ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САХАЛИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

М. С. АДАМЧУК
Л. Г. ЧИКИШЕВА

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

Практикум по курсу геометрии

Южно-Сахалинск
Издательство СахГУ
2014

УДК 514.001.1(076)
ББК 22.151.0–5
А28

Печатается по решению учебно-методического совета
Сахалинского государственного университета, 2013

Рецензенты:
Мисиков Б. Р., канд. физ.-мат. наук, д-р пед. наук, зав. кафедрой математики СахГУ;
Лихачева О. Н., канд. физ.-мат. наук, доцент, заместитель директора Сахалинского филиала геофизической службы РАН.

А28 **Адамчук, М. С. Преобразования плоскости :** практикум по курсу геометрии / М. С. Адамчук, Л. Г. Чикишева. – Южно-Сахалинск : изд-во СахГУ, 2014. – 88 с.

ISBN 978-5-88811-478-0

Практикум по курсу геометрии предназначен для изучения темы «Геометрические преобразования», входящей в ФГОС ВПО для студентов направления «Педагогическое образование», профиль «Математика и физика». Практикум предназначен для организации аудиторной и внеаудиторной (индивидуальной и самостоятельной) работы студентов. В пособии указаны определения основных движений и подобий плоскости, перечислены их свойства, приведены примеры решения задач с применением этих преобразований, а также имеется большое количество задач для самостоятельного решения.

УДК 514.001.1(076)
ББК 22.151.0–5

ISBN 978-5-88811-478-0

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Практикум по курсу геометрии предназначен для изучения темы «Геометрические преобразования», входящей в ФГОС ВПО для студентов направления «Педагогическое образование», профиль «Математика и физика».

Практикум составлен в соответствии с требованиями ФГОС ВПО Российской Федерации. В настоящее время в школьном курсе математики недостаточно внимания уделяется изучению геометрии. Поэтому при изучении курса геометрии в вузе необходимо более подробно рассмотреть вопросы элементарной геометрии, к которым и относится раздел «Геометрические преобразования».

Практикум «Геометрические преобразования» предназначен для организации аудиторной и внеаудиторной (индивидуальной и самостоятельной) работы студентов педагогического направления. В данном пособии указаны определения основных преобразований плоскости, изучаемых в школьном курсе геометрии: движений и подобий плоскости, перечислены их свойства. Для каждого вида преобразований приведены примеры решения задач с применением этих преобразований. Значительное место отведено классификации и решению основных задач с применением аналитических методов. Кроме того, пособие содержит большое количество задач для самостоятельной работы с указаниями и ответами.

ВВЕДЕНИЕ

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

Взаимно однозначное отображение множества X на себя называется *преобразованием* этого множества. В школьном курсе геометрии рассматривают множество всех точек плоскости или множество всех точек пространства и говорят о преобразовании плоскости или пространства. *Необходимым и достаточным признаком преобразования* множества X является одновременное выполнение двух условий: 1) каждый элемент множества X имеет единственный образ в этом множестве; 2) каждый элемент множества X имеет единственный прообраз в этом множестве.

Обозначим символом $G(X)$ множество всех преобразований данного множества X. Пусть f и g – два преобразования множества X (т. е. $f \in G(X)$, $g \in G(X)$) и для произвольного элемента x множества X:

$$f(x) = y,\ g(y) = z,$$

причем y и z – элементы множества X. Преобразование

$$\varphi(x) = g(f(x)) = z$$

называется *композицией* (или произведением) преобразований f и g: $\varphi(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$. Обычно преобразование, которое в композиции выполняют первым, записывается справа. Композиция является бинарной операцией на множестве $G(X)$ преобразований данного множества X.

Можно доказать, что *композиция преобразований ассоциативна,* т. е. для любых преобразований данного множества $f, g, h \in G(X)$ справедливо равенство $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Однако, за исключением частных случаев, *композиция преобразований некоммутативна.*

Преобразование E множества X называется *тождественным,* если для любого элемента x множества X: $E(x) = x$, т. е. преобразование E каждый элемент x множества X преобразует в себя.

Любое преобразование $f \in G(X)$ является биективным отображением множества X на себя, поэтому для него существует обратное отображение f^{-1}, которое также является преобразованием множества X и $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = E$. Таким образом, множество $G(X)$ всех преобразований данного множества X есть группа относительно композиции преобразований "$\circ$". Группа $G(X)$ называется *группой всех преобразований множества X.* Любая подгруппа группы $G(X)$ называется *группой преобразований множества X.* Для того чтобы непустое множество преобразований $H \subset G(X)$ являлось группой преобразований множества X, необходимо выполнение двух условий:

1) если $f \in H$, $g \in H$, то $g \circ f \in H$;
2) если $f \in H$, то $f^{-1} \in H$.

Пусть A и B – любые подмножества множества X. Можно доказать, что для любого преобразования $f \in G(X)$:

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \text{ и } f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

В дальнейшем мы рассматриваем в качестве множества X *множество точек плоскости* и группу $G(X)$ всех преобразований плоскости.

Введем несколько определений.

Точка M плоскости X называется инвариантной (или неподвижной) точкой преобразования, если она при этом преобразовании переходит в себя, т. е. $f(M) = M$.

Прямую d плоскости X назовем *инвариантной (или неподвижной) прямой преобразования f,* если любая ее точка переходит в какую-либо точку этой же прямой: $f(d) = d$.

Прямую d плоскости X назовем *прямой инвариантных точек преобразования f,* если любая ее точка инвариантна, т. е. переходит сама в себя. Очевидно, прямая инвариантных точек является инвариантной прямой преобразования, однако инвариантная прямая не обязательно состоит только из инвариантных точек.

ЧАСТЬ I

ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

Говорят, что *преобразование плоскости сохраняет расстояния,* если расстояние между любыми двумя точками A и B плоскости равно расстоянию между их образами A_1 и B_1 в данном преобразовании, т. е. $|AB| = |A_1B_1|$.

Преобразование плоскости, сохраняющее расстояния, называется *движением* (или *перемещением*).

Из определения следует, что: а) преобразование, обратное движению, есть движение; б) композиция двух движений есть движение. Таким образом, множество всех движений плоскости образует *группу движений.* Тождественное преобразование есть нейтральный элемент этой группы.

Фигура F называется *равной* фигуре F_1, если существует движение, переводящее F в F_1. Иногда удобно представлять фигуры F и F_1 как начальное и конечное положение одной и той же фигуры при перемещении. Про равные фигуры говорят также, что их можно *совместить.* Если при движении f фигура F переходит сама в себя, то говорят, что f – самосовмещение фигуры F.

Свойства движений:

1. Движение переводит прямую в прямую, а параллельные прямые – в параллельные.
2. Движение переводит полуплоскость с границей a в полуплоскость с границей a_1, где a_1 – образ прямой a.
3. Движение переводит отрезок в равный ему отрезок.
4. Движение сохраняет для трех точек одной прямой отношение «лежать между».
5. Движение переводит луч в луч, а сонаправленные лучи – в сонаправленные.
6. Движение переводит угол в равный ему угол.

Говорят, что треугольник ABC ориентирован *положительно,* если обход его вершин в порядке A, B, C происходит в направлении, *противоположном направлению движения часовой стрелки;* треугольник ABC ориентирован *отрицательно,* если обход его вершин в порядке A, B, C происходит в направлении, *совпадающем с направлением движения часовой стрелки.* Таким образом, треугольники ABC и ACB, которые геометрически не отличаются друг от друга, ориентированы противоположно.

Пусть произвольное движение плоскости f переводит треугольник ABC в треугольник $A_1B_1C_1$. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны между собой, но могут быть ориентированы по-разному. Движение плоскости f называется *движением первого рода,* если для любого треугольника ABC ориентация этого треугольника совпадает с ориентацией треугольника $A_1B_1C_1$. В противном случае движение f называется *движением второго рода.*

На плоскости рассматривают следующие виды движений: параллельный перенос, поворот вокруг точки (частный случай поворота – центральная симметрия), осевая симметрия, скользящая симметрия. При этом параллельный перенос и поворот вокруг точки являются движениями первого рода, а осевая симметрия и скользящая симметрия – движениями второго рода.

Справедливо следующее утверждение: если точки A и B различны и отрезок A_1B_1 равен отрезку AB, то на плоскости существует ровно одно движение первого рода и ровно одно движение второго рода, каждое из которых отображает точку A на точку A_1 и точку B на точку B_1.

1. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

Параллельным переносом на вектор $\vec{a}$ называется преобразование плоскости, при котором каждая точка A плоскости переходит в такую точку A_1, что вектор $\overrightarrow{AA_1}$ равен вектору $\vec{a}$. Параллельный перенос на вектор $\vec{a}$ обозначается $T_{\vec{a}}$; $T_{\vec{a}}(A) = A_1$.

Из определения следует, что параллельный перенос может быть задан парой соответствующих точек.

