC)$.
2. Свойство: $(AB)^+ = B^+A^+$ (устанавливается проверкой).
3. В случае квадратных матриц можно определить такое понятие, как коммутатор:

В общем случае $AB - BA = [A, B] \neq 0$.

Рассмотрим примеры с матрицами Паули (2.18):

1. $\sigma_1 \sigma_2 = i \sigma_3$; $(\sigma_1 \sigma_2)^+ = \sigma_2^+ \sigma_1^+ = \sigma_2 \sigma_1 = -i \sigma_3$.

$$2. [\sigma_1, \sigma_2] = i 2 \sigma_3.$$

$$3. \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = i.$$

Матрица A^{-1} называется *обратной матрицей* к A , если выполняется следующее условие:

$$AA^{-1} = 1; \quad A^{-1}A = 1. \quad (2.24)$$

Квадратная матрица, у которой определитель не равен нулю $\det A \neq 0$, всегда имеет обратную матрицу. Когда A и B являются квадратными матрицами, тогда справедливо следующее равенство:

$$\det(AB) = (\det A)(\det B). \quad (2.25)$$

В том случае, когда определитель матрицы A не равен нулю и произведение матриц равно нулю, матрица B равна 0:

$$\begin{cases} \det A \neq 0, \\ AB = 0 \end{cases} \Rightarrow B = 0. \quad (2.26)$$

Матрица, удовлетворяющая равенству $U^+ U = 1$, называется унитарной. Как следствие имеем:

$$U^{-1} = U^+. \quad (2.27)$$

Если матрица состоит только из одной строки или одного столбца, то она представляет собой вектор. Вектор-строка может быть получена из вектора-столбца путем транспонирования либо эрмитовского сопряжения. Введем обозначения:

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \langle x| = (|x\rangle)^+ = (x_1^*, \dots, x_n^*). \quad (2.28)$$

Принимая во внимание запись базисных векторов (2.8), запишем следующее выражение:

$$|x\rangle = x_i |e_i\rangle, \quad \text{где } x_i = \langle e_i | x \rangle \quad (2.29)$$

В случае, когда A является матрицей, справедливо следующее:

$$A|x\rangle = |y\rangle, \quad (A|x\rangle)^+ = \langle x|A^+ = \langle y|. \quad (2.30)$$

При умножении квадратной матрицы и вектора происходит линейное преобразование координат этого вектора в другие его координаты в том же самом пространстве.

По правилам умножения матриц скалярное произведение векторов (2.13) может быть записано следующим образом:

$$(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \langle y|x\rangle = y_i^* x_i. \quad (2.31)$$

Напомним, что если для произвольной матрицы и обратной к ней справедливо следующее равенство, то она унитарная:

$$U^{-1} = U^+, \quad U^+U = 1. \quad (2.32)$$

Посредством унитарных матриц производят унитарные преобразования $U|x\rangle = |x'\rangle$, которые сохраняют скалярное произведение:

$$\langle y'|x'\rangle = \langle y|U^+U|x\rangle = \langle y|I|x\rangle = \langle y|x\rangle. \quad (2.33)$$

Теперь возможно определить оператор $\hat{G}$, другими словами, мы определим операцию, которая переводит произвольный вектор $|x\rangle$ в вектор $|y\rangle$, принадлежащий тому же пространству:

$$|y\rangle = G|x\rangle. \quad (2.34)$$

Определим оператор $\hat{G}$ как линейный в случае, если:

$$G(\alpha|x\rangle + \beta|y\rangle) = \alpha G|x\rangle + \beta G|y\rangle. \quad (2.35)$$

Оператор $\hat{G}$ задается в векторном пространстве!

Если мы имеем дело с n -мерным пространством, то оператор $\hat{G}$ представляется в виде матрицы $n \times n$.

Зададим базис $|e_i\rangle$, тогда в случае произвольного вектора $|x\rangle = x_i|e_i\rangle$ имеем:

$$G|x\rangle = x_i G|e_i\rangle. \quad (2.36)$$

Итак, действие оператора $\hat{G}$ на какой-либо вектор $|x\rangle$ полностью определяется действием оператора на векторы базиса пространства, которому принадлежит $|x\rangle$. Совершенно ясно, что:

$$G|e_i\rangle = g_{ik} |e_k\rangle. \quad (2.37)$$

Теперь, выполняя скалярное умножение выражения (2.37) на $|e_i\rangle$, получим следующее:

$$\langle e_j | G | e_i \rangle = g_{ik} \langle e_j | e_k \rangle = g_{ik} \delta_{jk} = g_{ij}. \quad (2.38)$$

Следовательно:

$$|x'\rangle = G|x\rangle = x_i g_{ik} |e_k\rangle. \quad (2.39)$$

Используемая здесь матрица g_{ik} оператора $\hat{G}$ представляет собой матрицу линейного преобразования, которая определяет «новые» координаты вектора $x'_k = x_i g_{ik}$ в том же самом, так называемом «старом», базисе. Важно отметить, что подобное преобразование может быть описано как умножение строки с координатами вектора x ($x_1, \dots, x_n$) на матрицу (g_{ik}).

ПРИМЕР

Рассмотрим поворот вектора в пространстве (размерностью $n = 3$) относительно оси аппликат z на угол φ_0 , чтобы лучше понять, как происходит линейное преобразование A :

$$x' = x \cos \varphi_0 - y \sin \varphi_0,$$

$$y' = y \cos \varphi_0 + x \sin \varphi_0,$$

$$z' = z;$$

$$\begin{cases} a_{11} = \cos \varphi_0, & a_{21} = -\sin \varphi_0, \\ a_{22} = \cos \varphi_0, & a_{12} = \sin \varphi_0, \\ a_{33} = 1, & a_{13} = a_{31} = a_{32} = a_{23} = 0, \end{cases} \quad (2.40)$$

$$(a_{ik}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_0 & \sin \varphi_0 & 0 \\ -\sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\det(a_{ik}) = 1; \quad (a_{ik}^{-1}) = (\tilde{a}_{ik}) = (a_{ik})^+.$$

Как видно, обратная матрица совпадает с транспонированной матрицей, которая в данном случае является и эрмитово сопряженной, $A^{-1} = A^+$.

Записывая координаты вектора $\mathbf{r}$ в виде столбца, приходим к выражению:

$$\mathbf{r} = A^{-1} \mathbf{r}. \quad (2.41)$$

Подведем итоги:

1. Закон преобразования базисных ортов, (2.36), определяется матрицей $G = (g_{ik})$.

2. Обратной матрицей $\hat{G}^{-1} = (g_{ik}^{-1})$ определяется закон преобразования компонентов вектора, который записан в том же самом базисе, что и $\hat{G}$.

Отметим, что операторы обладают всеми свойствами квадратных матриц:

1. Комплексное сопряжение: $\hat{G}^*$.

2. Транспонирование: $\hat{\tilde{G}}$.

3. Эрмитовское сопряжение: $\hat{G}^*$.

4. Определитель не зависит от выбора базиса: $\det G = \det(g_{ik})$

и т. д.

Рассмотренный выше пример матрицы преобразования (поворота вокруг оси аппликат, z) продемонстрировал, что действие оператора на базисные векторы целиком и полностью определяет его, а значит, оператор определяется путем задания системы ко-

ординат. В физике чаще всего выбирается система ортогональных векторов, которые нормированы на единицу.

Операторы, осуществляющие преобразование системы базисных векторов, имеют особое значение. Преобразованная система также должна являться ортонормированной. Очевидно, что этим операторам соответствуют унитарные матрицы в общем случае, т. е. те матрицы, которые сохраняют скалярное произведение. Отсюда можно сделать вывод, что сами операторы также должны быть унитарными.

