Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Сахалинский государственный университет»

Е. М. Аксененко, Г. М. Чуванова

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Практикум

Южно-Сахалинск
Издательство СахГУ
2013

УДК 517(076)
ББК 22.161я7-5
А42

Печатается по решению учебно-методического совета Сахалинского государственного университета, 2012.

Рецензенты:
***Варламова Т. П.**, кандидат педагогических наук;*
***Никитина А. Б.**, кандидат педагогических наук, зав. кафедрой математических и естественнонаучных знаний Южно-Сахалинского института (филиала) РГТЭУ.*

Авторы:
***Аксененко Е. М.**, доцент кафедры математики ФМФиИ СахГУ,*
***Чуванова Г. М.**, доцент кафедры математики ФМФиИ СахГУ.*

А42 **Аксененко, Е. М. Применение дифференциальных уравнений к решению задач** : практикум / Е. М. Аксененко, Г. М. Чуванова. – Южно-Сахалинск, изд-во СахГУ, 2013. – 52 с.
ISBN 978-5-88811-434-6

Практикум написан в соответствии с действующей программой курса дифференциальных уравнений. В нем должное внимание уделено изложению методов решения и исследования физических и геометрических задач, подбору задач для самостоятельного решения. На основе этих задач созданы варианты индивидуальных заданий для студентов.

Практикум предназначается для использования в процессе обучения студентов математических специальностей как очной, так и заочной форм обучения и окажет им помощь в изучении данного раздела математики.

УДК 517(076)
ББК 22.161я7-5

9 785888 114346

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время складываются основы новой методологии научных исследований – математического моделирования и вычислительного эксперимента.

Сущность этой методологии состоит в замене исходного объекта исследования его математической моделью и исследовании современными вычислительными средствами.

Моделирование – это метод исследования каких-либо явлений, процессов или систем объектов, который предполагает создание искусственных или естественных систем (моделей), имитирующих существенные свойства оригинала; использование моделей для определения или уточнения характеристик и рационализации способов построения вновь конструируемых объектов.

Математическое моделирование является в настоящий момент одной из важнейших составляющих научно-технического прогресса. Без применения этой методологии в развитых странах не реализуется ни один крупномасштабный технологический, экологический или экономический проект.

В частности, в качестве математических моделей реальных процессов могут быть использованы дифференциальные уравнения. Ведь часто при изучении многих процессов, протекающих в природе, бывает довольно сложно установить зависимость между функциями, характеризующими те или иные величины. Но зато в некоторых случаях возможно установить связь между теми же функциями и их производными. Это приводит к уравнениям, содержащим неизвестные функции под знаком производной, т. е. к дифференциальным уравнениям (с их помощью процесс может быть описан проще и полнее). В таком случае расчет параметров течения изучаемого процесса сводится к решению этих уравнений. Отрасль математического анализа, изучающая дифференциальные уравнения, является одной из самых важных по своим приложениям.

Эффективность использования дифференциальных уравнений в качестве математических моделей обеспечивается историческими истоками самих дифференциальных уравнений и современными взглядами на многие законы природы с позиции дифференциальных уравнений, приложениями дифференциальных уравнений в современной науке и технике, развитием методов интегрирования и общей теории дифференциальных уравнений, высоким уровнем вычислительной математики и техники.

Цель данного практикума – оказание помощи студентам в освоении методов решения физических и геометрических задач с помощью дифференциальных уравнений. Это будет способствовать формированию у студентов математического мышления, выработке практических навыков исследования и решения задач, описывающих реальные процессы в различных областях естествознания.

В работе над практикумом принимали участие доцент кафедры математики Е. М. Аксененко, доцент кафедры математики Г. М. Чуванова. Доцентом Е. М. Аксененко написан § 1 и составлено приложение 1. Доцентом Г. М. Чувановой – § 2 и приложения 2 и 3. Приложения содержат задачи как взятые из сборников по математическому анализу и дифференциальным уравнениям из списка литературы, так и составленные специально для данного практикума.

§ 1. ФИЗИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

1.1. Схема решения физических задач

Решение физических задач на составление дифференциальных уравнений распадается на три этапа:

1. Составление уравнения.
2. Решение уравнения.
3. Нахождение ответа на поставленные вопросы (исследование решения).

Рекомендуется следующая последовательность решения:

1. Установить величины, изменяющиеся в данном явлении.
2. Выбрать независимую переменную и функцию этой переменной, которую мы хотим найти.
3. Установить законы, связывающие эти переменные.
4. Исходя из условий задачи, определить начальные условия и выделить дополнительные данные.
5. Выразить все фигурирующие в задаче величины через независимую переменную, функцию этой переменной и ее производную.
6. Исходя из условия задачи и физического закона, составить уравнение.
7. Найти общее решение уравнения.
8. Исходя из условий задачи, найти частное решение и ответы на поставленные вопросы.

1.2. Задачи на теплообмен

Задача 1. За какое время тело, нагретое до 100 градусов, в комнате с температурой 20 градусов охладится до 25 градусов, если до 60 градусов оно охладилось за 20 мин? [1]

В условии задачи переменными являются время и температура тела.

При этом время t – независимая переменная (в часах), а температура $T(t)$ °С – функция (в градусах Цельсия).

Используем физический закон: скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и среды.

Выделим начальные условия: при $t_0 = 0$ мин температура тела T_0 = 100 °С . Для нахождения коэффициента пропорциональности даны дополнительные условия: $t_1 = 20$ мин, $T_1 = 60$ °С. Вопрос задачи: найти время t_2, если $T_2 = 25$ °С.

Исходя из физического смысла производной, скорость изменения температуры есть производная от температуры тела по времени – $\frac{dT}{dt}$.

По физическому закону запишем уравнение:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 20).$$

Найдем общее решение:

$$\int \frac{dT}{T - 20} = \int k dt \ ,$$

$$ln\,(T - 20) = kt + C,$$

$$T - 20 = Ce^{kt} \text{ – общее решение.}$$

$$T = 20 + Ce^{kt}.$$

Подставим начальные условия:

$$100 = 20 + Ce^{k \cdot 0},$$

откуда

$$C = 80.$$

Запишем частное решение: $T = 20 + Ce^{kt}$.

Для нахождения коэффициента k подставим дополнительные данные:

$$60 = 20 + 80e^{20k},\ e^{20k} = \frac{1}{2},\ 20k = -\ln 2,\ k = -\frac{\ln 2}{20}\ .$$

Тогда решение уравнения запишется в виде:

$$T = 20 + 80e^{-\frac{t\ln 2}{20}}.$$

Найдем t при условии $T = 25$.

$$25 = 20 + 80e^{-\frac{t\ln 2}{20}}, \quad e^{-\frac{t\ln 2}{20}} = \frac{1}{16},$$

$$-\frac{t\ln 2}{20} = -4\ln 2, \text{ t = 80 мин.}$$

Задача 2. Кусок металла (сталь) с температурой a градусов помещен в печь, температура которой равномерно повышается в течение часа от a до b градусов. Найти температуру тела через час. [2]

Пусть t – время, независимая переменная, $T(t)$ – температура тела в момент времени t, $\theta(t)$ – температура печи в момент времени t.

Начальные условия	Дополнительные условия	Вопрос задачи
$t = 0$	$\theta(t) = a + \lambda t$,	$t_1 = 60$ мин
$T_0 = a$	где $\lambda = \frac{b-a}{60}$ – коэффициент пропорциональности	$T_1 = ?$
$\theta_0 = a$		

Закон: скорость нагревания тела пропорциональна разности температур среды и тела, т. е. $\frac{dT}{dt} = k(\theta - T)$.

При заданных условиях уравнение выглядит так:

$$\frac{dT}{dt} = k(a + \lambda t - T),$$

$T' = ka + \lambda kt - kT,\ T' + kT = ka + \lambda kt$ – линейное уравнение,

$$T = uv,\ T' = u'v + uv',$$

$$u'v + uv' + kuv = ka + \lambda kt,$$

$$u'v + u(v' + kv) = ka + \lambda kt,$$

$$v' + kv = 0,\ \frac{dv}{v} = -kt,\ ln\,|v| = -kt,\ v = e^{-kt},$$

$$u'e^{-kt} = ka + \lambda kt,$$

$$du = (ka + \lambda kt)\, e^{kt} dt,$$

$$u = \int (ka + \lambda kt)\, e^{kt} dt,$$

$$\int (ka + \lambda kt) e^{kt} dt = \left| \begin{matrix} u = ka + \lambda kt & du = \lambda k dt \\ dv = e^{kt} dt & v = \frac{1}{k} e^{kt} \end{matrix} \right| =$$

$$= (ka + \lambda kt) \cdot \frac{1}{k} e^{kt} - \frac{\lambda}{k} k \int e^{kt} dt = (a + \lambda t) e^{kt} - \frac{\lambda}{k} e^{kt} + C.$$

$T = (a + \lambda t) - \frac{\lambda}{k} + Ce^{-kt}$ – общее решение.

При $t_0 = 0$, $T_0 = a$: $a = a - \frac{\lambda}{\kappa} + C$, $C = \frac{\lambda}{\kappa}$.

$$T = (a + \lambda t) - \frac{\lambda}{k} + \frac{\lambda}{\kappa} e^{-kt}$$ – частное решение.

$$T = a + \frac{b-a}{60} \cdot 60 - \frac{b-a}{60k} \cdot \left(1 - e^{-60k}\right),$$

$$T = b - \frac{b-a}{60k}\left(1 - e^{-60k}\right).$$

Для стали $k = 0{,}46$.