Свойства параллельного переноса:

1. Параллельный перенос является движением первого рода.
2. Параллельный перенос на нулевой вектор $\vec{0}$ является тождественным преобразованием: $T_{\overrightarrow{AA}} = T_{\vec{0}} = E$.
3. Преобразование, обратное параллельному переносу на вектор $\vec{a}$, есть параллельный перенос на вектор, противоположный вектору $\vec{a}$: $\left(\grave{O}_{\vec{a}}\right)^{-1} = \grave{O}_{-\vec{a}}$.
4. Композиция двух параллельных переносов есть параллельный перенос: $\grave{O}_{\vec{b}} \circ T_{\vec{a}} = T_{\vec{a}+\vec{b}}$.
5. Композиция любых двух параллельных переносов коммутативна: $\grave{O}_{\vec{b}} \circ T_{\vec{a}} = T_{\vec{a}+\vec{b}} = T_{\vec{b}+\vec{a}} = T_{\vec{a}} \circ T_{\vec{b}}$.
6. Параллельный перенос отображает любую прямую, не параллельную вектору переноса, на параллельную ей прямую.
7. Каждая прямая, параллельная вектору параллельного переноса, отображается сама на себя, т. е. является инвариантной прямой этого переноса.
8. Параллельный перенос отображает луч на сонаправленный ему луч.

Заметим, что ограниченная фигура не может переходить сама в себя при параллельном переносе.

Параллельный перенос применяют обычно тогда, когда задача связана с фигурой, содержащей параллельные прямые или отрезки. Если речь идет о параллелограмме, то чаще всего применяется параллельный перенос на вектор, совпадающий с одной из сторон, т. к. при таком переносе две вершины параллелограмма переходят в две другие его вершины (см. задачу 1). В случае, когда рассматривается трапеция, обычно применяется параллельный перенос на вектор, совпадающий с одним из оснований трапеции, т. к. при таком переносе прямые, содержащие основания, являются инвариантными прямыми. При этом стороны многоугольников считаются направленными отрезками. В задачах, связанных с многоугольниками, параллельный перенос применяют для того, чтобы сблизить элементы, не имеющие общих точек; в результате такого сближения задача обычно сводится к рассмотрению некоторого треугольника, который определен. В задачах на построение параллельный перенос применяют также для построения «ключевой» точки, которая является общей точкой данной фигуры и фигуры, полученной параллельным переносом другой данной фигуры (см. задачу 2).

Задача 1. На стороне *AB* прямоугольника *ABCD* вне его построен треугольник *ABE*. Через точки *C* и *D* проведены перпендикуляры *CM* и *DK* к прямым *AE* и *BE* соответственно. Пусть *P* – точка пересечения прямых *CM* и *DK*. Докажите, что $EP \perp AB$ (рис. 1).

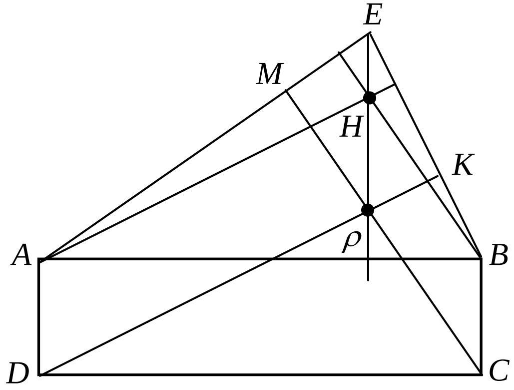

Рис. 1

Решение: Так как в данной задаче рассматриваются прямые, перпендикулярные сторонам треугольника, то имеет смысл рассмотреть также и прямые, содержащие высоты этого треугольника, т. к. прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны и, следовательно, могут переходить друг в друга при некотором параллельном переносе. В задаче требуется доказать, что прямая *EP* перпендикулярна прямой *AB*. Но т. к. из точки *E* на прямую *AB* можно опустить только один перпендикуляр, то, следовательно, нужно доказать, что точка *P* лежит на прямой, содержащей высоту треугольника *AEB*, проведенную из вершины *E*.

Пусть *H* – точка пересечения высот треугольника *ABE*. Перенос на вектор $\overrightarrow{BC}$ отображает точки *A* и *B* соответственно на точки *D* и *C*, следовательно, при этом переносе прямая *AH*, проходящая через точку *A* и перпендикулярная *BE*, отобразится на прямую *DK*, также перпендикулярную *BE* и проходящую через точку *D*; аналогично прямая *BH*, перпендикулярная *AE*, отобразится на прямую *CM*, перпендикулярную *AE*. Прямая *EH* параллельна вектору $\overrightarrow{BC}$, поэтому при данном параллельном переносе она отобразится сама на себя, причем точка *H* пересечения прямых *AH*, *BH*, *EH* отобразится в точку пересечения *P* образов этих прямых *DK*, *CM*, *EH*. Отсюда следует, что $P \in EH$ и $\overrightarrow{HP} = \overrightarrow{BC}$, а т. к. $BC \perp AB$, то и $EP \perp AB$.

Замечание. Точка пересечения прямых, содержащих высоты треугольника, называется ортоцентром треугольника. Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри его; ортоцентр прямоугольного треугольника совпадает с вершиной прямого угла; ортоцентр тупоугольного треугольника находится вне треугольника.

Задача 2. Даны окружность и две точки *A*, *B*, причем *A* – внутри, *B* – вне окружности. Построить параллелограмм *ABCD*, две вершины *C* и *D* которого лежат на данной окружности.

I. Анализ

Предположим, задача решена, параллелограмм *ABCD* удовлетворяет условию задачи. Определим положение вершин *C*, *D*. Для этого рассмотрим параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{AB}$. При указанном движении вершина *D* перейдет в вершину *C*, а окружность (O, R), на которой лежит точка *D*, перейдет в окружность (O_1, R).

Символически это можно записать следующим образом:

$$T_{\overline{AB}}:\begin{cases} D \to C \\ Окр.\,(O,\,R) \to Окр.\,(O_1,\,R) \end{cases}.$$

Но тогда по свойству движений вершина C будет лежать на *Окр.* $(O_1,\,R)$. И т. к. точка C по условию принадлежит *Окр.* $(O,\,R)$, то C есть пересечение окружностей, т. е.

$C = \text{Îêð}\ .\,(O,\,R) \cap \text{Îêð}\ .\,(O_1,\,R)$ (см. рис. 2.1).

Вершину D можно получить из вершины C с помощью параллельного переноса на вектор $\overline{BA}$, т. е. $D = T_{\overline{BA}}(C)$.

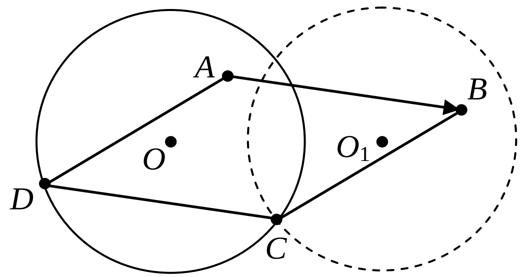

Рис. 2.1

II. Построение

1) $\overrightarrow{AB}$.

2) *Окр.* $(O_1,\,R)$; *Окр.* $(O_1,\,R) = T_{\overline{AB}}(Окр.\,(O,\,R))$.

3) C; $\tilde{N} = \text{Îêð}\ .\,(O,\,R) \cap \text{Îêð}\ .\,(O_1,\,R)$.

4) D; $D = T_{\overline{BA}}(C)$.

5) $ABCD$ – четырехугольник.

III. Доказательство

Покажем, что построенный четырехугольник $ABCD$ удовлетворяет условию задачи.

1) По построению $T_{\overline{BA}} : C \to D$, тогда по определению параллельного переноса $\overline{CD} = \overline{BA}$. И т. к. $C \notin (AB)$, то $ABCD$ – параллелограмм.

2) а) $\tilde{N} \in \text{Îêð}\ .\,(O,\,R)$ – по построению.

б) $T_{\overline{BA}}:\begin{cases} C \to D \text{ – по построению,} \\ Окр.\,(O_1,\,R) \to Окр.\,(O,\,R) \text{ – по свойству взаимно} \end{cases}$

обратных преобразований.

Но т. к. $\tilde{N} \in \text{Îêð}\ .\,(O_1,\,R)$ по построению, то по свойству движений $D \in \text{Îêð}\ .\,(O,\,R)$.

Следовательно, $ABCD$ – искомый параллелограмм.

IV. Исследование

1) Задача имеет решение, если $\text{Îêð}\ .\,(O,\,R)$ и $\text{Îêð}\ .\,(O_1,\,R)$ пересекаются или касаются (внешним образом), а это имеет место тогда и только тогда, когда расстояние между их центрами не превосходит суммы радиусов этих окружностей, т. е.

$$|OO_1| \le 2R \Leftrightarrow |AB| \le 2R.$$

Причем задача имеет два решения, если $|AB| < 2R$ и $A \notin (OO_1)$ (см. рис. 2.2), и одно решение, если $|AB| < 2R$, но $A \in (OO_1)$ (при этом получаются два равных параллелограмма, симметричных относительно (OO_1)).