ПРИМЕР 1

В некоторых задачах используют циклические координаты:

$$e_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x \pm ie_y), e_z. \quad (2.42)$$

Переход к базису, описанному в (2.42), осуществляется с помощью следующей матрицы:

$$(t_{ik}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

$$\begin{pmatrix} e_+ \\ e_- \\ e_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix}.$$

Используемая в данном случае матрица t_{ik} является унитарной. Проведенному преобразованию соответствует оператор $\hat{T}$, который также унитарен:

$$\hat{T}^+ \hat{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{1}. \quad (2.44)$$

ПРИМЕР 2

Рассмотрим вещественное двумерное пространство, в котором ортогональная матрица R может быть представлена в следующем виде:

$$1) \quad \det R = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}; \quad (2.45)$$

$$2) \quad \det R = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ \sin\psi & -\cos\psi \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Здесь $\psi = r + i\varphi$. Если определитель матрицы A равен 1: $\det A = 1$, то $\psi = \varphi_0$ является действительным. Предположим, что $\hat{U}$ представляет собой унитарное преобразование:

$$|e'_i\rangle = U |e_i\rangle; \quad \langle e'_i| = \langle e_i| U^+, \quad (2.47)$$

тогда после преобразования базиса оператор $\hat{G}$ будет описываться следующей матрицей:

$$\langle e'_i | G | e'_k \rangle = \langle e_i | U^+ G U | e_k \rangle. \quad (2.48)$$

Другими словами, после унитарного преобразования $\hat{U}$ запись «нового» оператора в первоначальном базисе приобретает форму:

$$G' = U^+ G U. \quad (2.49)$$

Формулу (2.49) можно интерпретировать следующим образом. Линейный оператор $\hat{G}$ – это не что иное, как правило, по которому любому вектору $|x\rangle$, принадлежащему какому-либо линейному пространству, можно сопоставить вектор $|x'\rangle$ этого же пространства. Данное правило можно записать в виде матрицы, определяемой правилом воздействия на базисные векторы, что зависит от выбора базиса.

Выше в (2.21) введено понятие эрмитовой матрицы. Аналогично вводится понятие эрмитового или самосопряженного оператора $\hat{H}$, удовлетворяющего условию:

$$\hat{H}^+ = \hat{H}. \quad (2.50)$$

В этом случае матрица данного оператора (в ортонормированном базисе пространства Евклида) также является эрмитовой. Любая матрица, если она симметрична и вещественна, является эрмитовой.

Равно как и скалярное произведение, унитарное преобразование $\hat{U}$ сохраняет свойство эрмитовости:

$$(U^+ H U)^+ = ((U)^+ (H)^+ (U)^+)^+ = U^+ H U. \quad (2.51)$$

Если вектор $|x\rangle \neq 0$ удовлетворяет равенству

$$G |x\rangle = \lambda |x\rangle, \quad (2.52)$$

то его называют собственным вектором линейного оператора $\hat{G}$. Здесь λ – собственное значение оператора $\hat{G}$.

$$\langle x | \hat{G}^+ = \lambda^* \langle x |. \quad (2.53)$$

ГЛАВА 3

ВЕКТОРНАЯ И ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ранее элементы линейного пространства были определены как векторы. Давайте теперь обратимся к частному случаю, имеющему большое значение для физики и прикладной математики. Это случай трехмерного пространства, где мы рассматриваем и описываем основные явления физического мира. В данном пространстве выберем три базисных вектора: это орты $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (иногда их обозначают как $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$). Для этих ортов выполняется условие взаимной ортогональности и линейной независимости. Направим вдоль выбранных векторов оси x, y, z соответственно, в результате чего образуется декартова система координат. В этой системе положение произвольной точки М можно задать посредством радиус-вектора $\mathbf{r}$, который представляет собой отрезок, который выходит из начала координат (точка пересечения осей) и заканчивается в данной точке М (рис. 1). Вектор $\mathbf{r}$ может быть записан как линейная комбинация согласно правилам линейной алгебры:

$$\mathbf{r} = (r\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (r\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 + (r\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3. \quad (3.1)$$

Скалярные произведения ортов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и радиус-вектора $\mathbf{r}$ есть не что иное, как проекции данного радиус-вектора на оси координат.

$$(r\mathbf{e}_1) \equiv x, (r\mathbf{e}_2) \equiv y, (r\mathbf{e}_3) \equiv z. \quad (3.2)$$

Числа (3.2) определяют радиус-вектор и произвольную точку, принадлежащую трехмерному пространству, в декартовой системе координат. Здесь имеется в виду радиус-вектор, определяемый условием (2.1), он может быть записан следующим образом: $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

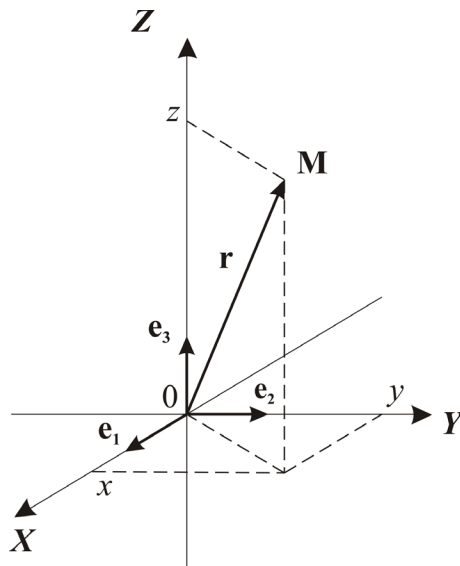


Рис. 1. Положение точки в декартовой системе координат

Векторы, посредством которых описывается линейное пространство, имеют ряд свойств, определяемых симметрией данного пространства. О симметрии можно говорить тогда, когда введено такое понятие, как *длина*, иначе – расстояние между двумя произвольными точками пространства. Длинной (расстоянием) между двумя точками называют число, которое остается постоянным при любых преобразованиях симметрии. Другими словами, длина является инвариантной величиной по отношению к преобразованиям симметрии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть две произвольные точки заданы радиус-векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, тогда расстояние между ними может быть определено вектором $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ по следующей формуле:

$$l_{12} = |\mathbf{r}_{12}| = \sqrt{\mathbf{r}_{12}^2} = \sqrt{(\mathbf{r}_{12} \mathbf{r}_{12})} . \quad (3.3)$$

В этом выражении $(\mathbf{r}_{12} \mathbf{r}_{12})$ – есть скалярное произведение радиус-векторов. В случае базиса декартовой системы координат расстояние между двумя точками определяется суммой квадратов проекций вектора $\mathbf{r}_{12}$:

$$l_{12}^2 = (\mathbf{r}_{12} \mathbf{r}_{12}) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2. \quad (3.4)$$

Совершенно ясно, что квадрат проекций радиус-вектора произвольной точки пространства представляет собой расстояние от начала координат до этой точки. В дальнейшем будем считать, что $\mathbf{r}_2 = 0$ при отсутствии каких-либо сомнений.

Теперь, когда мы определили длину (3.4), рассматриваемое нами векторное пространство становится евклидовым, для которого справедлива геометрия Евклида. Оно также часто называется метрическим пространством с метрикой (3.3), (3.4). Для евклидового метрического пространства диагональные компоненты метрического тензора g_{ik} из (2.14) равны единице, а недиагональные – нулю. Заметим, что определение длины (3.4) вытекает из эмпирических свойств пространства и может не выполняться для какого-либо другого векторного пространства. Благодаря метрике Евклида, стало возможным тождество длины и скалярного произведения векторов.

Суть евклидовой геометрии следует из условия того, что длина должна быть инвариантной по отношению к каким-либо преобразованиям симметрии, в частности, к повороту относительно начала координат. Свойство инвариантности длины заключается в том, что расстояния между двумя точками в исходном и преобразованном пространствах, определяемые отличными друг от друга векторами $\mathbf{r}_{12}$ и $\mathbf{r}'_{12}$, равны одному и тому же числу:

$$\begin{aligned} l_{12}^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \\ &= (x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2 = l'^2_{12}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Таким образом, длина в евклидовом пространстве определяется скалярным произведением, следовательно, она всегда будет инвариантной, какие бы унитарные преобразования не были произведены. Например, при изменении системы координат длина не

изменится. С точки зрения общей теории относительности такое пространство является неискривленным.