1.3. Задачи на смеси

Задача 1. Сосуд объемом 30 л наполнен воздухом (80 % азота, 20 % кислорода). В сосуд втекает 0,2 л азота в секунду, который непрерывно перемешивается с находящимся в сосуде воздухом. Из сосуда вытекает такое же количество смеси. Через какое время в сосуде будет 90 % азота? [5]

Пусть t – время (в секундах), независимая переменная,
$x(t)$ – количество азота в сосуде в момент времени t.

Закон: изменение количества азота за некоторое время равно разности втекающего и вытекающего азота за это время.

Начальные условия	Дополнительные условия	Вопрос задачи
$t = 0$ $x_0 = 0{,}8 \cdot 30 =$ 24 л	скорость втекания азота и вытекания смеси 0,2 л/с	t_1 – ? $x_1 = 0{,}9 \cdot 30 =$ 27 л

За время dt втекло 0,2 dt л азота, а вытекло такое же количество смеси, но азота в этой смеси $\frac{x}{30} \cdot 0{,}2\, dt$, т. к. $\frac{x}{30}$ – количество азота в одном литре в момент времени t.

Тогда уравнение запишется так:

$$dx = 0{,}2dt - \frac{x}{30} \cdot 0{,}2dt.$$

$$dx = \frac{0,2}{30}(30 - x)\,dt\,,$$

$$\int \frac{dx}{30 - x} = \frac{0,2}{30}\int dt\,,$$

$$-\ln|30 - x| = \frac{1}{150}t + \ln C\,,$$

$$\ln|30 - x| = \ln e^{\frac{-t}{150}} + \ln C\,,$$

$$30 - x = Ce^{-\frac{t}{150}}$$ – общее решение.

При $t = 0$, $x = 24$, $6 = C$, следовательно, $30 - x = 6\,e^{-\frac{t}{150}}$ – частное решение.

Найдем ответ на вопрос задачи: при $x = 27$:

$$3 = 6\,e^{-\frac{t}{150}}, \qquad -\ln 2 = -\frac{1}{150}t\,.$$

$$t = 150\,\ln 2 \approx 150 \cdot 0,69 \approx 103,5\,(\text{c}) \approx 1,7\,(\text{мин}).$$

Задача 2. В баке содержится 100 л раствора, содержащего 20 кг соли. Вода вливается со скоростью 3 л/мин, а смесь выливается со скоростью 2 л/мин. Сколько соли останется в баке через час? [2]

Пусть t – время (в мин), независимая переменная.
$x(t)$ – количество соли баке в момент времени t.

Начальные условия	Дополнительные условия	Вопрос задачи
$\nu_0 = 100$ л $t_0 = 0$ $x_0 = 20$ кг	Вода вливается со скоростью 3 л/мин, а смесь выливается со скоростью 2 л/мин.	$t = 60$ мин x – ?

Изменение количества соли происходит за счет вытекающей смеси, в 1 л которой содержится $\frac{x}{100 + t}$, т. к. объем смеси в сосуде увеличивается на 1 л/мин.

Составим уравнение: $dx = -\frac{2xdt}{100+t}$, т. к. выливается 2 л смеси. Решим получившееся уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2dt}{100+t},$$

$$\int \frac{dx}{x} = -2\int \frac{dt}{t+100},$$

$$\ln|x| = -2\ln|100+t| + \ln C,$$

$$x = \frac{C}{(100+t)^2}.$$

$t_0 = 0,\ x_0 = 20.$

$20 = \frac{C}{100^2}, \qquad C = 2\cdot 10^5,$

$x = \frac{2\cdot 10^5}{(100+t)^2} = 2\frac{10^5}{16\cdot 16} = \frac{500}{64} \approx 7{,}8$ (кг).

Задача 3. В баке содержится *v* л раствора, содержащего *m* кг соли. Вода вливается со скоростью *a* л/мин, а смесь выливается со скоростью *b* л/мин. Сколько соли останется в баке через час? [6]

Пусть *t* – время (в мин), независимая переменная.
x(*t*) – количество соли в баке в момент времени *t*.

Начальные условия	Дополнительные условия	Вопрос задачи
$\nu_0 = \nu$ л $t_0 = 0$ $x_0 = m$ кг	Вода вливается со скоростью *a* л/мин, а смесь выливается со скоростью *b* л/мин	$t = 60$ мин x – ?

Изменение количества соли происходит за счет вытекающей смеси, в 1 л которой содержится $\frac{x}{V+(b-a)\,t}$, т. к. объем смеси в сосуде увеличивается на *(b – a)* л/мин.

Составим уравнение: $dx = -\frac{bxdt}{V+(b-a)t}$, т. к. выливается b л смеси.

Решим получившееся уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dx}{x} = -\frac{bdt}{V+(b-a)t},$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{bdt}{(b-a)\,t+V},$$

$$\ln|x| = -\frac{b\ln|V+(b-a)\,t)|}{b-a} + \ln C;$$

$$x = \frac{C}{(V+(b-a)\,t)^{\frac{b}{b-a}}}.$$

$$t_0 = 0,$$

$$x_0 = m, \quad m = \frac{C}{V^{\frac{b}{b-a}}}, \quad C = mV^{\frac{b}{b-a}},$$

$$x = \frac{mV^{\frac{b}{b-a}}}{(V+(b-a)\,t)^{\frac{b}{b-a}}}.$$

$$t = 60, \quad x = \frac{mV^{\frac{b}{b-a}}}{(V+(b-a)\cdot 60)^{\frac{b}{b-a}}}.$$

Задача 4. В баке содержится v л раствора, содержащего m кг соли. Вода вливается со скоростью b л/мин, а смесь с той же скоростью перекачивается в другой сосуд такого же объема, где вначале находится чистая вода и излишек из которого выливается с той же скоростью. Сколько соли будет содержаться во втором баке через t мин? [1]

В первом баке	Во втором баке
$x(t)$ – количество соли в момент времени t	$y(t)$ – количество соли в момент времени t

$t_0 = 0$
$x_0 = m$
вливается вода и выливается смесь со скоростью b л/мин.

за время dt вливается 0, а выливается $\frac{x}{V}bdt$ соли.

Получим уравнение:

$$dx = -\frac{x}{V}bdt$$

$$x = Ce^{-\frac{b}{V}t},$$
$$C = m,$$
$$x = me^{-\frac{b}{V}t}.$$

$t_0 = 0$
$y_0 = 0$
вливается и выливается смесь со скоростью b л/мин.

за время dt вливается $\frac{x}{V}bdt$ соли, а выливается $\frac{y}{V}bdt$ соли.

Получим уравнение:

$$dy = \frac{x}{V}bdt - \frac{y}{V}bdt$$

$$dy = \frac{mb}{V}e^{-\frac{b}{V}t}dt - \frac{y}{V}bdt.$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{mb}{V}e^{-\frac{b}{V}t} - \frac{y}{V}b.$$

$$y' = \frac{mb}{V}e^{-\frac{b}{V}t} - \frac{y}{V}b.$$

$$y' + \frac{y}{V}b = \frac{mb}{V}e^{-\frac{b}{V}t}$$ – линейное уравнение.

$$y = uv, \quad y' = u'v - uv',$$

$$u'v + uv' + \frac{b}{V}uv = \frac{mb}{V}e^{-\frac{b}{V}t},$$

$$u'v + u(v' + \frac{b}{V}v) = \frac{mb}{V}e^{-\frac{b}{V}t}.$$

$$v' + \frac{b}{V}v = 0, \qquad \frac{dv}{v} = -\frac{b}{V}dt, \quad \ln v = -\frac{b}{V}t, \quad v = e^{-\frac{b}{V}t},$$

$$u'e^{-\frac{b}{V}t} = \frac{mb}{V}e^{-\frac{b}{V}t}, \qquad u' = \frac{mb}{V}, \qquad u = \frac{mb}{V}t + C.$$

$$y = \left(\frac{mb}{V}t + C\right)\cdot e^{-\frac{b}{V}t}$$ – общее решение уравнения.

При $t_0 = 0$, $y_0 = 0$. Отсюда $C = 0$.

$y = \frac{mb}{V} t \cdot e^{-\frac{b}{V}t}$ – частное решение уравнения.

1.4. Задачи на радиоактивный распад

Задача 1. Какое количество радиоактивного вещества останется через 100 лет, если период полураспада равен 1600 годам? [2]

Пусть t – время (в годах), независимая переменная.
$x(t)$ – количество радиоактивного вещества в момент времени t.

Закон: скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна наличному количеству вещества.

Составляем уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = \kappa x.$$

Начальные условия	Дополнительные условия	Вопрос задачи
$t_0 = 0$	$t_1 = 1600$ лет	$t = 100$ лет
$x_0 = m$	$x_1 = \frac{m}{2}$	x – ?

Решим уравнение

$\frac{dx}{x} = kdt$, $\int \frac{dx}{x} = kt$,

$\ln |x| = kt + \ln C$,

$x = Ce^{kt}$ – общее решение.

$t_0 = 0,\ x_0 = m.$

$m = Ce^0$, $C = m$, $x = me^{kt}$ – частное решение.

При $t_1 = 1600$, $x_1 = \frac{m}{2}$.

Откуда $\frac{m}{2} = me^{1600k}$, $\frac{1}{2} = e^{1600k}$.

$1600k = -\ln 2$, $k = -\frac{\ln 2}{1600}$.

Тогда

$$x = me^{\frac{-t\ln 2}{1600}}.$$

При $t = 100$ $$x = me^{\frac{-\ln 2}{16}},$$

$$\frac{x}{m} = e^{-0,04} = \frac{1}{1,04} = 0,96.$$

Задача 2. Найти период полураспада радиоактивного вещества, если за 2 ч распадается 0,1 часть вещества. [1]

Пусть t – время (час), независимая переменная, $x(t)$ – количество радиоактивного вещества в момент времени t.