Задача имеет одно решение, если $|AB| = 2R$ и $A \notin (OO_1)$ (см. рис. 2.3).

2) Задача не имеет решений, если $|AB| > 2R$ (см. рис. 2.4) или если $|AB| = 2R$ и $A \in (OO_1)$ (воспользуйтесь рис. 2.3).

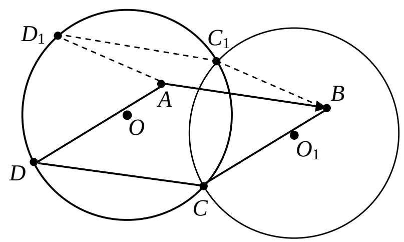

Рис. 2.2

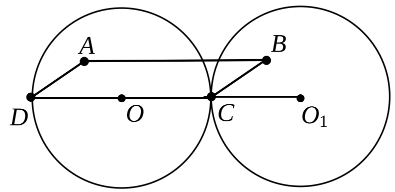

Рис 2.3

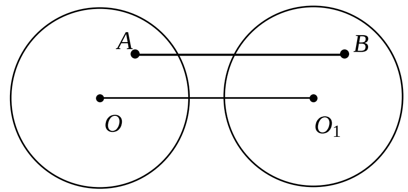

Рис 2.4

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Докажите, что многоугольник не может переходить сам в себя при параллельном переносе на ненулевой вектор.

2. Определите, в каком случае композиция двух переносов есть тождественное преобразование.

3. На стороне угла, вершина O которого недоступна, дана точка M. Постройте отрезок, равный OM.

4. Даны две параллельные прямые a и b. В каких преобразованиях переноса: а) прямая a преобразуется в прямую b; б) прямая b преобразуется в прямую a; в) прямые a и b преобразуются каждая в себя?

5. Точка M пересечения двух прямых a и b отображается в точку K, не принадлежащую данным прямым. Постройте образы прямых a и b при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{MK}$.

6. Какими свойствами должны обладать: а) два отрезка; б) два луча; в) две полуплоскости; г) две окружности, чтобы одна из этих фигур отображалась на другую при параллельном переносе. Указать вектор переноса в каждом из этих случаев.

7. Представьте данный параллельный перенос в виде композиции двух переносов на векторы, параллельные соответственно двум данным непараллельным прямым.

8. Даны две пересекающиеся прямые a и b и вектор $\vec{n}$. Найдите такие точки $\grave{A} \in \grave{a}$ и $\hat{A} \in b$, чтобы $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$.

9. Найдите в треугольнике ABC такую точку O, чтобы композиция параллельных переносов $T_{\overrightarrow{OC}} \circ T_{\overrightarrow{OB}} \circ T_{\overrightarrow{OA}}$ была тождественным преобразованием E.

10. Даны две пересекающиеся прямые d_1 и d_2. Постройте прямую a, параллельную третьей данной прямой d_3 так, чтобы данные две прямые d_1 и d_2 отсекали на прямой a отрезок, равный данному отрезку m.

11. Проведите в данной окружности хорду данной длины, параллельную данной прямой.

12. Две равные окружности пересекаются в точках M и K. Точки A и B этих окружностей принадлежат их линии центров и находятся в одной полуплоскости с границей MK. Докажите, что сумма $MK^2 + AB^2$ не зависит от расстояния между центрами окружностей.

(Указание: рассмотреть перенос, переводящий одну из окружностей в другую).

13. Две равные окружности касаются внешним образом в точке M. Хорды MA и MB этих окружностей перпендикулярны. Найдите длину отрезка AB, если радиус окружности равен r.

(Ответ: 2 r).

14. Дан квадрат $ABCD$ и внутри его точка M. Докажите, что отрезки MA, MB, MC и MD могут быть сторонами четырехугольника с перпендикулярными диагоналями.

15. Точка H – ортоцентр треугольника ABC, R – радиус описанной окружности. Докажите, что $AB^2 + CH^2 = 4R^2$.

16. Постройте трапецию по четырем ее сторонам.

17. Постройте трапецию по боковым сторонам, разности оснований и одной диагонали.

18. Постройте трапецию по разности оснований, диагонали и двум углам, прилежащим к одному основанию.

19. По разные стороны от реки с параллельными берегами находятся пункты A и B. Где нужно построить мост, чтобы путь из A в B был кратчайшим?

(Указание: рассмотреть перенос, совмещающий один берег с другим, в направлении, перпендикулярном берегам).

20. Докажите, что сумма оснований трапеции меньше суммы ее диагоналей, но больше их разности.

21. Докажите, что разность оснований трапеции больше разности боковых сторон, но меньше их суммы.

22. Докажите, что если отрезок MN, соединяющий середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$, равен полусумме сторон BC и AD, то стороны BC и AD параллельны.

(Указание: построить $D_1 = T_{\overrightarrow{BC}}(D)$ и доказать, что MN – средняя линия треугольника ABD_1).

23. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны. Докажите, что прямые AB и CD образуют равные углы с прямой, соединяющей середины сторон BC и AD.

(Указание: пусть M – середина BC, N – середина AD; построить $A_1 = T_{\overrightarrow{BM}}(A)$, $D_1 = T_{\overrightarrow{CM}}(D)$ и доказать, что MN – медиана треугольника MA_1D_1).

24. Из вершины B параллелограмма $ABCD$ проведены две его высоты BK и BH. Известно, что $KH = a$, $BD = b$. Найдите расстояние от точки B до точки пересечения высот треугольника BKH. (Ответ: $\sqrt{b^2 - a^2}$).

25. Точки M, N, P не лежат на одной прямой. Постройте параллелограмм, три вершины которого находятся в данных точках. Сколько решений имеет задача?

2. ПОВОРОТ

2.1. Поворот вокруг точки

Поворотом вокруг точки O на угол α называется преобразование плоскости, при котором точка O переходит в себя, а произвольная точка A, отличная от O, переходит в такую точку A_1, что $OA_1 = OA$ и ориентированный угол между лучами OA и OA_1 равен углу α. Точка O называется *центром поворота,* угол α – *углом поворота.* Поворот вокруг точки O на угол α обозначается R_O^{α}.

Ясно, что всегда $R_O^{\alpha+360^0} = R_{\hat{I}}^{\alpha}$, поэтому обычно предполагается, что $0^0 \le \alpha < 360^0$ либо $-180^0 < \alpha \le 180^0$.

Свойства поворота:

1. Поворот на нулевой угол есть тождественное преобразование: $R_O^{0^0} = E$.

2. Преобразование, обратное повороту, есть поворот с тем же центром на противоположный угол: $\left(R_O^{\alpha}\right)^{-1} = R_O^{-\alpha}$.

3. Композиция двух поворотов с одним и тем же центром есть поворот с тем же центром: $R_O^{\beta} \circ R_O^{\alpha} = R_O^{\alpha+\beta}$. В частности, если $\alpha + \beta = 0^o$ или $\alpha + \beta = 360^o$, то композиция есть тождественное преобразование.

4. Композиция двух поворотов с различными центрами есть поворот (если $\alpha + \beta \ne 0^o$ и $\alpha + \beta \ne 360^o$) либо параллельный перенос (если $\alpha + \beta = 0^o$ или $\alpha + \beta = 360^o$).

5. Поворот является движением первого рода.

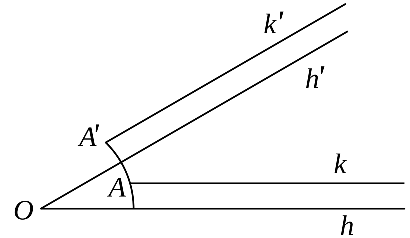

Рис. 3

6. При повороте угол между произвольным лучом и его образом равен углу поворота.

Доказательство свойства 6. В частном случае, когда начало данного луча совпадает с центром O поворота, это утверждение очевидно. Если начало луча k отлично от O, то из точки O проведем луч h, сонаправленный с лучом k (рис. 3). Так как любое движение переводит сонаправленные лучи в сонаправленные, то образы k' и h' лучей k и h тоже сонаправлены. Следовательно, угол между лучами k и k' равен углу между лучами h и h', т. е. равен углу поворота.

7. Любой правильный n-угольник при повороте около его центра на угол $\alpha = \dfrac{360^0}{n}$ отображается сам на себя.

При решении задач «методом поворота» прежде всего нужно определить, какая из известных точек может быть центром поворота.

Если в задаче рассматривается многоугольник, у которого есть две равные смежные стороны и известен угол между ними, то за центр поворота можно взять общую вершину этих сторон (см. задачу 1). В некоторых случаях применяется поворот, при котором рассматриваемая или искомая фигура переходит сама в себя (см. задачу 2). Так же, как и параллельный перенос, поворот может применяться в ситуациях, когда нужно сблизить разрозненные элементы фигур либо для построения общей точки данной фигуры и фигуры, полученной из другой данной фигуры с помощью поворота (см. задачу 3).