Теперь определим необходимые в дальнейшем понятия скаляра вектора и тензора в евклидовом (метрическом) пространстве.

1. Скаляром φ называют величину, которая является неизменной для всех систем координат, т. е. эта величина инвариантна по отношению к любым преобразованиям системы координат.

2. Вектором A в трехмерном пространстве является совокупность трех таких величин A_k , которые при любых преобразованиях системы координат преобразуются по тем же правилам, что и компоненты радиус-вектора:

$$A_i = U_{ik} A'_k . \quad (3.6)$$

Здесь A_i и A'_k представляют собой компоненты (или проекции) вектора A в исходной и преобразованной системах координат.

ПРИМЕР 1

Рассмотрим два действительных вектора A и B с координатами A_j и B_k :

Запишем скалярное произведение рассматриваемых данных векторов:

$$(A, B) = A_k B_k = A_k \delta_{ki} B_i = A_k U_{ki} U_{il}^+ B_l = A'_i B'_i = (A', B'). \quad (3.7)$$

А теперь составим билинейную комбинацию из компонентов этих векторов. Заметим, что данная комбинация не является скалярным произведением.

$$A_i B_k = U_{il} A'_l U_{km} B'_m = U_{il} U_{km} A'_l B'_m . \quad (3.8)$$

Полученная совокупность занумерованных величин $F_{ik} = A_j B_k$ является простейшим примером тензора. Дадим определение.

3. Тензором второго ранга F_{ik} является совокупность девяти величин, которые при преобразовании системы координат преобразуются аналогично произведению соответствующих координат двух векторов:

$$F_{ik} = U_{il} U_{km} F'_{lm} . \quad (3.9)$$

Точно так же может быть определен тензор ранга n : $F_{\underbrace{ik\dots m}_n}$.

ПРИМЕР 2

Пусть имеется радиус-вектор, проведем дифференцирование его компонент по ним же самим:

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases} \quad (3.10)$$

Не вызывает сомнения, что δ_{ik} представляет собой симметричный тензор второго ранга, т. е. $\delta_{ik} = \delta_{ki}$. δ_{ik} называют символом Кронекера. Отметим, что справедливо следующее выражение:

$$\delta_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \frac{\partial x'_i}{\partial x'_k} = \delta'_{ik} . \quad (3.11)$$

Другими словами, δ_{ik} – это абсолютно симметричный тензор второго ранга, т. е. δ_{ik} является инвариантом по отношению к каким-либо преобразованиям системы координат.

Тензорные операции

Вновь сначала необходимо ввести определения некоторых важных понятий до обсуждения собственно операций с тензорами.

Тензорные равенства. Пусть для двух тензоров одного и того же ранга можно записать следующее:

$$T_{\underbrace{ik\dots m}_s} = F_{\underbrace{ik\dots m}_s} , \quad (3.12)$$

то, согласно этому равенству, разность компонент данных тензоров будет равна нулю независимо от системы координат. Для трехмерного пространства равенство (3.11) представляет собой сокращенную запись системы из трех уравнений.

Свертыванием (сверткой) тензора называется суммирование его компонент по одной или нескольким парам индексов:

$$F_{\underbrace{ikl\dots m}_s} = T_{\underbrace{kl\dots m}_{s-2}} \quad , \quad (3.13)$$

$$F_{\underbrace{ii kl\dots m}_s} = S_{\underbrace{kl\dots m}_{s-2}} \quad . \quad (3.14)$$

Заметим, что в общем случае $T \neq S$.

Приведем важный пример:

Рассмотрим трехмерное пространство и соответствующий тензор третьего ранга e_{ikl} . Причем $e_{xyz} = 1$, а остальные, не равные нулю, элементы имеют значение ± 1 в зависимости от положения индексов i, k, l , причем имеет место равенство:

$$e_{ikl} = -e_{kil} = e_{kli} \quad . \quad (3.15)$$

Перейдем в другую систему координат и запишем преобразование компонентов тензора при этом переходе. По определению имеем:

$$e'_{prs} = \frac{\partial x'_p}{\partial x_i} \frac{\partial x'_r}{\partial x_k} \frac{\partial x'_s}{\partial x_l} \quad . \quad (3.16)$$

Проведем суммирование, учитывая чередование знаков, в результате чего получим:

$$e'_{prs} = \frac{\partial(x'_p x'_r x'_s)}{\partial(x_i x_k x_l)} = e_{ikl} \quad . \quad (3.17)$$

Обозначим в равенстве (3.17)

$$\frac{\partial(x'_p x'_r x'_s)}{\partial(x_i x_k x_l)} = J, \quad (3.18)$$

где обозначено: J – якобиан преобразования.

Принимая во внимание известные нам свойства якобиана, в случае чистых поворотов получаем:

$$e'_{prs} = e_{prs} . \quad (3.19)$$

Как видно, полностью антисимметричный тензор e_{ikl} от выбора системы координат не зависит. Таким образом он, подобно символу Кронекера δ_{ik} , инвариантен. Но в случае отражений:

$$e'_{ikl} = -e_{ikl} , \quad (3.20)$$

значит, e_{ikl} нельзя считать инвариантом в полном смысле этого слова. Его называют псевдотензором.

Пусть имеются два тензора ранга s и p : $T_{\underbrace{ik\dots l}_s}, F_{\underbrace{mn\dots r}_p}$.

Мы можем произвести следующие операции с этими тензорами:

1. Простое перемножение. В результате получается тензор ранга $s + p$:

$$T_{\underbrace{ik\dots l}_s} F_{\underbrace{mn\dots r}_p} = N_{\underbrace{ik\dots r}_{s+p}} . \quad (3.21)$$

Такое произведение называется прямым или кронекеровским.

2. Перемножение совместно со сверткой по одной паре индексов. Результат – тензор ранга $s + p - 2$:

$$T_{\underbrace{ik\dots l}_s} F_{\underbrace{in\dots r}_p} = D_{\underbrace{ik\dots r}_{s+p-2}} . \quad (3.22)$$

В случае, когда свертывание проводится по различным парам индексов, в результате получаются разные тензоры:

$$T_{\underbrace{ik\dots l}_s} F_{\underbrace{ml\dots r}_p} = Q'_{\underbrace{ik\dots r}_{s+p-2}} .$$

Свертку можно осуществлять по стольким парам индексов, сколько позволяет ранг тензора. Результатом будут тензоры ранга $s + p - 4$, $s + p - 6$ и т. д. Когда тензоры имеют один и тот же ранг, т. е. $s = p$, то в результате свертывания по всем парам индексов получается скаляр: $T_{\underbrace{ik\dots l}_s} F_{\underbrace{ik\dots l}_s} = \Phi$.

Теперь выберем пары индексов, по которым ведется суммирование, несколько по-иному, тогда получим: $T_{\underbrace{ik\dots l}_s} F_{\underbrace{ki\dots l}_s} = \varphi_1$, в общем случае $\varphi \neq \varphi_1$.