Закон: скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна наличному количеству вещества.

Составляем уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = kx.$$

Начальные условия	Дополнительные условия	Вопрос задачи
$t_0 = 0$	$t_1 = 2$ ч	t – ?
$x_0 = m$	$x_1 = 0,9\,m$	$x = \frac{m}{2}$

Решим уравнение

$$\frac{dx}{x} = kdt, \quad \int \frac{dx}{x} = k\int dx, \quad \ln|x| = kt + \ln C,$$

$x = Ce^{kt}$ – общее решение.

$t_0 = 0,\ x_0 = m,$

$m = Ce^0,\ C = m,$

$x = me^{kt}$ – частное решение.

При $t_1 = 2$ $x_1 = 0,9\,m.$

Откуда

$$0,9\,m = me^{kt}, \quad 0,9 = e^{2k},$$

$$2k = -\ln 0{,}9, \qquad k = -\frac{\ln 0{,}9}{2}.$$

Тогда

$$x = me^{\frac{-t\ln 0{,}9}{2}}, \qquad x = \frac{m}{2}, \qquad \frac{m}{2} = me^{\frac{-t\ln 0{,}9}{2}},$$

$$-\ln 2 = -\frac{t\ln 0{,}9}{2}, \qquad \ln 4 = t\ln 0{,}9,$$

$$t = \frac{\ln 4}{\ln 0{,}9} = 13{,}9 \ \text{(час.)}.$$

1.5. Задачи на истечение жидкости

Задача 1. За какое время вытечет вода из цилиндрического сосуда с диаметром основания 1,8 м и высотой 2,45 м через отверстие в дне сосуда диаметром 6 см? [4]

Запишем данные задачи.

Независимой переменной является время *t*, измеряемое в секундах, а зависимая переменная – высота столба жидкости в сосуде в момент времени *t*, измеряемая в метрах и обозначенная *h*.

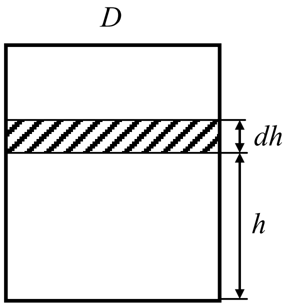

Рис. 1

Начальные условия	Дополнительные условия	Вопрос задачи
$t_0 = 0$	$D = 1{,}8$ м	t – ?
$h_0 = 2{,}45$ м	$d = 0{,}06$ м	$h_1 = 0$
	$g = 10$ м/с^2	

Скорость истечения воды из сосуда определяется формулой $\nu = 0{,}6\sqrt{2gh}$.

Вычислим объем освободившейся части сосуда за время dt. За это время высота столба жидкости уменьшится на dh ($dh < 0$). Освободившая часть сосуда представляет собой круговой цилиндр с высотой $-dh$ и круговым основанием радиусом 0,9 м. Объем этого цилиндра равен

$$W_{освоб.\ части} = -\pi \cdot R^2 dh.$$

Объем вытекшей жидкости равен

$$W_{выт.\ жидк.} = 0{,}6 \cdot \pi \cdot r^2 \sqrt{2gh}\, dt.$$

Поскольку эти величины равны, составим уравнение:

$$-\pi \cdot R^2 dh = 0{,}6\pi \cdot r^2 \sqrt{2gh}\, dt.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Решим его.

$$\frac{R^2 dh}{\sqrt{2gh}} = -0{,}6 r^2 dt, \quad \int \frac{R^2 dh}{\sqrt{2gh}} = -0{,}6 \int r^2 dt$$

$$\frac{2R^2\sqrt{h}}{\sqrt{2g}} = -0{,}6 r^2 t + C.$$

Подставим начальные условия $t_0 = 0$, $h_0 = 2{,}45$ м.

$$C = \frac{2 \cdot 0{,}81 \cdot \sqrt{2{,}45}}{\sqrt{20}} = 0{,}565.$$

Частное решение будет иметь вид

$$\frac{2R^2\sqrt{h}}{\sqrt{2g}} = -0{,}6 r^2 t + 0{,}565.$$

Найдем время, за которое вся вода вытечет из сосуда, т. е. $h = 0$:

$$t = \frac{0{,}565}{0{,}6 \cdot 0{,}0009} \approx 1050 \text{ (сек.)}$$

Задача 2. В дне котла, имеющего форму полушара радиусом 1 м, образовалась пробоина площадью 0,02 м². За какое время вытечет вся вода, заполняющая котел? [3]

Начальные условия	Дополнительные условия	Вопрос задачи
$t_0 = 0$	$R = 1$ м	t_1 – ?
$h_0 = 1$ м	$S = 0{,}02$ м²	$h_1 = 0$

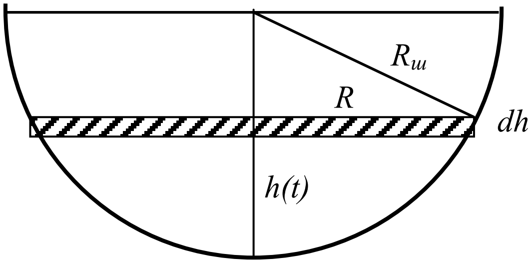

Рис. 2

Скорость истечения воды из сосуда определяется формулой

$$v = 0{,}6\sqrt{2gh}\,.$$

Вычислим объем освободившейся части сосуда за время dt. За это время высота столба жидкости уменьшится на dh ($dh < 0$). Освободившуюся часть сосуда будем считать круговым цилиндром с высотой – dh и круговым основанием радиуса R м, который найдем из геометрических соображений по теореме Пифагора.

$$R = \sqrt{R_ш^2 - \left(R_ш^2 - h^2\right)} = \sqrt{2R_ш h - h^2}\,.$$

Объем этого цилиндра равен

$$W_{освоб.\,части} = -\pi \cdot R^2 dh = -\pi \cdot \left(2R_ш h - h^2\right) dh\,.$$

Объем вытекшей жидкости равен

$$W_{выт.\,жидк.} = 0{,}6 \cdot S \cdot \sqrt{2gh}\, dt\,.$$

Поскольку эти величины равны, составим уравнение:

$$-\pi\left(2R_ш h - h^2\right) = 0{,}6 \cdot S\sqrt{2gh}\, dt\,.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Решим его.

$$\int \frac{0{,}6S\sqrt{2g}}{\pi}dt = -\int 2R_ш\left(h^{\frac{1}{2}} - h^{\frac{3}{2}}\right)dh,$$

$$\frac{0{,}6S\sqrt{2g}}{\pi}t = -\frac{4}{3}R_ш h^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}} + C.$$

Подставим начальные условия и данные задачи, найдем *C*.

$t_0 = 0$, $h_0 = 1$; $C=\frac{14}{15}$.

Частное решение имеет вид

$$\frac{0{,}6\cdot S\sqrt{2g}}{\pi}t = -\frac{4}{3}R_ш h^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}} + \frac{14}{15}.$$

Найдем t при условии $h = 0$, $t \approx 55$ с.

1.6. Задача на движение

Локомотив движется по горизонтальному пути со скоростью 81 км/час. За какое время и на каком расстоянии он будет остановлен, если сопротивление движению после начала торможения равно 0,2 его веса. [1]

Независимая переменная – время t (в секундах).

Зависимые переменные – расстояние s (в метрах) и скорость υ (в м/с).

Начальные условия	Дополнительные условия	Вопрос задачи
$t_0 = 0$	$F_{сопрот.} = 0{,}2 \cdot P$	t_1 – ?
$s_0 = 0$	$g = 10$ м/с^2	s_1 – ?
$\upsilon_0 = 81$ км/ч = = 22,5 м/с		$\upsilon_1 = 0$

Составим уравнение, используя законы Ньютона:

$$ma = -F_{сопрот.}, \qquad m\frac{dv}{dt} = -0{,}2\cdot mg,$$

$$dv = -0{,}2\cdot g dt, \qquad v = -0{,}2\cdot gt + C.$$

Подставим начальные условия: $t = 0$, $\upsilon = 22{,}5$: $C = 22{,}5$.
Частное решение имеет вид

$$\upsilon = -0{,}2 \cdot gt + 22{,}5.$$

При $\upsilon = 0$ $t \approx 11$ с
Найдем S из условия

$$\frac{ds}{dt} = v,$$

$$\frac{ds}{dt} = -0{,}2 \cdot gt + 22{,}5,$$

$$s = -0{,}1 \cdot gt^2 + 22{,}5t + C_1.$$

Исходя из начальных условий $C_1 = 0$.

$$s = -0{,}1 \cdot gt^2 + 22{,}5t$$

При $t = 11$

$$s \approx 126{,}5 \text{ м}.$$

§ 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

2.1. Схема решения геометрических задач

Во многих задачах геометрической оптики, картографии и других областей науки возникает необходимость в нахождении кривых по тем или иным свойствам этих кривых, связанных чаще всего с касательными, проведенными к ним. Поскольку угловой коэффициент касательной равен численному значению производной в точке касания, то при решении этих задач приходим к дифференциальным уравнениям.

При решении геометрических задач с помощью дифференциальных уравнений рекомендуется следующая схема:

1. Сделать чертеж и ввести обозначения.
2. Отделить условия, имеющие место в произвольной точке искомой линии, от условий, выполняющихся в отдельных точках, т. е. выделить начальные условия.
3. Выразить все упомянутые в задаче величины через координаты произвольной точки и значение производной в этой точке, учитывая геометрический смысл производной.
4. По условию задачи составить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет искомая кривая.
5. Найти общее решение, т. е. множество интегральных кривых, и выделить ту, которая удовлетворяет начальным условиям.