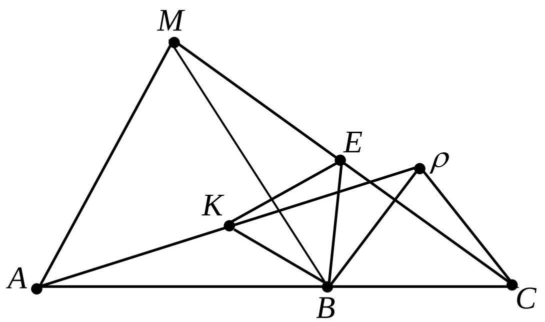

Рис. 4

Задача 1. Точка B лежит между точками A и C. В полуплоскости с границей AC построены правильные треугольники ABM и BCP. Точки K и E – середины отрезков AP и MC соответственно. Докажите, что треугольник BKE – правильный (рис. 4).

Решение: В данной задаче рассматриваются два равносторонних треугольника с общей вершиной B. Так как

$$\angle CBP = \angle MBA = 60^0,\ BA = BM,\ BP = BC,$$

то нужно применить поворот с центром в точке B на угол 60^o. Этот поворот отображает точки M и C на точки A и P соответственно. Следовательно, $R_B^{60^0}(MC) = AP$. При повороте сохраняется отношение отрезков, поэтому середина E отрезка MC отобразится в середину K отрезка AP, следовательно,

$$BE = BK \text{ и } \angle EBK = 60^0.$$

Таким образом, в треугольнике BKE угол EBK равен 60^o, кроме того, стороны BE и BK равны, значит, треугольник BKE – правильный.

Задача 2. В окружность с центром O вписаны два правильных, одинаково ориентированных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 5). Пусть A_2 – точка пересечения BC и B_1C_1, B_2 – точка пересечения AC и A_1C_1, C_2 – точка пересечения AB и A_1B_1. Докажите, что треугольник $A_2B_2C_2$ – правильный.

Решение: Так как центр окружности, описанной около правильного треугольника, является центром этого треугольника,

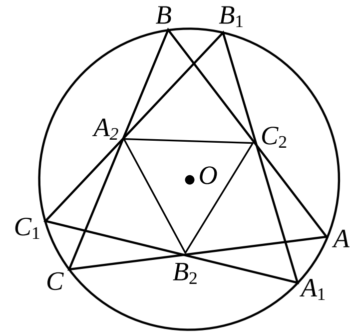

Рис. 5

то при повороте вокруг точки O на угол $\alpha = 120^o$ каждый из треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ отображается на себя. Причем

$$R_O^{120^0}: \begin{cases} A \to B, \\ B \to C, \\ C \to A, \end{cases} \text{ и } R_O^{120^0}: \begin{cases} A_1 \to B_1, \\ B_1 \to C_1, \\ C_1 \to A_1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$R_O^{120^0}: \begin{cases} A\hat{A} \to B\tilde{N}, \\ B\tilde{N} \to C\grave{A}, \\ C\grave{A} \to A\hat{A}, \end{cases} \text{ и } R_O^{120^0}: \begin{cases} A_1\hat{A}_1 \to B_1\tilde{N}_1, \\ B_1\tilde{N}_1 \to C_1\grave{A}_1, \\ C_1\grave{A}_1 \to A_1\hat{A}_1. \end{cases}$$

Так как при повороте точка пересечения прямых отображается на точку пересечения их образов, то

$$R_O^{120^0}(A_2) = B_2,\ R_O^{120^0}(B_2) = C_2,\ R_O^{120^0}(C_2) = A_2.$$

Это означает, что при повороте вокруг точки O на угол $\alpha = 120^o$ треугольник $A_2B_2C_2$ отображается сам на себя, т. е. он правильный.

Задача 3. Построить равнобедренный прямоугольный треугольник с вершиной прямого угла в данной точке A, у которого вершины острых углов лежат одна на данной прямой, а другая – на данной окружности.

I. Анализ

Предположим, $\Delta\ ABC$ удовлетворяет условию задачи, т. е. $\angle A = 90^\circ$, C лежит на *Окр.* (O, R), B – на прямой ℓ. Определим

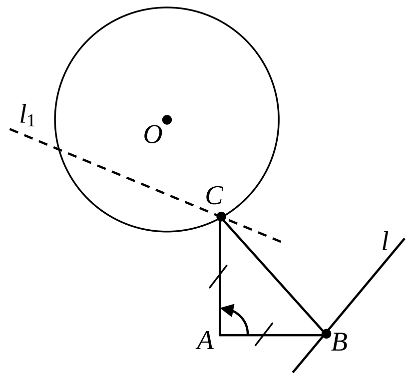

Рис. 6.1

положение вершин *B* и С. Для этого рассмотрим поворот вокруг точки *A* на 90º. $R_A^{90^\circ}:\ \begin{matrix} B \to C \\ \ell \to \ell_1 \end{matrix}$. Так как вершина *B* лежит на прямой ℓ, то по свойству движений *C* будет лежать на прямой ℓ_1 (рис. 6.1). Кроме того, *C* по условию задачи лежит на *Окр.* $(O,\,R)$. Следовательно, вершина *C* может быть получена как точка пересечения прямой ℓ_1 и *Окр.* $(O,\,R)$, а вершина *B* может быть получена из *C* при обратном преобразовании, т. е.

$$R_A^{-90^\circ}:C \to B.$$

II. Построение

1) $\ell_1;\ \ell_1 = R_A^{90^\circ}(\ell)$.
2) C; $C = \ell_1 \cap$ Îêð $.(O,\,R)$.
3) B; $B = R_A^{-90^\circ}(C)$.
4) $\Delta\ ABC$.

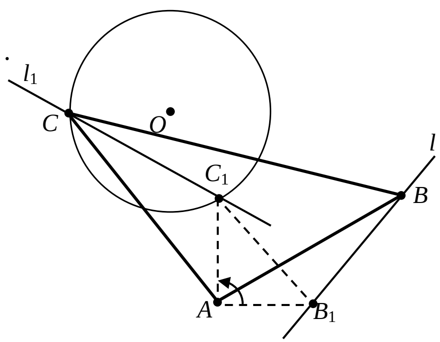

Рис. 6.2

III. Доказательство

Покажем, что построенный треугольник *ABC* удовлетворяет условию задачи.

1) По построению вершина *B* получена из *C* при повороте вокруг точки *A* на (-90°). Тогда по определению поворота

$$AB = AC,\ \angle BAC = 90^\circ,$$

и значит, $\Delta\ BAC$ – прямоугольный, равнобедренный.

2) а) Вершина *C* лежит на *Окр.* $(O,\,R)$ по построению.

б) $R_A^{-90^\circ}:\begin{cases} C \to B, \\ \ell_1 \to \ell, \end{cases}$ но т. к. *C* по построению лежит на прямой ℓ_1, то по свойству движений $B \in \ell$.

Итак, $\Delta\ ABC$ – искомый.

IV. Исследование

I. Точка *A* вне *Окр.* $(O,\,R)$, вне прямой ℓ.

1) Если прямая ℓ_1 и *Окр.* $(O,\,R)$ пересекаются, то задача имеет два решения: $\Delta\ ABC$ и $\Delta\ AB_1C_1$ (см. рис. 6.2).

2) Если прямая ℓ_1 касается *Окр.* $(O,\,R)$, то задача имеет одно решение (см. рис. 6.3).

3) Если прямая ℓ_1 и *Окр.* $(O,\,R)$ не имеют общих точек, то задача не имеет решений (см. рис. 6.4).

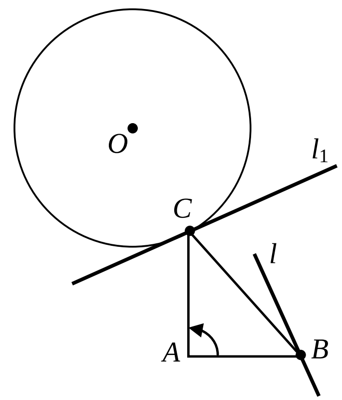

Рис 6.3

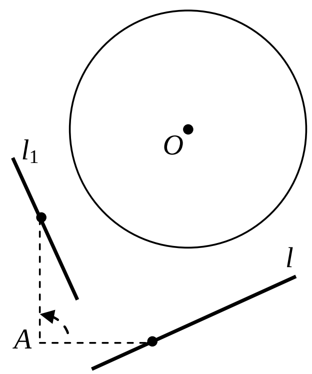

Рис 6.4

II. Точка *A* на окружности $\left(\hat{I}\ , R\right)$.

Способ построения искомого $\Delta\ ABC$ тот же (см. рис. 6.5).