ПРИМЕРЫ

$$1. \delta_{ik}\delta_{ki}\delta_{lm}\delta_{mi} = 3.$$

$$2. e_{ikl}e_{mnp} = \det \begin{pmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} & \delta_{ip} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} & \delta_{kp} \\ \delta_{lm} & \delta_{ln} & \delta_{lp} \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Заметим, что выражение в левой части (3.21) $e_{ikl}e_{mnp} = t_{iklmnp}$ представляет собой тензор шестого ранга, который является инвариантным и антисимметричным по отношению к перестановке соседних индексов в первых двух тройках, и все элементы данного тензора равны либо 1, либо -1 . Определитель в правой части (3.21) обладает теми же свойствами, что и сам тензор. При перестановке двух соседних строк или столбцов происходит изменение знака детерминанта, а соседние индексы в первых двух тройках индексов меняются местами. Так как элементы данной матрицы являются инвариантными тензорами второго ранга, то сам детерминант есть тензор шестого ранга. После раскрытия определителя получается развернутое выражение:

$$e_{ikl}e_{mnp} = \delta_{im}\delta_{kn}\delta_{lp} - \delta_{lm}\delta_{ln}\delta_{kp} + \delta_{in}\delta_{lm}\delta_{kp} - \delta_{in}\delta_{km}\delta_{lp} + \delta_{ip}\delta_{km}\delta_{ln} - \delta_{ip}\delta_{kn}\delta_{lm}. \quad (3.24)$$

$$3. e_{ikl}e_{mnl} = \delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km}, \quad e_{ikl}e_{mln} = -\delta_{im}\delta_{kn} + \delta_{in}\delta_{km}. \quad (3.25)$$

$$4. e_{ikl}e_{mkl} = 2\delta_{im}. \quad (3.26)$$

$$5. e_{ikl}e_{ikl} = 6, \quad \text{но} \quad e_{ikl}e_{ilk} = -6. \quad (3.27)$$

Следующие свойства тензоров доказываются непосредственной проверкой. Выполнить эту проверку предлагается в качестве **самостоятельного задания**:

1. Покажите, что свертка двух тензоров второго ранга S_{ik} и A_{ik} равна нулю при условии, что один из этих тензоров, S_{ik} , является симметричным, а другой, A_{ik} , – антисимметричным: $S_{ik}A_{ik} = S_{ki}A_{ik} = -S_{ik}A_{ki} = 0$.

2. Упростите следующее выражение: $\delta_{ik}\delta_{kl}\delta_{lm}\delta_{mn}$.

3. Пусть A_{ik} – матрица третьего ранга. Докажите, что ее определитель может быть представлен в виде: $\det A_{ik} \equiv \|A\| = e_{ikl}A_iA_{2k}A_{3l}$.

4. Опираясь на результат упражнения 3, покажите, что: $e_{mnp}\|A\| = e_{ikl}A_{mi}A_{nk}A_{pl}$.

5. Докажите следующее равенство: $\|A\| = \frac{1}{6}e_{ikl}e_{mnp}A_{mi}A_{nk}A_{pl}$.

ГЛАВА 4

ИНВАРИАНТЫ

Определение: инвариантом называют какую-либо величину или функцию, значение которой не изменяется в результате проводимых преобразований. В случае геометрических объектов можно сказать, что если любому базису соответствует одно и то же значение, то в пространстве задан геометрический объект, называемый инвариантом (при изменении базиса компоненты объекта неизменны).

Примером, который уже приводился выше, может служить скаляр, который представляет собой инвариант относительно любых преобразований симметрии. В частности, скалярное произведение также является инвариантом по отношению ко всем преобразованиям. Но в то же время существуют такие геометрические объекты, которые могут быть инвариантны по отношению только к какому-то определенному преобразованию. Примером может служить смешанное произведение векторов. Оно инвариантно лишь по отношению к вращениям, а при отражении относительно плоскостей – нет. Объекты такого рода называют псевдоскалярами. В общем случае, если какой-то объект может проявлять себя как скаляр, вектор или тензор лишь по отношению к части преобразований симметрии, то его называют псевдоскаляр, псевдовектор и т. д.

Любой тензор второго ранга можно записать как сумму двух других тензоров, которые независимо друг от друга преобразуются при поворотах. Например:

$$F_{ik} = S_{ik} + A_{ik} . \quad (4.1)$$

Здесь

$$S_{ik} = S_{ki} = \frac{1}{2}(F_{ik} + F_{ki}) \quad (4.2)$$

симметричный тензор, а

$$A_{ik} = -A_{ki} = \frac{1}{2}(T_{ik} - T_{ki}) \quad (4.3)$$

антисимметричный тензор.

Определение: Тензор S_{ik} является симметричным по паре индексов, если компоненты, полученные при перестановке этих индексов, равны друг другу. Соответственно тензор A_{ik} называется антисимметричным по паре индексов, если при их перестановке полученные компоненты изменяют знак на противоположный.

Симметричный тензор S_{ik} можно привести к диагональному, необходимо лишь выбрать соответствующую систему координат. Давайте определим собственные вектора $n^{(\alpha)}$ и собственные значения $S^{(\alpha)}$ тензора второго ранга:

$$(S_{ik} - S^{(\alpha)}\delta_{ik})n_k^{(\alpha)} = 0. \quad (4.4)$$

В данном выражении $\alpha = 1, 2, 3$.

Собственные векторы матрицы, описываемые выражением (4.2), могут быть как вещественными, так и комплексными. Если умножить уравнение (4.4) на множитель $n_i^{*(\alpha)}$ и выполнить свертывание, то в результате будет получено выражение, определяющее собственные значения матрицы:

$$S^{(\alpha)} = \frac{S_{ik}n_i^{*(\alpha)}n_k^{(\alpha)}}{|n^{(\alpha)}|^2}. \quad (4.5)$$

В том случае, если сам тензор S_{ik} является действительным, то и его собственные значения также будут действительными, кроме того, они представляют собой инварианты тензора второго ранга. Тогда и собственные векторы могут быть выбраны действительными.

Заметим, что собственные векторы ортогональны. Чтобы доказать это важнейшее положение, проведем следующие операции: умножим (4.4) на отличные друг от друга собственные векторы, а затем проведем свертку.

$$S_{ik}n_k^{(\alpha)}n_i^{(\beta)} = S^{(\alpha)}\delta_{ik}n_k^{(\alpha)}n_i^{(\beta)} \equiv S^{(\alpha)}(n^{(\alpha)}n^{(\beta)}), \quad (4.6)$$

$$S_{ik}n_k^{(\beta)}n_i^{(\alpha)} = S^{(\beta)}\delta_{ik}n_k^{(\beta)}n_i^{(\alpha)} \equiv S^{(\beta)}(n^{(\alpha)}n^{(\beta)}). \quad (4.7)$$

Теперь вычтем второе уравнение из первого:

$$S_{ik}(n_k^{(\alpha)}n_i^{(\beta)} - n_k^{(\beta)}n_i^{(\alpha)}) = (S^{(\alpha)} - S^{(\beta)})(n^{(\alpha)} - n^{(\beta)}) = 0. \quad (4.8)$$

Равенство нулю получено благодаря операции свертывания симметричного тензора S_{ik} и антисимметричного тензора, который образуется посредством умножения собственных векторов в скобках друг на друга. Итак, мы доказали ортогональность собственных векторов. Эти векторы могут быть выбраны нормированными на единицу:

$$\left(\mathbf{n}^{(\alpha)} \mathbf{n}^{(\beta)} \right) = \delta_{\alpha\beta} . \quad (4.9)$$

Если есть система координат с единичными ортами $\mathbf{n}^{(\alpha)}$, то матрица симметричного тензора в этой системе будет выглядеть следующим образом:

$$S_{ik}^{(0)} = \begin{pmatrix} S^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & S^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & S^{(3)} \end{pmatrix} . \quad (4.10)$$

Три инварианта $S^{(\alpha)}$ можно заменить тремя их независимыми функциями, имеющими вид:

$$\sum_{\alpha=1}^3 S^{(\alpha)} = S_{ii}^{(0)} = S_{ii} = Tr S , \quad (4.11)$$

$$\sum_{\alpha=1}^3 S^{(\alpha)^2} = S_{ik}^{(0)} S_{ki}^{(0)} = S_{ik} S_{ki} = Tr S^2 , \quad (4.12)$$

$$\sum_{\alpha=1}^3 S^{(\alpha)^3} = S_{ik}^{(0)} S_{kl}^{(0)} S_{li}^{(0)} = S_{ik} S_{kl} S_{li} = Tr S^3 . \quad (4.13)$$

В приведенных формулах посредством Tr обозначен след матрицы – сумма всех диагональных элементов. Если след симметричного тензора равен нулю, то он называется девиатором. В механике деформируемого твердого тела инвариант (4.12) получил особое название – интенсивности, например интенсивность тензора деформаций.