2.2. Общие понятия

Введем общие понятия, необходимые для получения дифференциального уравнения.

Графиком функции f называется множество точек с координатами $(x;\ f(x))$, где

$x \in D(f),\ \ y = f(x)$ – уравнение этой кривой.

Секущей графика функции f называется прямая, соединяющая две любые точки графика.

Предельное положение секущей M_0M к графику функции f, когда M приближается к M_0 по данной кривой, называется *касательной*, проведенной к графику функции f в точке $M_0(x_0;y_0)$, а точка $M_0(x_0;y_0)$ – *точкой касания*.

Нормалью графика функции f в точке $M_0(x_0;y_0)$ называется прямая, перпендикулярная касательной, проведенной в точке $M_0(x_0;y_0)$.

Пусть $M_0(x_0;y_0)$ – любая точка графика функции f. Проведем в этой точке касательную ℓ и нормаль n (рис. 3).

Обозначим: $M_1 = n \bigcap Ox$, $M_2 = n \bigcap Oy$, $M_3 = \ell \bigcap Ox$, $M_4 = \ell \bigcap Oy$, $N_0 = np_{Ox} M_0$.

Опустим из начала координат перпендикуляры OM_5 и OM_6 на касательную ℓ и нормаль n соответственно. Введем следующие определения.

Направленный отрезок N_0M_3 называется *подкасательной*, направленный отрезок N_0M_1 – *поднормалью*, отрезок OM_1 – *отрезком, отсекаемым нормалью на оси Ox*, отрезок OM_2 – *отрезком, отсекаемым нормалью на оси Oy*, отрезок OM_3 – *отрезком, отсекаемым касательной на оси Ox*, отрезок OM_4 – *отрезком, отсекаемым касательной на оси Oy*, длина отрезка OM_5 – *расстоянием от начала координат до касательной* ℓ, длина отрезка OM_6 – *расстоянием от начала координат до нормали n*.

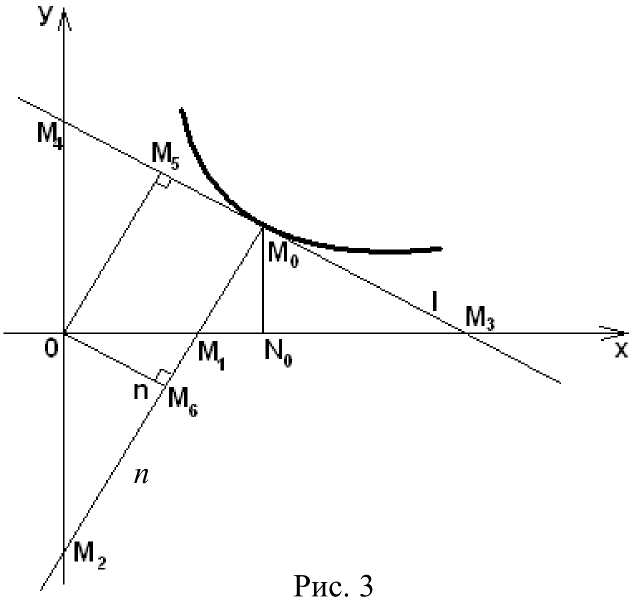

Рис. 3

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0;y_0)$ и имеющей угловой коэффициент k, имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Исходя из геометрического смысла значения производной функции f в данной точке x, уравнение касательной, проведенной к графику функции f в точке $M_0(x_0;y_0)$, можно записать в виде

$$Y - y_0 = f'(x_0)(X - x_0),$$

где $y = f(x)$ – уравнение кривой, $M(X;Y)$ – точка, принадлежащая касательной.

Т. к. нормаль, проведенная в точке $M_0(x_0;y_0)$, перпендикулярна касательной, проведенной в той же точке, то угловые коэффициенты этих прямых удовлетворяют условию:

$$k_1 \cdot k_2 = -1,$$

где $k_1 = f'(x_0)$ – угловой коэффициент касательной, k_2 – угловой коэффициент нормали.

Учитывая это условие и выразив угловой коэффициент нормали через значение производной функции f в точке x_0, получим уравнение нормали, проведенной в точке $M_0(x_0;y_0)$,

$$Y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(X - x_0).$$

Для решения некоторых задач необходима формула расстояния между двумя точками $M_0(x_0;y_0)$ и $M(x;y)$:

$$\rho(M_0; M) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Из аналитической геометрии также известна формула расстояния от точки $M(x;y)$ до прямой ℓ с уравнением

$$ax + by + c = 0:$$

$$\rho(M; \ell) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Перепишем уравнение касательной, проведенной к графику функции f в точке $M_0(x_0;y_0)$, иначе:

$$f'(x_0)(X - x_0) - (Y - y_0) = 0.$$

Тогда на основании формулы расстояния от точки до прямой получаем следующую формулу расстояния от начала координат $O(0;0)$ до касательной, проведенной к графику функции f в точке $M_0(x_0;y_0)$:

$$\rho(0; \ell) = \frac{|y_0 - f'(x_0)x_0|}{\sqrt{1 + (f'(x_0))^2}}.$$

Проведя аналогичные рассуждения относительно нормали, проведенной к графику функции f в точке $M_0(x_0;y_0)$, получим формулу расстояния от начала координат до этой нормали:

$$\rho(0;n)=\frac{|x_0+y_0 f'(x_0)|}{\sqrt{1+(f'(x_0))^2}}.$$

Для определения длины отрезка, отсекаемого касательной или нормалью на какой-либо координатной оси, необходимо использовать тот факт, что каждая из этих прямых пересекает ось абсцисс в точке с координатами *(X;0)*, а ось ординат – в точке с координатами *(0;Y)*, где исходя из уравнения касательной или нормали, проведенной к графику функции в точке $M_0(x_0;y_0)$,

$$X=x_0-\frac{y_0}{f'(x_0)},$$

$$Y=y_0-f'(x_0)\,x_0,$$

или

$$X=x_0+y_0 f'(x_0),$$

$$Y=y_0+\frac{x_0}{f'(x_0)}$$

соответственно.

2.3. Решение геометрических задач

Рассмотрим примеры геометрических задач, приводящих к дифференциальным уравнениям.

Задача 1. Найти линии, длина подкасательной которых постоянна и равна 2. [4]

Решение.

На рис. 4 отрезок NM_1 является подкасательной. Касательная к искомой кривой $y=f(x)$ проведена в точке *M(x;y)*. Т. к. по условию $|NM_1|=2$, то, исходя из определения подкасательной $NM_1=X-x$, получаем уравнение $|X-x|=2$.

Уравнение касательной, проведенной к кривой в точке *M(x;y)*, имеет вид

$$Y-y=f'(x)(X-x),$$

где *(X;Y)* – текущие координаты точки касательной. Точка M_1 имеет координаты *(X;0)*, поэтому

$$X-x=-\frac{y}{f'(x)},$$

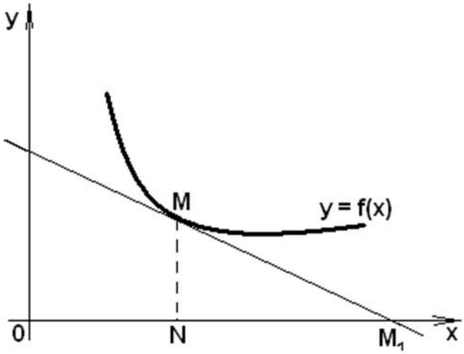

Рис. 4

или

$$X - x = -\frac{y}{y'}.$$

Учитывая условие задачи, получаем дифференциальное уравнение

$$\left|\frac{y}{y'}\right| = 2.$$

По определению модуля действительного числа

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0, \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

последнее уравнение равносильно системе уравнений:

$$y' = \frac{y}{2},$$

или

$$y' = -\frac{y}{2}$$

Получили уравнения с разделяющимися переменными.

Проинтегрируем первое уравнение.

$$y' = \frac{y}{2}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2}.$$

Разделим переменные в дифференциальном уравнении:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2}.$$

Интегрируя это уравнение, имеем

$$\ln|y| = \frac{1}{2}x + C_1$$

или

$$y = Ce^{\frac{1}{2}x},$$

где

$$C = e^{C_1}.$$

Проинтегрируем второе уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{2}.$$

Разделим переменные в дифференциальном уравнении:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{2}.$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{2}x + C_2$$

$$y = Ce^{-\frac{1}{2}x},$$

где

$$C = e^{C_1}.$$

Таким образом, искомым семейством интегральных кривых является семейство кривых, определяемых уравнениями

$$y = Ce^{\frac{1}{2}x}$$

или

$$y = Ce^{-\frac{1}{2}x}.$$

Задача 2. Найти кривую, у которой точка касания равноудалена от начала координат и точки пересечения касательной с осью ординат. [1]

Решение.

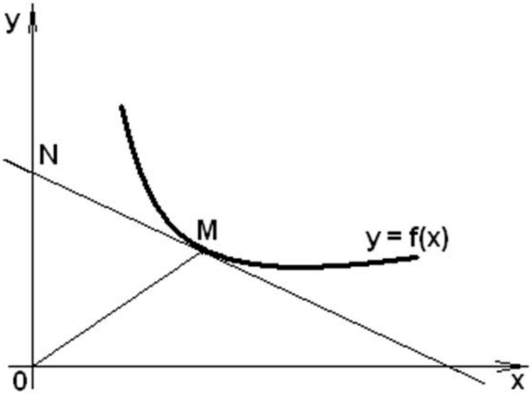

Рис. 5

Обозначим через *M* точку касания, *N* – точку пересечения касательной с осью ординат (рис. 5).