III. Точка *A* на прямой ℓ (см. рис. 6.6). Проведите построение, сделайте вывод.

IV. Точка *A* внутри круга (O, R). Построение, вывод сделать самостоятельно.

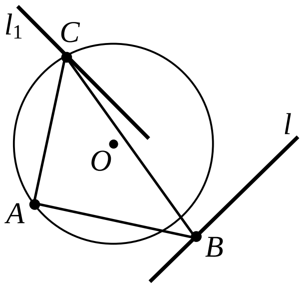

Рис 6.5

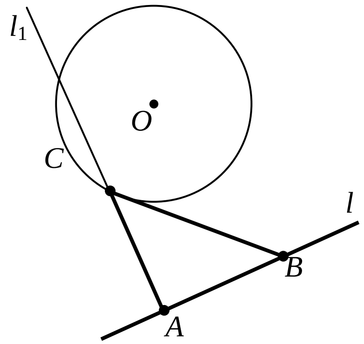

Рис 6.6

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Докажите, что композиция поворота и параллельного переноса есть поворот на тот же угол. Постройте центр полученного поворота.

2. Для двух поворотов плоскости с различными центрами постройте такую точку *M*, которая при этих поворотах преобразуется в одну и ту же точку M_1.

3. Укажите центр и угол поворота, при котором переходит сама в себя каждая из следующих фигур: а) правильный треугольник; б) квадрат; в) параллелограмм; г) прямоугольник, отличный от квадрата; д) две параллельные прямые.

4. Даны два равных отрезка *AB* и A_1B_1. Постройте центр *O* поворота, при котором точки *A* и *B* переходят в точки A_1 и B_1. Определите угол поворота. Всегда ли существует такой поворот?

5. Даны два равных непараллельных отрезка *AB* и A_1B_1. Пусть *O* – центр поворота, при котором точки *A* и *B* переходят в точки A_1 и B_1, а O_1 – центр поворота, при котором точки *A* и *B* переходят соответственно в точки B_1 и A_1. Докажите, что прямая OO_1 делит пополам отрезок, соединяющий середины отрезков *AB* и A_1B_1. Докажите, что углы этих поворотов отличаются на 180º.

6. На прямой *a* дана точка *A*, а на прямой *b* – точка *B*. Найдите повороты, при которых прямая *a* отображается на прямую *b* и точка *A* – на точку *B*.

7. Даны две равные окружности ω и ω_1 и точки $\grave{A} \in \omega,\ \hat{A} \in \omega_1$.

Найдите поворот $R_O^{\alpha} : \begin{cases} \omega \to \omega_1, \\ A \to B. \end{cases}$

8. Даны два равных одинаково ориентированных правильных треугольника. Найдите повороты, переводящие первый треугольник во второй. Как расположены центры этих поворотов?

9. Даны два равных квадрата. Докажите, что в общем случае существуют четыре поворота, преобразующие первый квадрат во второй, и центры этих поворотов лежат на одной прямой.

10. Через центр правильного треугольника проведены две прямые, угол между которыми равен 60º. Докажите, что отрезки этих прямых, заключенные внутри треугольника, равны.

11. Через центр квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые. Докажите, что точки пересечения этих прямых со сторонами квадрата являются вершинами некоторого квадрата.

12. Точки *K*, *L*, *M*, *N* принадлежат последовательно прямым *AB*, *BC*, *CD*, *DA*, содержащим стороны квадрата *ABCD*. Доказать, что если отрезки *KM* и *LN* перпендикулярны, то они равны.

13. На сторонах *AC* и *BC* треугольника *ABC* во внешнюю сторону построены правильные треугольники CAB_1 и BCA_1. Докажите, что отрезки AA_1 и BB_1 равны. Найдите угол между прямыми AA_1 и BB_1.

14. На сторонах треугольника *ABC* во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

15. На сторонах *AC* и *BC* треугольника *ABC* во внешнюю сторону построены квадраты ACA_1A_2 и BCB_1B_2: а) докажите, что отрезки AB_1 и A_1B равны и перпендикулярны; б) пусть точка *K* – середина

отрезка A_1B_1. Докажите, что отрезок *BA* перпендикулярен *CK* и длина отрезка *BA* вдвое больше длины отрезка *CK*.

16. Длина стороны квадрата *ABCD* равна 1. На сторонах *AB* и *AD* выбраны точки *P* и *Q* так, что периметр треугольника *APQ* равен 2. Докажите, что $\angle PCQ = 45^{\circ}$.

17. Внутри квадрата *ABCD* взята произвольная точка *P*. Из вершины *A* опущен перпендикуляр на прямую *BP*, из вершины *B* – на прямую *CP*, из вершины *C* – на прямую *DP*, из вершины *D* – на прямую *AP*. Докажите, что все четыре перпендикуляра (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

18. Теорема Помпею: а) доказать, что если в плоскости правильного треугольника *ABC* взята произвольная точка *M*, не принадлежащая описанной около треугольника *ABC* окружности, то отрезки *AM*, *BM*, *CM* могут служить сторонами некоторого треугольника; б) доказать, что для любой точки *M* окружности, описанной около правильного треугольника *ABC*, один из трех отрезков *AM*, *BM*, *CM* равен сумме двух других.

(Указание: рассмотреть поворот точки *M* на 60° вокруг одной из вершин треугольника *ABC*).

19. Внутри правильного треугольника *ABC* лежит точка *M*. Известно, что $\angle AMB = 113^{\circ}$, $\angle BMC = 123^{\circ}$. Найдите углы треугольника, стороны которого равны отрезкам *AM*, *BM*, *CM*.

(Указание: построить $M_1 = R_B^{60^0}(M)$ и рассмотреть треугольник CMM_1. Ответ: 53°, 63°, 64°).

20. Внутри правильного треугольника *ABC* взята точка *M* такая, что $AM = 1$, $BM = \sqrt{3}$, $CM = 2$. Найдите длину стороны *AB* и углы *AMB*, *BMC*. (Ответ: $\sqrt{7}$; 150°; 90°).

21. Дан правильный треугольник *ABC*. Внутри угла *ACB* взята точка *M* такая, что $AM = \sqrt{2}$, $BM = 2$, $\angle AMC = 15^0$. Найдите расстояние *CM*.

(Указание: выполнить поворот на угол α, $|\alpha| = 60^0$, вокруг вершины *A*. Ответ: $\sqrt{3} + 1$).

22. Дан ромб *ABCD*, угол *A* которого равен 120°. Внутри ромба взята такая точка *M*, что $AM = 1$, $BM = 3$, $CM = 2$. Найдите длины *AB* и *DM*.

(Указание: выполнить поворот на угол α, $|\alpha| = 60^0$, вокруг вершины *A* или вершины *C*. Ответ: $\sqrt{7}$, $\sqrt{3}$).

23. Дан прямоугольный равнобедренный треугольник *ABC* с прямым углом при вершине *C*. Внутри него взята точка *M* такая, что $BM = \sqrt{2}$, $AM = 2$, $CM = 1$. Найдите длину *CA* и углы *AMB*, *CMA*.

(Ответ: $\sqrt{5}$, 135°, 90°).

24. Дан прямоугольный равнобедренный треугольник *ABC* с прямым углом при вершине *C*. Вне треугольника, внутри угла *ABC*, взята точка *M* такая, что $AM = \sqrt{2}$, $CM = 1$, $\angle AMC = 135^0$. Найдите длину *BM*.

(Ответ: $2\sqrt{2}$).

25. Найдите точку, сумма расстояний которой от вершин данного треугольника была бы наименьшей. Рассмотреть два случая:

а) в треугольнике каждый угол меньше 120°

(Указание: рассмотреть поворот на угол α, $|\alpha| = 60^0$, с центром в одной из вершин треугольника);

б) в треугольнике один из углов не меньше 120°.

26. Даны две параллельные прямые *a* и *b* и точка *C*, не принадлежащая этим прямым. Постройте правильный треугольник *ABC* так, чтобы $\hat{A} \in \grave{a}$, $\hat{A} \in b$.

27. Даны две параллельные прямые *a* и *b* и точка *C*. Постройте прямоугольный равнобедренный треугольник *ABC* так, чтобы $\hat{A} \in \grave{a}$, $\hat{A} \in b$ и $\angle C = 90^0$.

28. Постройте квадрат, две смежные вершины которого принадлежат двум данным окружностям, а диагонали пересекаются в данной точке.

29. Постройте квадрат *ABCD*, если известно, что его вершина *B* находится в данной точке, а вершины *A* и *C* принадлежат двум данным окружностям.

30. Постройте правильный треугольник *ABC* по его центру *O* и точкам *M* и *N*, принадлежащим прямым *AB* и *BC* соответственно.

31. Постройте правильный шестиугольник *ABCDEF* по его центру *O* и точкам *M* и *N*, принадлежащим прямым: а) *AB* и *BC* соответственно; б) *AB* и *CD* соответственно.

2.2. Центральная симметрия

Точки A и A_1 называются *симметричными* относительно точки O, если O – середина отрезка AA_1. *Центральная симметрия с центром O* – это преобразование, переводящее любую точку A в точку A_1, симметричную точке A относительно точки O. На плоскости центральная симметрия есть поворот вокруг точки O на угол $\alpha = 180^{\circ}$. Обозначается центральная симметрия символом: Z_O. Симметрию с центром в точке O называют также *отражением от точки O.*

Свойства центральной симметрии:

1. Центральная симметрия – это преобразование, обратное самому себе: $(Z_O)^{-1} = Z_O$. Отсюда непосредственно следует, что композиция двух симметрий с одним и тем же центром есть тождественное преобразование: $Z_O \circ Z_O = E$.