Введем понятие дуального объекта для антисимметричного тензора. В случае трехмерного пространства любому антисимме-

тричному тензору второго ранга можно поставить в соответствие так называемый дуальный вектор:

$$A_i = \frac{1}{2} e_{ikl} A_{kl} . \quad (4.14)$$

Вектор же в свою очередь может быть определен лишь одним инвариантом: своей длиной или квадратом A^2 . Следовательно, и антисимметричному тензору второго ранга соответствует только один инвариант:

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{1}{4} e_{ikl} e_{imn} A_{kl} A_{mn} \equiv \frac{1}{4} e_{ikl} e_{imn} T_{kl} T_{mn} = \frac{1}{4} (\delta_{km} \delta_{ln} - \delta_{kn} \delta_{lm}) T_{kl} T_{mn} = \\ &= \frac{1}{4} (T_{kl} T_{kl} - T_{kl} T_{lk}) = \frac{1}{4} (Tr \tilde{T} T - Tr T^2) . \end{aligned} \quad (4.15)$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Покажите, что обозначенные ранее инварианты симметричного тензора второго ранга могут быть выражены посредством исходного тензора:

$$Tr S = Tr T; \quad (4.16)$$

$$Tr S^2 = \frac{1}{2} (Tr \tilde{T} T + Tr T^2); \quad (4.17)$$

$$Tr S^3 = \frac{1}{4} (Tr T^3 + 3 Tr \tilde{T} T^2) . \quad (4.18)$$

2. Докажите, что приведенные выше инварианты тензора второго ранга могут быть замещены следующими:

$$Tr T, Tr T^2, Tr \tilde{T} T, Tr[(T + 3\tilde{T})T^2] . \quad (4.19)$$

3. Покажите, что произвольный тензор второго ранга можно записать в следующем виде:

$$T_{ik} = D_{ik} + e_{ikl} A_l + P \delta_{ik} . \quad (4.20)$$

В этой формуле $D_{ik} = D_{ki}$ – это девиатор, т. е. $D_{ii} = 0$; A_l – псевдовектор, который является дуальным для антисимметричного тензора, приведенного в (4.3); $P = \text{Tr } T$ – это скаляр.

Остановимся теперь на инвариантах относительно поворота для объектов с различным рангом. В первую очередь рассмотрим вектор или тензор первого ранга. Пусть существует вектор, инвариантный относительно преобразований поворота. Тогда справедливо следующее:

$$A'_i = O_{ik} A_k = A_i, \text{ иначе говоря: } (O_{ik} - \delta_{ik}) A_k = 0. \quad (4.21)$$

Здесь O_{ik} – есть матрица поворота. Повернем данный вектор относительно оси аппликат на угол, равный π , в результате имеем:

$$A'_1 = -A_1 = A_1, A'_2 = -A_2 = A_2, A'_3 = A_3,$$

из чего можно сделать вывод, что для любого инвариантного вектора компоненты $A_1 = A_2 = 0$. Повернув вектор относительно оси ординат или абсцисс на угол π , мы также получим, что $A_3 = 0$. Итак, мы пришли к выводу, что не может существовать инвариантного вектора, не равного нулю.

Как было показано выше, тензор второго ранга можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров. Антисимметричному тензору второго ранга можно поставить в соответствие дуальный вектор, следовательно, инвариантный антисимметричный тензор равен нулю. Обратимся теперь к симметричному тензору. Выберем систему координат такую, чтобы симметричный тензор в ней был диагонален и имел вид: $S_{ik} = S^{(\alpha)} \delta_{ik}$. В случае, когда хотя бы два значения $S^{(\alpha)}$ не равны друг другу, компоненты симметричного тензора S_{ik} зависят от нумерации осей. Из этого следует, что компоненты симметричного тензора не являются инвариантными по отношению к преобразованиям поворота. Итак, для инвариантного по отношению к поворотам тензора второго ранга остается только один вариант: $S^{(1)} = S^{(2)} = S^{(3)} = \lambda$. Из всего вышеприведенного следует, что инвариантный тензор второго ранга является изотропным и пропорциональным символу Кронекера, который приобретает новый смысл δ_{ik} : абсолютный инвариантный тензор второго ранга.

$$T_{ik}^{inv} = \lambda \delta_{ik} . \quad (4.22)$$

УПРАЖНЕНИЕ 1

Рассмотрим вопрос о существовании инвариантных тензоров другим способом. Запишем условие инвариантности тензора второго ранга по отношению к поворотам:

$$T'_{ik} = O_{il} O_{km} T_{lm} = T_{ik} . \quad (4.23)$$

Проведем свертывание левой и правой частей выражения (4.23) с матрицей поворота, а затем воспользуемся соотношением ортогональности:

$$O_{kn} T_{ik} = O_{il} O_{km} \tilde{O}_{nk} T_{lm} = O_{il} \delta_{mn} T_{lm} = O_{il} T_{ln} .$$

$$\text{Или: } O_{kn} T_{ik} = O_{il} T_{ln} .$$

Приведем данное соотношение к такому виду, чтобы матрица поворота имела одинаковые индексы в обеих его частях:

$$O_{kl} \delta_{ln} T_{ik} = O_{kl} \delta_{ik} T_{ln} . \quad (4.24)$$

Так как (4.24) является тождеством, то имеет место равенство:

$$\delta_{ln} T_{ik} = \delta_{ik} T_{ln} . \quad (4.25)$$

Будем считать, что $l = n = I$, и обозначим $T_{II} = \lambda$, тогда:

$$T_{ik} = \lambda \delta_{ik} . \quad (4.26)$$

Инвариантный по отношению к преобразованиям поворотов, или изотропный, тензор третьего ранга удовлетворяет следующему уравнению:

$$T'_{ikl} = O_{im} O_{kn} O_{lp} T_{mnp} = T_{ikl} . \quad (4.26)$$

Чтобы определить изотропный тензор, используем выражение для матрицы поворота на угол π : $O_{ik}(e_i, \pi) = 2\delta_{il}\delta_{kl} - \delta_{kl}$ (доказать

в качестве упражнения). Далее докажем, что компоненты данного тензора, имеющие хотя бы два одинаковых индекса, равны нулю. Действительно, рассмотрим преобразование поворота на угол π относительно оси аппликат для компонента, например, T_{122} :

$$T'_{122} = (-\delta_{1m})(-\delta_{2n})(-\delta_{2p})T_{mnp} = -T_{122} = T_{122} = 0. \quad (4.28)$$

Для оставшихся компонентов проведем преобразование относительно той же оси, но на угол $\pi/2$, а матрицу поворота можно представить в виде $O_{ik}(e_i, \pi) = 2\delta_{il}\delta_{kl} + e_{ikl}$, по l суммирование не производится (доказать в качестве упражнения):

$$T'_{123} = e_{1m3}e_{2n3}\delta_{3p}T_{mnp} = -T_{213} = T_{123}. \quad (4.29)$$

Осуществляя повороты на тот же угол относительно других осей, имеем:

$$T_{123} = -T_{321} = -T_{132} = T_{231} = T_{312} = -T_{213} = \mu. \quad (4.30)$$

В итоге можно сказать, что приведенный выше инвариантный тензор третьего ранга пропорционален тензору e_{ikl} . Тензор e_{ikl} называют абсолютным антисимметричным псевдотензором.

$$T_{ikl} = \mu e_{ikl}. \quad (4.31)$$

УПРАЖНЕНИЕ 2

Определим инвариантный тензор четвертого ранга следующим образом:

$$T'_{iklm} = O_{ip}O_{kq}O_{lr}O_{ms}T_{pqrs} = T_{iklm}. \quad (4.32)$$

Представим инвариантный тензор (4.32) четвертого ранга как линейную комбинацию инвариантных тензоров, имеющих более низкий ранг. Как было показано выше, не существует инвариантного тензора, который был бы отличен от нуля, значит, мы можем записать следующую линейную комбинацию:

$$T_{iklm} = t_{ik}^{(1)}\delta_{lm} + t_{il}^{(2)}\delta_{km} + t_{im}^{(3)}\delta_{kl}. \quad (4.33)$$

Запишем условие инвариантности трех указанных тензоров второго ранга (4.22) и подставим его в разложение (4.33):

$$T_{iklm} = \lambda_1\delta_{ik}\delta_{lm} + \lambda_2\delta_{il}\delta_{km} + \lambda_3\delta_{im}\delta_{kl}. \quad (4.34)$$

Полученное выражение представляет собой общую форму инвариантного тензора четвертого ранга.