Тогда по условию задачи $|OM| = |MN|$. Касательная к искомой кривой $y = f(x)$ проведена в точке *M(x;y),* поэтому расстояние $|OM|$ вычисляется по формуле

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2} \ .$$

Точка *N* – точка пересечения касательной с осью ординат, следовательно, ее абсцисса равна *X* = 0. По формуле расстояния между двумя точками получаем

$$|MN| = \sqrt{x^2 + (Y - y)^2} \ .$$

Используя уравнение касательной, проведенной к графику функции в точке M *(x; y)*,

$$Y - y = y'(X - x),$$

и учитывая условие задачи, получаем дифференциальное уравнение

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y'x)^2} \ .$$

Полученное выражение преобразуется в систему дифференциальных уравнений

$$y' = \frac{y}{x}$$

или

$$y' = -\frac{y}{x}.$$

Каждое из них – уравнение в разделяющимися переменными.

Решим первое из них, разделив переменные и проинтегрировав его.

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

$$\ln|y| = \ln|Cx|.$$

$$y = Cx.$$

Решим второе из них.

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|.$$

$$xy = C.$$

Таким образом, условию задачи удовлетворяют кривые, определяемые уравнением

$$y = Cx$$

или уравнением

$$xy = C.$$

Задача 3. Найти уравнение линии, проходящей через точку (1; 2), если ее подкасательная вдвое больше абсциссы точки касания. [3]

Решение. Рассмотрим рис. 4. Касательная к искомой кривой $y = f(x)$ проведена в точке $M(x;y)$. Т. к. подкасательная NM_1 по определению равна X – x, а по условию задачи $2x$, то имеем

$$X - x = 2x.$$

Точка (1; 2) задает начальные условия

$$x = 1,$$

$$y = 2.$$

Поэтому решением задачи является частное решение дифференциального уравнения, полученного исходя из уравнения касательной, проведенной к графику функции в точке *M(x;y)*:

$$Y - y = y'(X - x).$$

Откуда

$$X - x = -\frac{y}{y'},$$

т. к. $Y = 0$.

Используя условие задачи, получаем дифференциальное уравнение

$$-\frac{y}{y'} = 2x.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными.

Решим его.

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{2x} = 0.$$

$$\ln|y| + \frac{1}{2}\ln|x| = \ln|C|.$$

$$y\sqrt{x} = C.$$

Получили общее решение дифференциального уравнения. Чтобы найти частное решение, необходимо использовать начальные условия $x = 1$, $y = 2$.

$$2\sqrt{1} = C,$$

отсюда

$$C = 2.$$

Таким образом, искомой кривой является линия, определяемая уравнением

$$y\sqrt{x} = 2.$$

Задача 4. Найти кривую, для которой длина отрезка, отсекаемого касательной на оси ординат, равна $\frac{x^2}{y}$. [3]

Решение.

На рис. 6 точка пересечения касательной с осью ординат обозначена точкой *N*.

По определению длина отрезка, отсекаемого касательной на оси ординат, т. е. длина отрезка *ON*, равна $|Y|$, где Y – координата точки пересечения касательной с осью ординат.

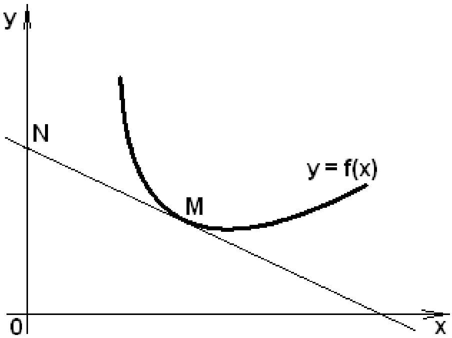

Рис. 6

По условию задачи $|Y| = \dfrac{x^2}{y}$.

Уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в точке *M(x;y)*, имеет вид

$$Y - y = y'(X - x).$$

Учитывая, что *X = 0*, получаем дифференциальное уравнение

$$|y - y'x| = \frac{x^2}{y}.$$

Рассмотрим различные варианты этого уравнения, исходя из определения модуля действительного числа.

Если *y > 0*, то имеем уравнение

$$y - y'x = \frac{x^2}{y}$$

или

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{xy}.$$

Это однородное дифференциальное уравнение.

Полагая, что *y = ux*,

$$y' = u'x + u,$$

имеем

$$u'x + u = \frac{u^2 - 1}{u},$$

$$u'x = \frac{u^2 - 1}{u} - u.$$

Отсюда

$$\frac{du}{dx}x = -\frac{1}{u},$$

$$udu = -\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя полученное уравнение, имеем

$$\frac{u^2}{2} = -\ln|x| + C,$$

$$\frac{y^2}{2x^2} = -\ln|x| + C,$$

поэтому

$$y^2 = -2x^2 \ln|x| + 2Cx^2.$$

Если $y < 0$, то получим другое дифференциальное уравнение

$$y - y'x = -\frac{x^2}{y},$$

$$y' = \frac{y^2 + x^2}{xy}.$$

Это однородное дифференциальное уравнение.

Полагая, что $y = ux$, откуда

$$y' = u'x + u,$$

имеем

$$u'x + u = \frac{u^2 + 1}{u},$$

$$u'x = \frac{u^2 + 1}{u} - u.$$

Отсюда

$$\frac{du}{dx}x = \frac{1}{u},$$

$$udu = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя полученное уравнение, имеем

$$\frac{u^2}{2} = \ln|x| + C,$$

$$\frac{y^2}{2x^2} = \ln|x| + C,$$

поэтому

$$y^2 = 2x^2 \ln|x| + 2Cx^2.$$

Таким образом, семейством искомых кривых является семейство кривых, определяемых уравнением

$$y^2 = -2x^2 \ln|x| + 2Cx^2.$$

или уравнением

$$y^2 = 2x^2 \ln|x| + 2Cx^2.$$

Задача 5. Найти уравнение линии, проходящей через точку (1; 0), если площадь трапеции, ограниченной касательной, осями координат и ординатой точки касания, равна 1,5. [3]

Решение.

На рис. 7 трапеция ограничена касательной *MP*, ординатой *MN*, отрезками, отсекаемыми касательной на оси абсцисс и оси ординат, т. е. отрезками *ON* и *OP* соответственно.

Известна формула площади трапеции:

$$S = \frac{1}{2}(a+b)h,$$

где *a, b* – основания трапеции, *h* – высота трапеции.

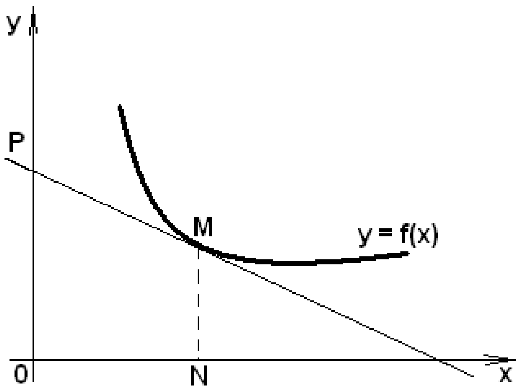

Рис. 7

По условию задачи

$$a = |OP|,$$
$$b = |MN|,$$
$$h = |ON|,$$

поэтому

$$\frac{1}{2}\left(|OP| + |MN|\right)|ON| = \frac{3}{2}.$$

Касательная к искомой кривой $y = f(x)$ проведена в точке *M(x;y)*. Отсюда

$$|OP| = |Y|,$$
$$|MN| = |y|,$$
$$|ON| = |x|.$$

Используя ранее полученное уравнение, имеем

$$\left(|Y| + |y|\right)|x| = 3.$$

Точка (1; 0) определяет начальные условия $x = 1$, $y = 0$.

Исходя из различных сочетаний знаков переменных Y, y, x, т. е. от расположения трапеции в различных координатных углах, возможны два варианта последнего уравнения. Если трапеция расположена в первом или третьем координатном углу, получим уравнение

$$(Y + y)x = 3,$$

если во втором или четвертом, то

$$(Y + y)x = -3.$$

Из уравнения касательной, проведенной к кривой в точке *M(x;y)*,

$$Y - y = y'(X - x),$$

следует, что

$$Y = y - y'x,$$

т. к. X = 0.

Решим первое уравнение.

$$(y - y'x + y)x = 3.$$

Перепишем это уравнение в следующем виде

$$y' - \frac{2y}{x} = -\frac{3}{x^2}.$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение.