2. Композиция двух центральных симметрий с различными центрами O_1 и O_2 есть параллельный перенос на вектор $\vec{a} = 2\overrightarrow{\hat{I}_1\hat{I}_2}$.

3. Любая прямая, проходящая через центр симметрии, есть инвариантная прямая преобразования.

4. При центральной симметрии прямая, не проходящая через центр симметрии, отображается на параллельную ей прямую.

Если при симметрии относительно точки O фигура F отображается на себя, то говорят, что точка O – *центр симметрии фигуры F.* Правильный многоугольник с четным числом сторон имеет центр симметрии – это точка пересечения его больших диагоналей. Центром симметрии параллелограмма является точка пересечения его диагоналей. Пара пересекающихся прямых симметрична относительно точки пересечения этих прямых. Прямая имеет бесконечно много центров симметрии – она симметрична относительно каждой своей точки.

Центральная симметрия обычно используется в тех случаях, когда известна точка, являющаяся серединой какого-либо отрезка.

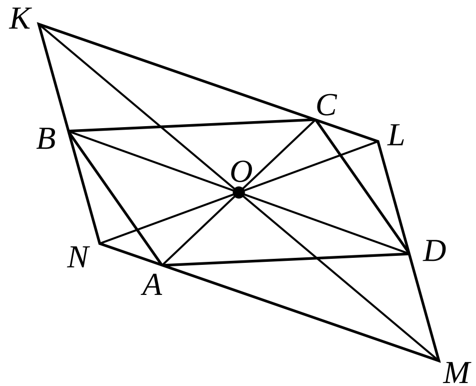

Рис. 7

Задача 1. Вершины параллелограмма $ABCD$ лежат на сторонах другого параллелограмма $MNKL$ (рис. 7). Доказать, что эти параллелограммы имеют общий центр.

Решение: Пусть диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки A и C симметричны относительно O, следовательно, параллельные прямые KL и MN, содержащие эти точки, также симметричны относительно O. Аналогично можно показать, что $Z_O\,(KN) = ML$. Точка K пересечения прямых KL и KN отображается в точку пересечения симметричных им соответственно прямых MN и ML, т. е. $M = Z_O\,(K)$. Аналогично доказывается, что вершины L и N также симметричны относительно точки O, следовательно, O – центр параллелограмма $MNKL$.

Задача 2. Через точку пересечения двух окружностей проведите секущую, определяющую в этих окружностях равные хорды.

I. Анализ

Предположим, задача решена, точка A пересечения данных окружностей (O, R) и (O_1, r) определяет в этих окружностях равные хорды $[CA]$, $[AB]$, лежащие на одной секущей ℓ.

$$B \in \hat{I}\hat{e}\eth\ .(O_1, r),\ C \in \hat{I}\hat{e}\eth\ .(O, R).$$

Определим положение точек B, C на окружностях. Для этого рассмотрим центральную симметрию с центром A.

$$Z_A:\begin{matrix} B\to C \\ \text{Îêð}.\,(O_1, r)\to \text{Îêð}.\,(O_1', r)\end{matrix}.$$

Так как по условию задачи точка *B* лежит на *Окр.* (O_1, r), то по свойству движений точка *C* будет лежать на *Окр.* (O_1', r). Но по условию задачи С лежит на *Окр.* (O, R). Следовательно,

$$\tilde{N} = \text{Îêð}.\,(O_1', r)\cap \text{Îêð}.\,(\hat{I}\ , R),$$

а точка *B* может быть получена из С при обратном преобразовании, т. е. $B = Z_A(C)$ (см. рис. 8.1).

II. Построение

1) *Окр.* (O_1', r); $Z_A : \text{Îêð}.\,(O_1, r)\to \text{Îêð}.\,(O_1', r)$.

2) *C*; $\tilde{N} = \text{Îêð}.\,(O_1', r)\cap \text{Îêð}.\,(O, R)$.

3) *B*; $B = Z_A(C)$.

4) $(CB) = \ell$; $[CB]$. (см. рис. 8.1).

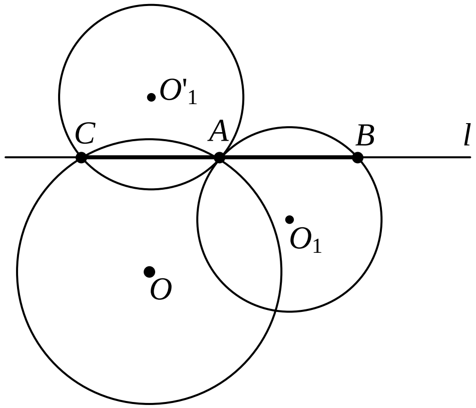

Рис. 8.1

III. Доказательство

1) По построению $Z_A : C\to B$, откуда по определению центральной симметрии следует, что точки *A*, *C*, *B* лежат на одной

прямой ℓ, причем *A* – середина отрезка $[CB]$, т. е. *A* – общий конец равных хорд $[CA]$, $[AB]$ данных окружностей.

2) а) $\tilde{N}\in \text{Îêð}.\,(O, R)$ по построению.

б) $Z_A : \begin{cases} C\to B \text{ – по построению,} \\ \text{Окр.}\,(O_1', r)\to \text{Окр.}\,(O, r) \text{ – по свойству взаимно}\end{cases}$ обратных преобразований.

Так как $\tilde{N}\in \text{Îêð}.\,(O_1', r)$, то по свойству движений

$$B\in \text{Îêð}.\,(O_1, r).$$

Следовательно, ℓ – искомая секущая.

IV. Исследование

Задача всегда имеет решения. Две секущие: ℓ_1, которая высекает равные хорды $[AC]$ и $[AB]$ на двух данных окружностях (O, R) и (O_1, r); и ℓ_2, которая высекает равные хорды $[A_1C_1]$ и $[A_1B_1]$ на этих окружностях. ℓ_1 и ℓ_2 симметричны относительно линии центров (OO_1) (см. рис. 8.2). Очевидно, и секущая $(AA_1) = \ell_3$ удовлетворяет условию задачи (см. рис. 8.2).

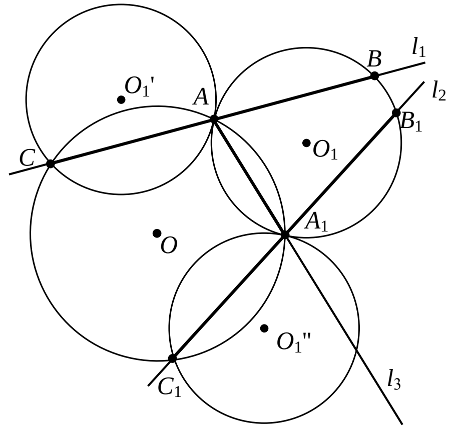

Рис. 8.2

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Докажите, что композиция двух центральных симметрий с различными центрами есть параллельный перенос.

2. Докажите, что композиция четного числа центральных симметрий есть параллельный перенос или тождественное преобразование. Постройте вектор этого переноса.

3. Докажите, что композиция трех центральных симметрий есть центральная симметрия, и постройте ее центр.

4. Докажите, что композиция центральной симметрии и параллельного переноса есть центральная симметрия, и постройте ее центр. Будет ли эта композиция перестановочна?

5. Докажите, что композиция нечетного числа центральных симметрий есть центральная симметрия.

6. Даны три точки A, B, C. Постройте центры симметрий, являющихся композициями трех симметрий с центрами в данных точках при различных последовательностях выполнения указанных симметрий.

7. Точка M отражается последовательно от вершин A, B, C треугольника и после отражений занимает положение M_1. Докажите, что середина отрезка MM_1 есть точка, не зависящая от выбора точки M.

8. Точка M отражается последовательно от точек A, B, C, A, B, C. Докажите, что в результате этих отражений точка M преобразуется в себя.

9. Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Постройте параллелограмм, три вершины которого находятся в данных точках. Сколько решений имеет задача?

10. Дан угол с недоступной вершиной A и точкой M внутри его. Постройте доступную часть прямой AM.

11. Два равных отрезка лежат на параллельных прямых. Постройте центр симметрии, отображающей один из отрезков на другой.

12. Даны две пересекающиеся прямые a и b и точка O, не принадлежащая им. Постройте параллелограмм с центром в точке O, две стороны которого принадлежат прямым a и b.

13. Верно ли утверждение, что наличие у четырехугольника центра симметрии является необходимым и достаточным условием того, что этот четырехугольник есть параллелограмм?

14. Даны две прямые a и b и точка O. Постройте точки $A \in a$, $B \in b$, симметричные относительно точки O.

15. Даны три точки A, B, O, не лежащие на одной прямой. Проведите две прямые a и b, симметричные друг другу относительно точки O так, чтобы À ∈ à, Â ∈ b.