Задания для самопроверки

Покажите, что из полярных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и аксиального вектора $\mathbf{c}$ можно составить:

а) возможные независимые скаляры:

$$a^2, b^2, (c)^2, (ab), (ac)^2, (bc)^2, (ac)(bc), ([\mathbf{a} \times \mathbf{b}]\mathbf{c});$$

б) возможные независимые псевдоскаляры, например (ac) , (bc) .

В завершение темы и раздела дадим вывод основных формул сферической тригонометрии. Для этого проведем три вектора $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$; эти векторы неколлинеарны и имеют начало в центре сферы, имеющей единичный радиус (рис. 2). На поверхности этой сферы обозначим длины дуг: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Углы при вершинах треугольника $\triangle ABC$, образованные касательными к указанным дугам, обозначим как $A \sim \alpha$, $B \sim \beta$, $C \sim \gamma$. Касательные AB , BC , AC могут быть определены векторными произведениями векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Учитывая все изложенное, имеем:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{([\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2][\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3])}{|[\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2][\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3]|} = \frac{(\mathbf{e}_1[\mathbf{e}_2 \times [\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3]])}{\sin b \sin c} = \\ &= \frac{(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) - (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3)}{\sin b \sin c} = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Отсюда следует:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha. \quad (4.36)$$

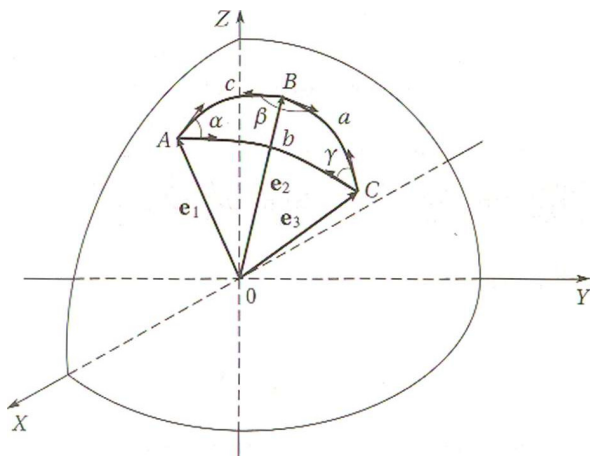


Рис. 2. Сферическая тригонометрия

После циклической перестановки имеем аналогичные соотношения:

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta, \quad (4.37)$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma. \quad (4.38)$$

Теперь необходимо вычислить модуль двойного векторного произведения единичных векторов:

$$|[[e_1 \times e_2] \times [e_1 \times e_2]]| = \sin b \sin c \sin \alpha = |([e_1 \times e_2]e_3)|. \quad (4.39)$$

После операции циклической перестановки получаются выражения:

$$\sin c \sin a \sin \beta = |([e_2 \times e_3]e_1)| = |([e_1 \times e_2]e_3)|; \quad (4.40)$$

$$\sin a \sin b \sin \gamma = |([e_3 \times e_1]e_2)| = |([e_1 \times e_2]e_3)|; \quad (4.41)$$

Объединив полученные соотношения, получим равенство:

$$\sin b \sin c \sin \alpha = \sin c \sin a \sin \beta = \sin a \sin b \sin \gamma. \quad (4.42)$$

Разделив данное выражение на произведение синусов $\sin a \sin b \sin c$, получим соотношения:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c} . \quad (4.41)$$

ГЛАВА 5

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА В ЕВКЛИДОВОМ ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Многие физические величины носят характер тензора. В основном эти величины являются функциями координат и времени. В этом случае можно говорить о *тензорных полях*, представленных этими величинами. Рассмотрим тензорные поля в трехмерном пространстве Евклида. Самое простейшее тензорное поле является скалярным, его можно описать посредством скалярной функции многих переменных.

Заметим, что в физике каждая функция многих переменных представляет собой функцию вектора:

$$f(x, y, z) \equiv f(\mathbf{r}).$$

Что есть тензорное поле? Обратимся к определению тензора, согласно которому тензор определяется законами преобразования его компонентов, когда осуществляются преобразования системы координат. Даже значение нуля зависит от расположения точки в пространстве. Принимая все это во внимание, при рассмотрении тензорного поля мы будем подразумевать многокомпонентную функцию, компоненты которой в любой точке пространства будут преобразовываться по закону преобразования тензора соответствующего ранга. Таким образом, скалярное поле есть не что иное, как функция координат пространства. Во многих случаях поля обладают свойством дополнительной симметрии относительно преобразования симметрии. К примеру, поле может зависеть лишь от одной или двух переменных, а не от всех трех, свойственных трехмерному пространству.

ПРИМЕРЫ

1. Скалярное поле может быть

а) *плоским*: $f(\mathbf{r}) = f(x, y)$;

б) *цилиндрическим*: $f(\mathbf{r}) = f(p)$, $p = \sqrt{x^2 + y^2}$;

в) *центрально-симметричным*: $f(x) = f(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2. В декартовых координатах *векторное поле* обычно задается функцией трех компонент:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_i(\mathbf{r})\mathbf{e}_i.$$

Здесь $\mathbf{e}_i$ – набор единичных базисных векторов (ортов) системы координат. Рассмотрим следующие случаи:

а) плоское векторное поле: $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_x(x, y)\mathbf{e}_x + v_y(x, y)\mathbf{e}_y$;

б) цилиндрическое векторное поле: $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v(p)\mathbf{n}_p$, $\mathbf{n}_p = \frac{\mathbf{p}}{p}$;

в) сферическое векторное поле: $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v(r)\mathbf{n}_r$, $\mathbf{n}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}$.

Одной из характеристик скалярного поля являются поверхности уровня. Точки, в которых скаляр принимает определенные значения, образуют упомянутую поверхность.

$$f(\mathbf{r}) = \text{const}.$$

Для более подробного изучения векторных полей введем так называемые линии тока, или силовые линии. Они представляют собой кривые, для которых в любой точке рассматриваемого пространства с радиус-вектором $\mathbf{r}$ заданное поле $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ является касательным вектором.

Обозначим приращение радиус-вектора по линии тока как $d\mathbf{r}$, очевидно, что это приращение параллельно вектору $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ в указанной точке r . Уравнение, определяющее линии тока, записывается в форме:

$$[d\mathbf{r} \times \mathbf{v}(\mathbf{r})] = 0. \quad (5.1)$$

Или в другом виде:

$$|d\mathbf{r}| = |\mathbf{v}(\mathbf{r})| ds = v(\mathbf{r}) ds. \quad (5.2)$$

В (5.2) посредством ds обозначен элемент длины линии тока. Представленное уравнение можно сопоставить со следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{v_x(\mathbf{r})} = \frac{dy}{v_y(\mathbf{r})} = \frac{dz}{v_z(\mathbf{r})} = \frac{ds}{v(\mathbf{r})} . \quad (5.3)$$

ПРИМЕРЫ

1. В случае плоского векторного поля представленная система уравнений имеет вид:

$$\frac{dx}{v_x(x, y)} = \frac{dy}{v_y(x, y)} . \quad (5.4)$$

Это уравнение допускает решение в квадратурах для всех однозначных и кусочно непрерывных векторных полей $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Решение имеет вид: $y = f(x, x_0, y_0)$, т. е. представляет собой плоскую кривую, которая проходит через точки (x_0, y_0) .