Решаем уравнение методом Бернулли, т. е. подстановкой *y = uv*, откуда

$$y' = u'v + uv',$$

имеем

$$u'v + uv' - \frac{2uv}{x} = -\frac{3}{x^2}.$$

$$u'v + u(v' - \frac{2v}{x}) = -\frac{3}{x^2}.$$

Решаем однородное линейное уравнение

$$v' - \frac{2v}{x} = 0.$$

$$\frac{dv}{v}=\frac{2dx}{x}\ .$$

$$\ln|v|=2\ln|x|$$

или

$$v=x^2\ .$$

Подставим полученную функцию в неоднородное линейное уравнение

$$u'x^2=-\frac{3}{x^2},$$

отсюда

$$u'=-\frac{3}{x^4}\ .$$

$$du=-\frac{3}{x^4}dx\ .$$

Интегрируем последнее уравнение

$$u=\frac{1}{x^3}+C\ .$$

Следовательно,

$$y=uv=\frac{1}{x}+Cx^2\ .$$

Решаем другое уравнение

$$(y-y'x+y)=-3\ ,$$

$$y'-\frac{2y}{x}=\frac{3}{x^2}\ .$$

Это неоднородное линейное уравнение.
Полагая, что $y = uv$, откуда

$$y'=u'v+uv'\ ,$$

$$u'v+u(v'-\frac{2v}{x})=\frac{3}{x^2}\ .$$

Однородное линейное уравнение

$$v' - \frac{2v}{x} = 0$$

было решено ранее

$$v = x^2.$$

После подстановки этого решения в неоднородное линейное уравнение имеем

$$u' = \frac{3}{x^4}.$$

Проинтегрируем его.

$$du = \frac{3}{x^4}dx.$$

$$u = -\frac{1}{x^3} + C.$$

$$y = uv = -\frac{1}{x} + Cx^2.$$

Таким образом, общими решениями исходных дифференциальных уравнений являются семейства кривых, определяемых уравнениями

$$y = \frac{1}{x} + Cx^2$$

или уравнениями

$$y = -\frac{1}{x} + Cx^2.$$

Чтобы найти частное решение дифференциального уравнения, используем начальные условия $x = 1, y = 0$.

$$0 = 1 + C, \quad C = -1,$$

отсюда

$$y = \frac{1}{x} - x^2.$$

$$0 = -1 + C, \quad C = 1,$$

отсюда

$$y = -\frac{1}{x} + x^2.$$

Следовательно, искомыми кривыми являются линии, определяемые уравнениями

$$y = \frac{1}{x} - x^2$$

или

$$y = -\frac{1}{x} + x^2.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ФИЗИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

1.2. Задачи на теплообмен

1. За какое время тело, нагретое до 25 °С, в комнате с температурой 10 °С охладится до 15 °С, если до 20 °С оно охладилось за 20 мин?

2. За какое время тело, нагретое до 25 °С, в комнате с температурой 0 °С охладится до 10 °С, если до 15 °С оно охладилось за 20 мин?

3. Тело, нагретое до 30 °С, в комнате с температурой 0 °С охладится до 25,5 °С за 30 мин. Какова будет температура тела через 3 часа?

4. За какое время тело, нагретое до 100 °С, в комнате с температурой 25 °С охладится до 5 °С, если до 50 °С оно охладилось на 20 мин?

5. За какое время тело, нагретое до 80 °С, в комнате с температурой 15 °С охладится до 20 °С, если до 30 °С оно охладилось за 30 мин?

6. Тело, нагретое до 100 °С, в комнате с температурой 20 °С охладится до 25°С за 20 мин. Какова будет температура тела через 10 мин?

7. Тело, нагретое до 80 °С, в комнате с температурой 10 °С охладится до 60°С за 30 мин. Какова будет температура тела через 10 мин?

8.Тело, нагретое до 120 °С, в комнате с температурой 15 °С охладится до 80 °С за 40 мин. Какова будет температура тела через 60 мин?

9. Тело, нагретое до 90 °С, в комнате с температурой 25 °С охладится до 60 °С за 20 мин. Какова будет температура тела через 30 мин?

10. В воде с температурой 20 °С в течение 10 мин тело охлаждается от 120 °С до 80 °С. Найти время, за которое тело охладится до 30 °С с начала опыта.

11. Кусок металла с температурой 100 °С помещен в печь, температура которой равномерно повышается в течение часа от 800 до 1000 °С. Найти температуру тела через час, если $\kappa = 0{,}46$.

12. Кусок металла с температурой 80 °С помещен в печь, температура которой равномерно повышается в течение часа от 400

до 800 °C. Найти температуру тела через час, если $\kappa = 0{,}46$.

13. Кусок металла с температурой 90 °C помещен в печь, температура которой равномерно повышается в течение часа от 200 до 600 °C. Найти температуру тела через час, если $\kappa = 0{,}34$.

14. За какое время тело, нагретое до 300 °C, помещенное в жидкость, температура которой равна 60 °C, охладится до 150 °C, если за 10 мин температура тела снизилась до 200 °C?

15. Одно тело имеет температуру 200 °C, а другое – 100 °C. Через 10 мин остывания этих тел в воздухе с температурой 0 °C первое остыло до 100 °C, второе – до 80 °C. Через какое время температуры тел сравняются?

16. Два тела имеют температуру 100 °C. Они вынесены на воздух с температурой 0 °C. Через какое время разница их температур будет равна 25 °C, если за 10 мин температура одного снизилась до 80 °C, другого – до 64 °C?

17. Одно тело имеет температуру 100 °C, а другое – 80 °C. Через 10 мин остывания этих тел на воздухе с температурой 10 °C первое остыло до 80 °C, а второе – до 60 °C. Через какое время температуры тел сравняются?

18. Два тела имеют температуру 200 °C. Они вынесены на воздух с температурой 0 °C. Через какое время разница их температур будет равна 20 °C, если за 10 мин температура снизилась до 100 °C , а другого – до 80 °C?

19. Одно тело имеет температуру 120 °C, а другое – 100 °C. Через 10 мин остывания этих тел на воздухе с температурой 10 °C первое остыло до 80 °C, а второе – до 60 °C. Через какое время температуры тел сравняются?

20. Два тела имеют температуру 100 °C. Они вынесены на воздух с температурой 0 °C. Через какое временя разница их температур будет равна 10 °C, если за 10 мин температура одного снизилась до 60 °C, другого – до 40 °C?

1.3. Задачи на смеси

1. Сосуд объемом 20 л наполнен воздухом (80 % азота, 20 % кислорода). В сосуд втекает 0,1 л азота в секунду, который непрерывно перемешивается с находящимся в сосуде воздухом. Из сосуда вытекает такое же количество смеси. Через какое время в сосуде будет 90 % азота?

2. В баке содержится 60 л раствора, содержащего 10 кг соли. Вода вливается со скоростью 4 л/мин, а смесь выливается со скоростью 2 л/мин. Сколько соли останется в баке через 30 мин?

3. В баке содержится 50 л раствора, содержащего 5 кг соли. Вода вливается со скоростью 3 л/мин, а смесь выливается со ско-

ростью 2 л/мин. Сколько соли останется в баке через 10 мин?

4. В баке содержится 30 л раствора, содержащего 6 кг соли. Вода вливается со скоростью 5 л/мин, а смесь с той же скоростью перекачивается в другой сосуд такого же объема, где вначале находится чистая вода и излишек из которого выливается с той же скоростью. Сколько соли будет содержаться во втором баке через 15 мин?

5. Сосуд объемом 30 л наполнен воздухом (80 % азота, 20 % кислорода). В сосуд втекает 0,4 л азота в секунду, который непрерывно перемешивается с находящимся в сосуде воздухом. Из сосуда вытекает такое же количество смеси. Через какое время в сосуде будет 95 % азота?

6. В баке содержится 100 л раствора, содержащего 20 кг соли. Вода вливается со скоростью 3 л/мин, а смесь выливается со скоростью 2 л/мин. Сколько соли останется в баке через час?

7. В баке содержится 30 л раствора, содержащего 6 кг соли. Вода вливается со скоростью 3 л/мин, а смесь выливается со скоростью 2 л/мин. Сколько соли останется в баке через час?

8. В баке содержится 30 л раствора, содержащего 6 кг соли. Вода вливается со скоростью 2 л/мин, а смесь с той же скоростью перекачивается в другой сосуд такого же объема, где вначале находится чистая вода и излишек из которого выливается с той же скоростью. Сколько соли будет содержаться во втором баке через 20 мин?

9. Сосуд объемом 60 л наполнен воздухом (80 % азота, 20 % кислорода). В сосуд втекает 0,3 л азота в секунду, который непрерывно перемешивается с находящимся в сосуде воздухом. Из сосуда вытекает такое же количество смеси. Через какое время в сосуде будет 92 % азота?

10. В баке содержится 70 л раствора, содержащего 8 кг соли. Вода вливается со скоростью 3 л/мин, а смесь выливается со скоростью 2 л/мин. Сколько соли останется в баке через 20 мин?

11. В баке содержится 80 л раствора, содержащего 8 кг соли. Вода вливается со скоростью 5 л/мин, а смесь выливается со скоростью 2 л/мин. Сколько соли останется через 10 мин?

12. В баке содержится 50 л раствора, содержащего 10 кг соли. Вода вливается со скоростью 3 л/мин, а смесь с той же скоростью перекачивается в другой сосуд такого же объема, где вначале находится чистая вода и излишек из которого выливается с той же скоростью. Сколько соли будет содержаться во втором баке через 10 мин?

13. Сосуд объемом 90 л наполнен воздухом (80 % азота, 20 % кислорода). В сосуд втекает 0,4 л азота в секунду, который непрерывно перемешивается с находящимся в сосуде воздухом. Из

сосуда вытекает такое же количество смеси. Через какое время в сосуде будет 85 % азота?

14. В баке содержится 120 л раствора, содержащего 30 кг соли. Вода вливается со скоростью 4 л/мин, а смесь выливается со скоростью 2 л/мин. Сколько соли останется в баке через час?

15. В баке содержится 110 л раствора, содержащего 10 кг соли. Вода вливается со скоростью 4 л/мин, а смесь выливается со скоростью 3 л/мин. Сколько соли останется в баке через 40 мин?

16. В баке содержится 120 л раствора, содержащего 8 кг соли. Вода вливается со скоростью 6 л/мин, а смесь с той же скоростью перекачивается в другой сосуд такого же объема, где вначале находится чистая вода и излишек из которого выливается с той же скоростью. Сколько соли будет содержаться во втором баке через 20 мин?

17. В воздухе содержится 0,15 % углекислого газа. Вентилятор подает в минуту 20 куб. м воздуха, содержащего 0,04 % углекислого газа. Через какое время количество углекислого газа уменьшится втрое, если объем комнаты 200 куб. м?