16. Даны точка O, окружность ω и прямая a. Постройте отрезок AB с серединой в точке O так, чтобы À ∈ à, Â ∈ ω.

17. Даны две окружности и точка. Проведите через данную точку секущую так, чтобы ее отрезок с концами на данных окружностях делился данной точкой пополам.

18. Постройте параллелограмм, две противоположные вершины которого находились бы в данных точках A и C, а две другие – на двух данных окружностях.

19. Даны три точки K, M, O, не лежащие на одной прямой. Постройте квадрат с центром в точке O так, чтобы точки K и M принадлежали его противоположным сторонам.

20. На сторонах параллелограмма вне его построены правильные треугольники. Докажите, что центры этих треугольников являются вершинами параллелограмма.

21. Через точки, которые делят медианы треугольника в отношении $1:2$ считая от вершин, проведены прямые, параллельные соответственным сторонам данного треугольника. Докажите, что треугольник с вершинами в точках пересечения этих прямых равен данному треугольнику.

22. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1, пересекающиеся в точке M. Точки A_2, B_2, C_2 – середины отрезков AM, BM, CM соответственно. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.

23. В треугольник вписана окружность, к которой проведены касательные, параллельные сторонам треугольника. Докажите, что противоположные стороны образовавшегося шестиугольника равны. В каком случае этот шестиугольник является правильным?

24. Точка O – центр параллелограмма $ABCD$. Докажите, что центры окружностей, вписанных в треугольники AOB, BOC, COD и DOA, являются вершинами ромба. В каком случае этот ромб будет квадратом?

25. Дан параллелограмм *ABCD* и произвольная точка *M*. Через вершины *A*, *B*, *C*, *D* проведены прямые, параллельные соответственно прямым *MC*, *MD*, *MA*, *MB*. Докажите, что построенные прямые пересекаются в одной точке.

26. Докажите, что точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно середин его сторон, лежат на описанной около треугольника окружности.

27. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника, и отрезок с концами в серединах его диагоналей пересекаются в одной точке.

28. Противоположные стороны восьмиугольника попарно параллельны и равны. Докажите, что восьмиугольник имеет центр симметрии. Является ли он правильным?

29. Даны две параллельные прямые и точка *O* – их центр симметрии. Докажите, что в любом прямоугольном треугольнике *AOB*, вершины *A* и *B* острых углов которого принадлежат данным прямым, длина высоты, опущенной на гипотенузу, равна половине расстояния между данными прямыми.

(Указание: построить $\grave{A}_1 = Z_O(A),\ B_1 = Z_O(B)$ и рассмотреть четырехугольник ABA_1B_1).

30. Через точку, данную внутри угла, проведите прямую, отсекающую от этого угла треугольник с наименьшей площадью.

31. Могут ли иметь центр симметрии следующие фигуры: а) треугольник; б) четырехугольник; в) пятиугольник. Сделать общий вывод о наличии центра симметрии у многоугольника.

3. ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ

Точки *A* и A_1 называются *симметричными* относительно прямой *l*, если *l* – серединный перпендикуляр к отрезку AA_1. *Осевая симметрия с осью l* – это преобразование, переводящее любую точку *A* в точку A_1, симметричную точке *A* относительно прямой *l*. Точки прямой *l* остаются при этом преобразовании неподвижными. Обозначается осевая симметрия символом: S_l. Симметрию относительно оси *l* называют также *отражением от прямой l.*

Свойства осевой симметрии:

1. Осевая симметрия – это преобразование, обратное самому себе: $(S_l)^{-1} = S_l$. Отсюда непосредственно следует, что композиция двух симметрий с одной и той же осью есть тождественное преобразование: $S_l \circ S_l = E$.
2. Осевая симметрия есть движение второго рода.
3. Любая прямая, перпендикулярная оси симметрии, является инвариантной прямой.
4. Две прямые, симметричные друг другу относительно оси *l*, либо пересекаются в точке, принадлежащей оси *l*, либо параллельны оси *l*.

Если при симметрии относительно оси *l* фигура *F* отображается на себя, то говорят, что прямая *l* – *ось симметрии фигуры F*. Говорят также, что фигура *F* симметрична относительно оси *l*. Из школьного курса геометрии известно, что прямая, содержащая биссектрису угла, является осью симметрии этого угла. Правильный *n*-угольник имеет *n* осей симметрии, все они пересекаются в его центре. Осью симметрии окружности является любая прямая, проходящая через ее центр.

Осевая симметрия играет ведущую роль среди различных видов движений. Справедлива следующая теорема:

Теорема. Любое движение плоскости может быть получено с помощью не более чем трех осевых симметрий.

Можно доказать, что движения первого рода получаются с помощью композиции двух осевых симметрий, а композиция трех осевых симметрий есть движение второго рода.

Задача 1. Точки *M* и *K* симметричны вершине *C* треугольника *ABC* относительно прямых, содержащих биссектрисы его углов *A* и *B* соответственно. Докажите, что точка *P* касания вписанной в треугольник *ABC* окружности со стороной *AB* является серединой отрезка *MK*.

Решение: Пусть *O* – центр окружности, вписанной в треугольник *ABC*, *D* и *E* – точки касания этой окружности со сторонами *BC* и *AC* соответственно (рис. 9). Прямая *AO* содержит биссектрису

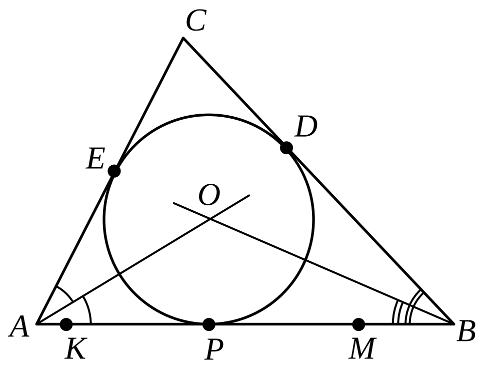

Рис. 9

угла BAC и, следовательно, является осью симметрии угла BAC и окружности. Значит, точки E и P симметричны относительно прямой AO, поэтому $S_{AO}(EC) = PM$, т. е. $EC = PM$. Аналогично точки D и P симметричны относительно прямой BO, следовательно, $DC = PK$. Но $EC = DC$ (как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки), поэтому $PM = EC = DC = PK$, то есть P – середина отрезка MK.

Задача 2. Даны прямая ℓ, точка M и окружность γ по одну сторону от прямой ℓ. Найти на прямой ℓ такую точку P, чтобы сумма $|MP|+|PK|$, где PK – касательная к окружности γ, была наименьшей.

I. Анализ

Предположим, что задача решена и P – искомая точка на прямой ℓ, т. е. $|MP|+|PK|$ – наименьшая сумма, где PK – касательная к *Окр.* γ. Определим положение искомой точки P на прямой ℓ. Для этого рассмотрим осевую симметрию относительно оси ℓ (рис. 10.1).

$$S_\ell : \begin{cases} M \to M' \\ P \to P \end{cases},$$

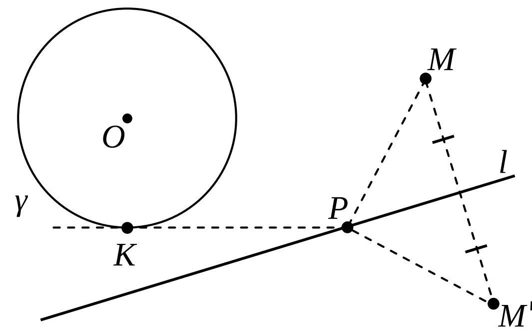

Рис. 10.1

тогда $|PM'| = |PM|$ и сумма $|MP|+|PK| = |M'P|+|PK|$ – наименьшая (см. рис. 10.1). Но точки M', K лежат по разные стороны от данной прямой ℓ, и значит, $|M'P|+|PK|$ – наименьшая сумма расстояний тогда и только тогда, когда точки M', P, K лежат на одной прямой, где (PK) – касательная к окружности γ. Откуда следует, что P есть точка пересечения прямых ℓ и $(M'K)$, причем $(M'K)$ – касательная к *Окр.* γ.

II. Построение

1) M'; $M' = S_\ell(M)$.

2) $(M'K)$; где $(M'K)$ – касательная к *Окр.* γ; K – точка касания *Окр.* γ и $(M'K)$.

3) P; $P = \ell \cap (M'K)$; $[MP]$ (рис. 10.2).

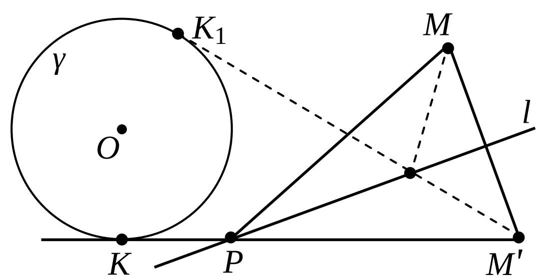

Рис. 10.2

III. Доказательство

1) Точки *K*, *P*, M' лежат на одной прямой по построению, следовательно, сумма расстояний $|KP|+|PM'|$ – наименьшая из всех сумм расстояний $|KP|+|PM'|$ для точек *P* прямой ℓ, лежащих между точками *K* и *M*.