2. Для цилиндрической симметрии линии тока определяются согласно условиям: $\varphi = const, z = const$. В случае сферически симметричного поля уравнения для линий тока будут следующими: $\theta = const, \varphi = const$.

Задание для самопроверки

Найти уравнение поверхности уровня для скалярного потенциала:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r} .$$

Тензорное поле получается при дифференцировании векторного поля по компонентам радиус-вектора $\mathbf{r}$:

$$T_{ik}(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial x_i} v_k(\mathbf{r}) . \quad (5.5)$$

Для доказательства (5.5) достаточно показать, что преобразование производных аналогично преобразованию компонентов радиус-вектора:

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} = O_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} . \quad (5.6)$$

Фактически при этом преобразовании повторяются стандартные действия при замене переменных в уравнениях с частными производными. Запись промежуточных выкладок этого доказательства предлагается читателям в качестве упражнения.

В завершение раздела и всего методического руководства остановимся на действиях с оператором векторного дифференцирования, который обозначают специальным символом «набла»:

$$\vec{\nabla} = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} . \quad (5.7)$$

При решении практически всех задач теоретической физики, при разработке моделей (систем уравнений) для компьютерных экспериментов дифференциальные операции осуществляют либо посредством оператора «набла» ∇ , либо с помощью тензорных обозначений. Работа непосредственно с функциями многих переменных по правилам математического анализа хотя и допустима в принципе, но малоэффективна из-за громоздкости выражений.

Правила действий с оператором «набла»

Оператор «набла» ∇ – это векторный оператор дифференцирования. Для декартовой системы координат оператор может быть записан в следующем виде:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i} .$$

При работе с оператором «набла» требуется выполнять следующие обязательные правила:

1. Оператор ∇ действует лишь на те функции, которые стоят справа от него, а на функцию слева его действие не распространяется.
2. Оператор ∇ выполняет все операции дифференцирования и, следовательно, дифференцирует все, что стоит справа.

3. Так как оператор ∇ является вектором, то в случае перестановок он подчиняется лишь правилам векторной алгебры.

Рассмотрим примеры.

1. $\nabla\phi$ – есть функция, однако выражение $\phi\nabla$ есть оператор.

2. $\nabla(ab) \neq a(\nabla b) + b(\nabla a)$.

Рассмотрим более подробно второе и третье правила.

Основное свойство дифференцирования в случае дифференцирования произведения функций:

$$\frac{d}{dx}(fg) = \frac{d}{dx}(fg_c) + \frac{d}{dx}(f_c g) = g \frac{d}{dx} f + f \frac{d}{dx} g . \quad (5.8)$$

Индекс «с» означает, что функция принимается константой.

Под *основными правилами векторной алгебры* понимаются следующие:

Если есть два вектора a и b , то на их основе можно составить:

1. Скаляр ϕ посредством скалярного произведения:

$$\phi = (ab) = (ba) . \quad (5.9)$$

2. Вектор c посредством векторного произведения:

$$c = [a, b] = -[b, a] . \quad (5.10)$$

Имея три вектора a, b, c , можно получить:

1. Скаляр ϕ , составив смешанное произведение:

$$\phi = (a | b, c |) = (b | c, a |) = (c | a, b |) . \quad (5.11)$$

2. Вектор g , воспользовавшись двойным векторным произведением:

$$d = [a, [b, c]] = b(a, c) - (a, b)c \equiv (a, c)b - c(a, b) . \quad (5.12)$$

Напомним и другие важные правила, такие как умножение векторных выражений на скаляр:

$$\lambda[a, b] = [\lambda a, b] = [a, \lambda b] , \quad (5.13)$$

$$\lambda(a, b) = (\lambda a, b) = (a, \lambda b) . \quad (5.14)$$

Пользуясь оператором «набла», необходимо приводить выражение к такому виду, чтобы в него входили основные инвариантные функции:

$$\nabla \varphi = \text{grad} \varphi , \quad (5.15)$$

$$(\nabla, \mathbf{a}) = \text{div} \mathbf{a} , \quad (5.16)$$

$$[\nabla, \mathbf{a}] = \text{rota} , \quad (5.17)$$

либо к основным операторам, также обладающим инвариантным смыслом:

$$(\mathbf{a}, \nabla) = \nabla_{\mathbf{a}} - \text{есть оператор дифференцирования} \quad (5.18)$$

вдоль направления $\mathbf{a}$,

$$(\nabla, \nabla) = \text{div grad} = \Delta - \text{лапласиан}. \quad (5.19)$$

Примеры применения правил работы с оператором «набла»:

Во многих приложениях используются формулы для вычисления градиента и ротора функции, которая зависит лишь от одного аргумента – модуля радиус-вектора (центральное поле). Для получения этих формул применим правила дифференцирования сложной функции:

$$\text{grad} f(r) = \frac{df(r)}{dr} \text{grad} r = \mathbf{n} f'(r) . \quad (5.20)$$

Покомпонентное дифференцирование даст нам следующее:

$$(\mathbf{a} \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{a} . \quad (5.21)$$

В данном примере, как и во всех других, будем вектор $\boldsymbol{\mu}$ считать постоянным, иначе говоря, вектор $\boldsymbol{\mu}$ от координат не зависит.

Рассмотрим еще несколько примеров:

$$\text{div} (\boldsymbol{\mu} \mathbf{r}) = (\boldsymbol{\mu} \nabla) \mathbf{r} = (\boldsymbol{\mu} \nabla r) = (\boldsymbol{\mu} \text{grad} r) = (\boldsymbol{\mu} \mathbf{n}), \quad (5.22)$$

$$\text{grad} (\boldsymbol{\mu} r) = \boldsymbol{\mu} . \quad (5.23)$$

Здесь использованы формула для градиента скалярного произведения и формулы действия оператора «набла» ∇ на рассматриваемый радиус-вектор:

$$\text{rot}[\mathbf{r}] = 2 \quad ; \quad (5.24)$$

$$\text{div}(\mathbf{f}(r)) \equiv (\nabla, \mathbf{f}(r)) = (\mathbf{e}_i, \text{grad } f(r)) = f'(\mathbf{e}_i, \mathbf{n}) ; \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{f}(r)) &\equiv [\nabla, \mathbf{f}(r)] = -[\mathbf{e}_i, \nabla f(r)] = -f'[\mathbf{e}_i, \mathbf{n}] = f''[\mathbf{n}, \mathbf{e}_i] \\ &= -\mathbf{f}'(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{n}) . \end{aligned} \quad (5.26)$$

Заметим, что в примерах (5.25) и (5.26) использованы все основные правила и законы.

Поскольку экспонента постоянно используется в теоретической физике (случай плоской волны), проведем дифференцирование экспоненциальной функции:

$$\text{grad } e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \equiv \nabla e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} (\nabla(i\mathbf{k}\mathbf{r})) = i\mathbf{k}e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} . \quad (5.27)$$

Здесь были применены правила дифференцирования сложной функции и формула градиента скалярного произведения.

Введем вектор $\mathbf{A}$, который будем считать постоянным, и рассмотрим операции с вектором «набла»:

$$\text{div } \mathbf{A}e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \equiv (\nabla, \mathbf{A}e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}) = (\mathbf{A}, \nabla e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}) = i(\mathbf{A}, \mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} , \quad (5.28)$$

$$\text{rot } \mathbf{A}e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \equiv [\nabla, \mathbf{A}e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}] = [\nabla e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \mathbf{A}] = i[\mathbf{k}, \mathbf{A}]e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} . \quad (5.29)$$

Приведенные выше выкладки могут быть значительно упрощены при использовании техники тензорных обозначений. Однако в этом случае было бы более сложно выделять инвариантные функции. Поэтому необходимо уметь применять оба метода.