18. В воздухе содержится 0,16 % углекислого газа. Вентилятор подает в минуту 30 куб. м воздуха, содержащего 0,03 % углекислого газа. Через какое время количество углекислого газа уменьшится втрое, если объем комнаты 300 куб. м?

19. После собрания воздух в зале вместимостью 10 800 куб. м содержит 0,2 % углекислого газа. Сколько куб. м воздуха, содержащего 0,04 % углекислого газа, надо ежеминутно поставлять в зал, чтобы через 10 мин содержание углекислого газа в нем было 0,08 %?

20. После собрания воздух в зале вместимостью 10 800 куб. м содержит 0,16 % углекислого газа. Сколько куб. м воздуха, содержащего 0,04 % углекислого газа, надо ежеминутно поставлять в зал, чтобы через 20 мин содержание углекислого газа в нем было 0,06 %?

1.4. Задачи на радиоактивный распад

1. Какое количество радиоактивного вещества останется через 200 лет, если период полураспада равен 600 годам?

2. Найти период полураспада радиоактивного вещества, если за 3 часа распадается 0,2 части вещества.

3. Период полураспада радиоактивного вещества равен 1 часу. Через сколько времени его количество уменьшится в 10 раз?

4. Период полураспада радиоактивного вещества равен 10 годам. Через какое время останется 20 г от первоначального количества 120 г?

5. К началу радиоактивного распада имели 1 г вещества. Через какое время останется 0,25 г, если период полураспада равен 3 мин?

6. Сколько радиоактивного вещества останется через 10 лет от 120 г вещества с периодом полураспада 12 лет?

7. Период полураспа

да радиоактивного вещества равен 1 часу. За какое время его количество уменьшится в 10 раз?

8. Какая часть первоначального количества радиоактивного вещества останется через 150 лет, если период полураспада равен 888 годам?

9. Какая часть первоначального количества радиоактивного вещества останется через 1000 лет, если период полураспада равен 1550 годам?

10. Найти период полураспада радиоактивного вещества, если через два года останется 40 % первоначального количества вещества.

11. Какое количество радиоактивного вещества останется через 200 лет, если период полураспада равен 600 годам?

12. Найти период полураспада радиоактивного вещества, если за 5 часов распадается 0,27 части вещества.

13. Период полураспада радиоактивного вещества равен 1 часу. За какое время его количество уменьшится в 20 раз?

14. Период полураспада радиоактивного вещества равен 30 годам. Через какое время останется 12 г от первоначального количества 100 г?

15. К началу радиоактивного распада имели 5 г вещества. Через какой промежуток времени останется 0,25 г, если период полураспада равен 5 мин?

16. Сколько радиоактивного вещества останется через 30 лет от 150 г вещества с периодом полураспада 15 лет?

17. Период полураспада радиоактивного вещества равен 1 году. Через какое время его количество уменьшится в 50 раз?

18. Какая часть первоначального количества радиоактивного вещества останется через 100 лет, если период полураспада равен 800 годам?

19. Какая часть первоначального количества радиоактивного вещества останется через 500 лет, если период полураспада равен 1500 годам?

20. Найти период полураспада радиоактивного вещества, если через три года останется 25 % первоначального количества вещества.

1.5. Задачи на истечение жидкости

1. За какое время вода, заполняющая цилиндрический сосуд высотой 2 м и радиусом основания 1 м, вытечет из него через круглое отверстие в дне радиусом 0,1 м?

2. За какое время вода, заполняющая полусферическую чашу диаметром 2 м, вытечет из нее через круглое отверстие в дне радиусом 0,02 м?

3. Цилиндрический сосуд с горизонтальной осью имеет длину 6 м и диаметр 4 м. За какое время вода, заполняющая сосуд, вытечет из него через круглое отверстие в дне радиусом 1/12 м?

4. В дне цилиндрического сосуда, площадь основания которого 100 кв. см, а высота 30 см, имеется отверстие. Вычислить площадь этого отверстия, если вода, заполняющая этот сосуд, вытекает из него за 2 мин.

5. За какое время вытечет вода из цилиндрического сосуда с диаметром основания 1,8 м и высотой 2,45 м через отверстие в дне сосуда диаметром 6 см?

6. В дне сосуда, имеющего форму полушара, образовалась пробоина площадью 0,2 кв. см. За какое время вода, заполняющая сосуд, вытечет из него, если радиус полушара равен 43 см?

7. Коническая воронка высотой 20 см заполнена водой. Радиус верхнего основания равен 12 см. Внизу имеется отверстие радиусом 0,3 см. За какое время уровень воды в воронке понизится на 5 см?

8. Воронка имеет форму конуса радиусом 6 см и высотой 10 см. За какое время вытечет вся вода через круглое отверстие внизу воронки диаметром 1 см?

9. За какое время вытечет вся вода из цилиндрического бака, диаметр основания которого равен 2 м и высота 3 м, через круглое отверстие в дне диаметром 6 см?

10. За какое время вода, заполняющая полусферическую чашу диаметром 4 м, вытечет из нее через круглое отверстие в дне радиусом 0,04 м?

11. За какое время вода, заполняющая цилиндрический сосуд высотой 3 м и радиусом основания 0,5 м, вытечет из него через круглое отверстие в дне радиусом 0,04 м?

12. За какое время вода, заполняющая полусферическую чашу диаметром 5 м, вытечет из нее через круглое отверстие в дне радиусом 0,05 м?

13. Цилиндрический сосуд с горизонтальной осью имеет длину 8 м и диаметр 2 м. За какое время вода, заполняющая сосуд, вытечет из него через круглое отверстие в дне радиусом 0,1 м?

14. В дне цилиндрического сосуда, площадь основания которого 50 кв. см, а высота 20 см, имеется отверстие. Вычислить

площадь этого отверстия, если вода, заполняющая этот сосуд, вытекает из него за 3 мин.

15. За какое время вытечет вода из цилиндрического сосуда с диаметром основания 4 м и высотой 2 м через отверстие в дне сосуда диаметром 5 см?

16. В дне сосуда, имеющего форму полушара, образовалась пробоина площадью 0,3 кв. см. За какое время вода, заполняющая сосуд, вытечет из него, если радиус полушара равен 40 см?

17. Коническая воронка высотой 30 см заполнена водой. Радиус верхнего основания равен 15 см. Внизу имеется отверстие радиусом 0,2 см. За какое время уровень воды в воронке понизится на 10 см?

18. Воронка имеет форму конуса радиусом 4 см и высотой 15 см. За какое время вытечет вся вода через круглое отверстие внизу воронки диаметром 2 см?

19. За какое время вытечет вся вода из цилиндрического бака, диаметр основания которого равен 3 м и высота 5 м, через круглое отверстие в дне диаметром 8 см?

20. За какое время вода, заполняющая полусферическую чашу диаметром 6 м, вытечет из нее через круглое отверстие в дне радиусом 0,02 м?

1.6. Задачи на движение

1. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью 5 м/с. На полном ходу ее мотор выключается, и через 40 с после этого скорость лодки уменьшается до 2 м/с. Определить скорость лодки через две минуты после остановки мотора, считая, что сопротивление воды пропорционально скорости лодки.

2. Лодка замедляет свое движение под действием силы сопротивления воды, которая пропорциональна скорости лодки. Начальная скорость лодки равна 1,5 м/с, через 4 с она уменьшается до 1 м/с. В какой момент времени скорость лодки станет равной 1 см/с?

3. Корабль замедляет свое движение под действием силы сопротивления воды, которая пропорциональна скорости корабля. Начальная скорость движения равна 10 м/с, за 5 с она уменьшается до 8 м/с. Через какое время скорость уменьшится до 1 м/с?

4. Поезд, вес которого вместе в паровозом равен P, движется прямолинейно. Сила тяги постоянна и равна F. Сила сопротивления движению пропорциональна скорости движения. Определить закон движения, если в начальный момент скорость и путь равны 0.

5. Количество света, поглощаемое слоем воды малой толщины, пропорционально количеству падающего света и толщине воды. Слой воды толщиной 35 см поглощает половину падающего на него света. Какую часть поглощает слой толщиной 2 м?

6. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью 10 м/с. На полном ходу ее мотор выключается и через 20 с после этого скорость лодки уменьшается до 6 м/с. Определить скорость лодки через две минуты после остановки мотора, считая, что сопротивление воды пропорционально скорости лодки.

7. Пуля входит в доску толщиной 0,1 м со скоростью 200 м/с, а вылетает, пробив ее, со скоростью 80 м/с. Сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости движения. Сколько времени продолжалось движение через доску?

8. Поезд движется по прямолинейному участку со скоростью 72 км/ч. За какое время и на каком расстоянии он будет остановлен тормозом, если сопротивление движению после начала торможения равно 0,2 его веса.

9. Пуля входит в доску толщиной 10 см со скоростью 200 м/с, а вылетает, пробив ее, со скоростью 50 м/с. Сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости движения. Сколько времени продолжалось движение через доску?

10. Моторная лодка движется со скоростью 18 км/ч. Через 5 мин после выключения мотора ее скорость уменьшилась до 6 м/с. Найти расстояние, пройденное лодкой, за 15 мин после остановки мотора, сопротивление пропорционально скорости движения.

11. Материальная точка движется по прямой со скоростью, обратно пропорциональной пройденному пути. В начальный момент движения точка находилась на расстоянии 5 м от начала пути и имела скорость 20 м/с. Определить пройденный путь и скорость лодки через 10 с после начала движения.

12. Лодка замедляет свое движение под действием силы сопротивления воды, которая пропорциональна скорости лодки. Начальная скорость лодки равна 2 м/с, через 4 с она уменьшается до 1 м/с. В какой момент времени скорость лодки станет равной 1 см/с?