Операции векторной алгебры в тензорных обозначениях

Применим теперь тензорные обозначения для записи вышеприведенных основных определений и свойств.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_i b_i , \quad (5.30)$$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_i = e_{ikl} a_k b_l = e_{ilk} a_l b_k = -e_{ikl} b_k a_l = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]_i . \quad (5.31)$$

В данном примере были переобозначены немые индексы, по которым проводится суммирование.

$$(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = e_{ikl} a_i b_k c_l . \quad (5.32)$$

Отметим, что симметрия смешанного произведения векторов относительно циклической перестановки определяется свойствами тензора e_{ikl} .

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]]_i &= e_{ikl} a_k e_{lmn} b_m c_n = e_{ikl} e_{mnl} a_k b_m c_n = (\delta_{im} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{km}) \times \\ &\times a_k b_m c_n = a_k b_i c_k - a_k b_k c_i = a_k b_i c_k - (\mathbf{a}, \mathbf{b}) c_i . \end{aligned} \quad (5.33)$$

В случае, когда векторы перестановочны, мы получим формулу (5.12) для двойного векторного произведения.

Вектор «набла» в тензорных обозначениях записывается как $\nabla_i = \partial/\partial x_i$, а результат воздействия этого оператора на скалярную функцию φ и векторную функцию $\mathbf{a}$ простыми выражениями:

$$\text{grad } \varphi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} , \quad (5.34)$$

$$\text{div } \mathbf{a} \equiv \frac{\partial a_i}{\partial x_i} , \quad (5.35)$$

$$\text{rot } \mathbf{a} \equiv e_{ikl} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} . \quad (5.36)$$

Теперь можно рассмотреть примеры, как в технике тензорных обозначений решаются вышерассмотренные примеры с радиус-вектором $\mathbf{r}$:

1. $\text{div } \mathbf{r} = \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = \delta_{ii} = 3 .$
2. $\text{rot } \mathbf{r} \equiv e_{ikl} \frac{\partial x_i}{\partial x_k} = e_{ikl} \delta_{kl} = e_{ill} = 0 .$
3. $(\mathbf{a}, \nabla) \mathbf{r} \equiv a_k \frac{\partial x_i}{\partial x_k} = a_k \delta_{ik} = a_i \equiv \mathbf{a} .$

$$4. \text{ grad } (\boldsymbol{\mu}, \mathbf{r}) \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \mu_k x_k = \mu_k \delta_{ik} = \mu_i \equiv \boldsymbol{\mu} , \text{ сравните с (5.23).}$$

$$5. \text{ rot}[\boldsymbol{\mu}, \mathbf{r}] \equiv e_{ikl} e_{lmn} \frac{\partial}{\partial x_k} \mu_m x_n = e_{ikl} e_{mnl} \delta_{kn} = e_{ikl} e_{mkl} \mu_m = 2\delta_{im} \mu_m = \\ = 2\mu_i \equiv 2\boldsymbol{\mu} , \text{ см. (5.24).}$$

$$6. \text{ grad } \mathbf{r}^2 \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} x_k x_k = 2x_k \frac{\partial x_k}{\partial x_i} = 2x_k \delta_{ik} = 2x_i \equiv 2\mathbf{r} .$$

$$7. \text{ grad } r \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{r^2} = \frac{1}{2\sqrt{r^2}} \frac{\partial}{\partial x_i} r^2 = \frac{x_i}{r} \equiv \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{n} .$$

Для иллюстрации эффективности аппарата тензорных обозначений вычислим электрическое поле диполя с вектором дипольного момента $\mathbf{d}$. Известно, что скалярный потенциал, описывающий статическое поле электрического диполя, описывается формулой:

$$\varphi = \frac{(\mathbf{dr})}{r^3} \equiv \frac{d_i x_i}{r^3} . \quad (5.37)$$

Поскольку вектор электрического поля выражается через градиент потенциала [6], после преобразований получим для него следующее выражение:

$$E_i = -\frac{\partial}{\partial x_i} \varphi = -\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{d_k x_k}{r^3} = -\frac{d_k}{r^3} \frac{\partial x_k}{\partial x_i} - d_k x_k \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r^3} = -\frac{d_k}{r^3} \delta_{ik} + d_k x_k \frac{3}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x_i} = \\ = -\frac{d_i}{r^3} + \frac{3d_k x_k x_i}{r^5} \delta_{ik} \equiv \frac{3(\mathbf{dn})\mathbf{n} - \mathbf{d}}{r^3} . \quad (5.38)$$

Читатель может сопоставить выкладки в (5.38) с известным по курсу общей физики громоздким выводом формулы для электрического поля диполя в координатном представлении (в частных случаях).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенный материал не может заменить учебник или задачник, но это и не «большая шпаргалка». Данное справочно-методическое пособие по своему «жанру» относится к пропедевтическому курсу по выбранным разделам высшей математики. Актуальность такого пособия определяется расширением круга задач, решаемых специалистами по прикладной математике, в условиях снижения уровня образования вообще (увы, это мировая проблема) и физико-математического образования в российских регионах в частности. Имеются проявления того, что специальность выпускников университетов «прикладная математика» становится чем-то вроде инженеров XXI века. Заинтересованные читатели смогут найти дальнейшую информацию в компактных изданиях [7, 8], а также в интернете [9]. Для оптимистического послесловия остается добавить, что, несмотря на упомянутые проблемы, наука и техника остаются «открытыми» областями (подобно спорту). Каждый специалист с базовым образованием, если приложит достаточно усилий, может добиться значимого результата. По сути, это перефразирование знаменитого афоризма М. В. Ломоносова: «Науки юношей питают» (и не только юношей).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зельдович, Я. Б. Элементы математической физики / Я. Б. Зельдович, А. Д. Мышкис. – М. : Наука, 1973.
2. Начала Евклида : в 3 т. / Перевод с греч. и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского. – М-Л. : ГТТИ, 1948–1950.
3. Гильберт, Д. Основания геометрии / Д. Гильберт. – М-Л. : Гостехиздат, 1948.
4. Вейль, Г. Симметрия / Г. Вейль. – М. : Наука, 1968.
5. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – М. : Наука, 1975.
6. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц. – Т. 2 : Теория поля. – 7-е изд. – М. : Наука, 1988.
7. Белоусов, Ю. М. Практическая математика, руководство для начинающих изучать теоретическую физику / Ю. М. Белоусов, В. П. Кузнецов, В. П. Смилга. – Долгопрудный : Изд. дом Интеллект, 2009.
8. Храмушин, В. Н. Трехмерная тензорная математика вычислительных экспериментов в гидромеханике / В. Н. Храмушин. – Владивосток : ДВО РАН, 2005.
9. Интернет-сайт «Мир математических уравнений» / ред. А. Д. Полянин, 2004, <http://eqworld.ipmnet.ru>

[illegible]

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Учебное издание

БОГОМОЛОВ Леонид Михайлович
КАЧЕСОВА Галина Сергеевна

ВВЕДЕНИЕ В ВЕКТОРНЫЙ И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

ЧАСТЬ 1

Учебное пособие

*Корректор М. Ф. Шатохина
Верстка Е. Ю. Иосько*



Подписано в печать 23.10.2012. Бумага «Inasoria».
Гарнитура «Times New Roman». Формат 60х84^{1/16}.
Тираж 500 экз. (1-й завод 1–65 экз.). Объем 3,5 усл. п. л.
Заказ № 769-12.

Издательство Сахалинского государственного университета.
693008, Южно-Сахалинск, ул. Ленина, 290, каб. 32.
Тел. (4242) 45-23-16, тел./факс (4242) 45-23-17.
E-mail: izdatelstvo@sakhgu.ru, polygraph@sakhgu.sakhalin.ru