13. Пуля входит в стену толщиной 20 см со скоростью 400 м/с, а вылетает, пробив ее, со скоростью 100 м/с. Сопротивление пропорционально квадрату скорости движения. Найти время движения через стену.

14. Пуля входит в стену толщиной 20 см со скоростью 600 м/с, а вылетает, пробив ее, со скоростью 200 м/с. Сопротивление пропорционально квадрату скорости движения. Найти время движения через стену.

15. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью 6 м/с. На полном ходу ее мотор выключается, и через 20 с после этого скорость лодки уменьшается до 3 м/с. Определить скорость лодки через две минуты после остановки мотора, считая, что сопротивление воды пропорционально скорости лодки.

16. Лодка замедляет свое движение под действием силы сопротивления воды, которая пропорциональна скорости лодки. Начальная скорость лодки равна 4 м/с, через 6 с она уменьшается до 2 м/с. В какой момент времени скорость лодки станет равной 1 см/с?

17. Корабль замедляет свое движение под действием силы сопротивления воды, которая пропорциональна скорости корабля. Начальная скорость движения равна 12 м/с, за 6 с она уменьшается до 6 м/с. Через какое время скорость уменьшится до 2 м/с?

18. Количество света, поглощаемое слоем воды малой толщины, пропорционально количеству падающего света и толщине воды. Слой воды толщиной 1 м поглощает четверть падающего на него света. Какая часть потока дойдет до глубины 4 м?

19. Пуля входит в стену толщиной 10 см со скоростью 300 м/с, а вылетает, пробив ее, со скоростью 150 м/с. Сопротивление пропорционально квадрату скорости движения. Найти время движения через стену.

20. Диск, начавшийся вращаться с угловой скоростью 5 об/мин, через 2 мин вращается со скоростью 3 об/мин. Через какое время после начала вращения скорость будет равна 1 об/мин, если сила трения пропорциональна скорости вращения?

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

1. Найти линию, у которой длина поднормали есть постоянная величина, равная 2.

2. Найти все линии, у которых подкасательная пропорциональна абсциссе точки касания.

3. Найти линию, имеющую постоянную подкасательную, равную 2.

4. Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного касательной к кривой, перпендикуляром, опущенным из точки касания на ось абсцисс, и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная 2.

5. Найти линию, у которой точка пересечения касательной с осью абсцисс имеет координату, вдвое меньшую абсциссы точки касания.

6. Найти кривую, у которой длина отрезка касательной от точки касания до точки пересечения с осью Ox имеет постоянную длину, равную 2.

7. Найти кривую, у которой отрезок, отсекаемый касательной на оси Oy, равен квадрату ординаты точки касания.

8. Найти кривую, для которой длина отрезка, отсекаемого на оси Oy, равна удвоенной ординате этой точки.

9. Доказать, что кривая, угловой коэффициент которой пропорционален абсциссе точки касания, есть парабола.

10. Найти кривую, для которой радиус-вектор в точке касания равен длине отрезка между точкой касания и осью абсцисс.

11. Найти линию, проходящую через точку (2; 0), если отрезок касательной между точкой касания и осью ординат имеет постоянную длину, равную 2.

12. Найти линию, проходящую через точку (2; 4), если длина отрезка, отсекаемого касательной в любой точке линии на оси абсцисс, равна удвоенной абсциссе точки касания.

13. Найти линию, проходящую через точку (1; 2), если длина отрезка, отсекаемого касательной в произвольной точке линии на оси абсцисс, равна $\frac{2}{3}$ абсциссы точки касания.

14. Найти кривую, проходящую через точку (0; 2), если угловой коэффициент касательной равняется утроенной ординате этой точки.

15. Найти линию, проходящую через точку (2; 5), если угловой коэффициент касательной в 8 раз больше углового коэффициента прямой, соединяющей ту же точку с началом координат.

16. Найти линию, проходящую через точку (1; 0), если длина поднормали на 2 единицы больше абсциссы точки касания.

17. Найти линию, проходящую через точку (2; 3), если отрезок касательной, заключенный между координатными осями, делится в точке касания пополам.

18. Найти кривую, проходящую через точку (4; 5), если отрезок нормали, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.

19. Найти кривую, проходящую через точку (4; 1), для которой площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, равна 1.

20. Найти кривую, проходящую через точку (2; 16), для которой угловой коэффициент касательной в любой ее точке равен квадрату ординаты точки касания.

21. Найти кривую, для которой точка пересечения касательной с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и начала координат.

22. Найти кривую, у которой расстояние от касательной до начала координат равно абсциссе точки касания.

23. Найти линию, для которой площадь трапеции, образованной осями координат, ординатой произвольной точки и касательной в этой точке, равна половине квадрата абсциссы точки касания.

24. Найти линию, у которой поднормаль в любой точке так относится к сумме абсциссы и ординаты точки касания, как ордината этой точки к ее абсциссе.

25. Найти линии, у которой квадрат длины отрезка, отсекаемого любой касательной на оси ординат, равен произведению координат точки касания.

26. Найти линию, у которой любая касательная пересекается с осью ординат в точке, одинаково удаленной от точки касания и от начала координат.

27. Найти линию, у которой подкасательная равна среднему арифметическому координат точки касания.

28. Найти линию, для которой произведение абсциссы точки касания и длины отрезка, отсекаемого нормалью в этой точке на оси ординат, равно удвоенному квадрату расстояния от этой точки до начала координат.

29. Найти линию, для которой треугольник, образованный осью ординат, касательной и радиус-вектором точки касания, является равнобедренным.

30. Найти линию, для которой произведение углового коэффициента касательной в любой ее точке и суммы координат точки касания равно удвоенной ординате этой точки.

31. Найти линию, проходящую через точку (a; a), для которой площадь треугольника, образованного осью абсцисс, касательной и радиус-вектором точки касания, равна a^2.

32. Найти линию, проходящую через точку (0; 1), для которой длина отрезка, отсекаемого касательной на оси абсцисс, равна кубу ординаты точки касания.

33. Найти кривую, проходящую через точку (1; 0), для которой длина отрезка, отсекаемого касательной на оси ординат, равна квадрату абсциссы точки касания.

34. Найти кривую, проходящую через точку (1; 1), для которой длина отрезка, отсекаемого на оси ординат, равна утроенной абсциссе точки касания.

35. Найти кривую, проходящую через точку (1; 0), для которой отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, равен абсциссе точки касания.

36. Найти кривую, проходящую через точку (1; 2), у которой касательная отсекает на оси ординат отрезок, равный квадрату ординаты точки касания.

37. Найти линию, проходящую через точку (1; 1), у которой касательная отсекает на оси абсцисс отрезок, равный квадрату абсциссы точки касания.

38. Найти кривую, проходящую через точку (1; 1), у которой касательная отсекает на оси ординат отрезок, равный кубу ординаты точки касания.

39. Найти линию, проходящую через точку (1; 1), у которой касательная отсекает на оси абсцисс отрезок, равный кубу абсциссы точки касания.

40. Найти линию, проходящую через точку (4; 1), у которой касательная отсекает на оси ординат отрезок, равный квадрату абсциссы точки касания.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

	Физические задачи					Геометрические задачи			
№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	1	11	21	31
2	2	2	2	2	2	2	12	22	32
3	3	3	3	3	3	3	13	23	33
4	4	4	4	4	4	4	14	24	34
5	5	5	5	5	5	5	15	25	35
6	6	6	6	6	6	6	16	26	36
7	7	7	7	7	7	7	17	27	37
8	8	8	8	8	8	8	18	28	38
9	9	9	9	9	9	9	19	29	39
10	10	10	10	10	10	10	20	30	40
11	11	11	11	11	11	1	11	21	31
12	12	12	12	12	12	2	12	22	32
13	13	13	13	13	13	3	13	23	33
14	14	14	14	14	14	4	14	24	34
15	15	15	15	15	15	5	15	25	35
16	16	16	16	16	16	6	16	26	36
17	17	17	17	17	17	7	17	27	37
18	18	18	18	18	18	8	18	28	38
19	19	19	19	19	19	9	19	29	39
20	20	20	20	20	20	10	20	30	40

ЛИТЕРАТУРА

1. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – СПб. : Специальная литература, 1998. – 446 с.

2. Давыдов, Н. А. Сборник задач по математическому анализу / Н. А. Давыдов, П. П. Коровкин, В. Н. Никольский. – М. : Просвещение, 1973. – 256 с.

3. Запорожец, Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г. И. Запорожец. – М. : Высшая школа, 1966. – 460 с.

4. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / К. Н. Лунгу. – М. : Айрис-пресс, 2004. – 592 с.

5. Самойленко, А. М. Дифференциальные уравнения, примеры и задачи / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, Н. А. Перестюк. – Киев : Вища школа, 1984. – 408 с.

6. Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов. – М. : Наука,1979. – 126 с.

Учебное издание

Елена Михайловна **АКСЕНЕНКО**,
Галина Михайловна **ЧУВАНОВА**

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Практикум

Корректор М. Ф. Шатохина

Верстка О. А. Надточий

Подписано в печать 24.01.2013. Бумага «Mondi».
Гарнитура «Svoboda». Формат 60x84$^{1}/_{16}$.
Тираж 500 экз. (1-й завод 1-100 экз.).
Объем 2 усл. п. л. Заказ № 849-12.

Издательство Сахалинского государственного университета.
693008, г. Южно-Сахалинск, ул. Ленина, 290, каб. 32.
Тел. (4242) 45-23-16. Тел./факс (4242) 45-23-17.
E-mail: izdatelstvo@sakhgu.ru, polygraph@sakhgu.sakhalin.ru