2) $S_\ell: \begin{cases} M \to M' \text{ – по построению,} \\ P \to P, \text{ т. к. } P \in \ell \text{ по построению.} \end{cases}$

Тогда $|PM|=|PM'|$, и значит, сумма $|PK|+|PM|=|KP|+|PM'|$ – наименьшая.

3) Прямая $(M'K)$ – касательная к *Окр. γ* по построению, $P \in (M'K)$, следовательно, (PK) – касательная к *Окр. γ* в точке *K*.

Итак, *P* – искомая точка на прямой ℓ.

IV. Исследование

По условию точка *M* не лежит на прямой ℓ, и окружность *γ* не имеет общих точек с прямой ℓ.

1) Пусть *M* вне круга *γ*. Тогда задача всегда имеет два решения (см. рис. 10.2), т. к. *Окр. γ* и точка M' расположены по разные стороны от ℓ, а из точки вне окружности всегда можно провести две касательные к этой окружности.

2) Пусть *M* лежит на *Окр. γ*. Тогда M' и *Окр. γ* – по разные стороны от прямой ℓ, и значит, построение то же и задача имеет 2 решения (см. рис. 10.3).

3) Пусть *M* лежит внутри круга *γ* (см. рис. 10.4). Сделайте вывод самостоятельно.

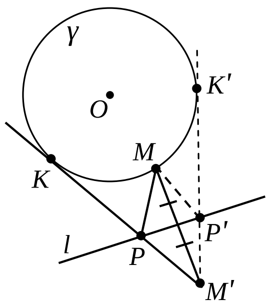

Рис 10.3

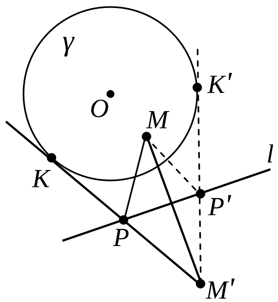

Рис 10.4

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Сколько осей симметрии имеют следующие фигуры: а) пара пересекающихся прямых; б) пара параллельных прямых; в) пара точек; г) точка и прямая; д) ромб?
2. Сколько осей симметрии имеют следующие фигуры: а) окружность; б) окружность и точка; в) окружность и прямая; г) две окружности?
3. Сколькими парами соответствующих точек задается осевая симметрия?
4. При каких условиях два луча будут симметричными друг другу относительно некоторой оси?
5. Фигура состоит из нескольких прямых, пересекающихся в одной точке. Как должны быть расположены эти прямые, чтобы фигура была симметрична относительно каждой из этих прямых.
6. Определить вид четырехугольника, который имеет: а) ровно одну ось симметрии; б) ровно две оси симметрии; в) более двух осей симметрии. Может ли четырехугольник иметь ровно три оси симметрии?
7. Может ли пятиугольник иметь ровно две оси симметрии?
8. Докажите, что в равнобедренной трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.
9. Докажите, что композиция двух осевых симметрий с параллельными осями есть параллельный перенос.
10. Докажите, что композиция двух осевых симметрий с пересекающимися осями есть поворот. В каком случае получится центральная симметрия?
11. Докажите, что всякий перенос на ненулевой вектор можно представить композицией двух осевых симметрий с параллельными осями, перпендикулярными направлению переноса. Будет ли такое представление единственным?
12. Докажите, что всякий поворот можно представить композицией двух осевых симметрий с осями, пересекающимися в центре поворота. Будет ли такое представление единственным?
13. Представить данную центральную симметрию композицией двух осевых симметрий. Будет ли такое представление единственным?

14. Докажите, что композиция трех осевых симметрий, оси которых параллельны, есть осевая симметрия. Постройте ось этой симметрии.

15. Докажите, что композиция трех осевых симметрий, оси которых пересекаются в одной точке, есть осевая симметрия. Постройте ось этой симметрии.

16. Известно, что правильный многоугольник симметричен относительно двух прямых, пересекающихся под углом 45^{o}, и одна из его вершин принадлежит одной из этих прямых. Сколько сторон может иметь этот многоугольник?

17. Даны две точки A и B и прямая l, пересекающая отрезок AB. Найдите на прямой l такую точку C, чтобы биссектриса угла ACB принадлежала прямой l.

18. Через данную точку проведите прямую, пересекающую две данные непараллельные прямые под равными углами.

19. Даны прямая l и две точки A и B, не принадлежащие прямой l. Постройте такую точку $\tilde{N} \in l$, чтобы сумма длин отрезков AC и BC была наименьшей.

20. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отложены равные отрезки AM и CN. Докажите, что точка пересечения прямых CM и AN лежит на биссектрисе BK треугольника.

21. Даны прямая l и две точки A и B по одну сторону от нее. Найдите на прямой l такую точку C, чтобы периметр треугольника ABC был наименьшим.

22. Докажите, что из всех треугольников с данным основанием и высотой равнобедренный имеет наименьший периметр.

23. На прямоугольном бильярде даны два шара M и N. В каком направлении надо толкнуть шар M, чтобы он, отразившись от бортов AB и BC, попал в шар N?

(Указание: воспользоваться принципом «угол падения равен углу отражения» и рассмотреть композицию симметрий с осями AB и BC).

24. На плоскости даны две пересекающиеся прямые a и b и прямая l. Постройте прямую, перпендикулярную l и пересекающую прямые a и b в точках, равноудаленных от l.

25. Даны две окружности ω и ω_1 и прямая l. Постройте квадрат так, чтобы две его противоположные вершины лежали на данных окружностях, а две другие – на данной прямой.

26. В четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой угла BAD и $AB \neq AD$. Постройте четырехугольник $ABCD$, если известны длины всех его сторон.

27. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и сумме двух других сторон.

28. Точки M, N, P не лежат на одной прямой. Постройте равнобедренную трапецию, три вершины которой находятся в данных точках. Сколько решений имеет задача?

29. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Докажите, что прямая O_1O_2 перпендикулярна к отрезку AB и делит его пополам.

30. Докажите, что точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно прямых, содержащих стороны этого треугольника, лежат на описанной около треугольника окружности.

31. Докажите, что если H – ортоцентр треугольника ABC, то окружности, описанные около треугольников HAB, HBC, HCA, равны.

4. СКОЛЬЗЯЩАЯ СИММЕТРИЯ

Скользящей симметрией называется композиция осевой симметрии S_l и параллельного переноса $\grave{O}_{\vec{a}}$, задаваемого вектором, параллельным оси симметрии: $\vec{a} \| l$. Скользящая симметрия с осью l и вектором $\vec{a}$ обозначается $S_{l,\vec{a}}$, таким образом, $T_{\vec{a}} \circ S_l = S_{l,\vec{a}}$. Скользящую симметрию называют также *переносной симметрией*.

Свойства скользящей симметрии:

1. Скользящая симметрия есть движение второго рода.

2. Движение, обратное скользящей симметрии, есть скользящая симметрия с той же осью, но с противоположным вектором: $\left(S_{l,\vec{a}}\right)^{-1} = S_{l,(-\vec{a})}$.

3. Скользящая симметрия не имеет неподвижных точек. Ось – единственная инвариантная прямая скользящей симметрии.

4. Ось скользящей симметрии делит пополам всякий отрезок, который соединяет точку, не принадлежащую оси, с ее образом.

5. Вектор $\vec{a}$ скользящей симметрии определяется ортогональными проекциями B и B_1 точки A и ее образа A_1 на ось симметрии: $\vec{a} = \overrightarrow{BB_1}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Докажите, что в скользящей симметрии осевая симметрия и параллельный перенос перестановочны.
2. Докажите, что композиция $S_l \circ Z_O$ есть скользящая симметрия, если $O \notin l$.
3. Определите, каким преобразованием является композиция $S_l \circ Z_O$, если $O \in l$.
4. Докажите, что композиция двух скользящих симметрий с параллельными осями есть параллельный перенос.
5. Докажите, что композиция трех осевых симметрий с осями, не проходящими через одну точку, среди которых есть непараллельные, является скользящей симметрией.
6. Даны два равных отрезка AB и A_1B_1. Построить ось и вектор скользящей симметрии, преобразующей A в A_1, B в B_1.
7. Даны два равных отрезка AB и CD. Пусть $S_{l,\vec{a}} : \begin{cases} A \to C, \\ B \to D, \end{cases}$ и $S_{m,\vec{b}} : \begin{cases} A \to D, \\ B \to C. \end{cases}$ Докажите, что: а) оси этих скользящих симметрий перпендикулярны; б) композиция этих скользящих симметрий есть центральная симметрия.

5. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ

5.1. Основная теорема о задании движений

Каковы бы ни были два ортонормированных репера R, R', существует единственное движение f плоскости, переводящее репер R в репер R'. При этом точка $M(x, y)$ в репере R переходит в точку $M'(x, y)$ в репере R'.

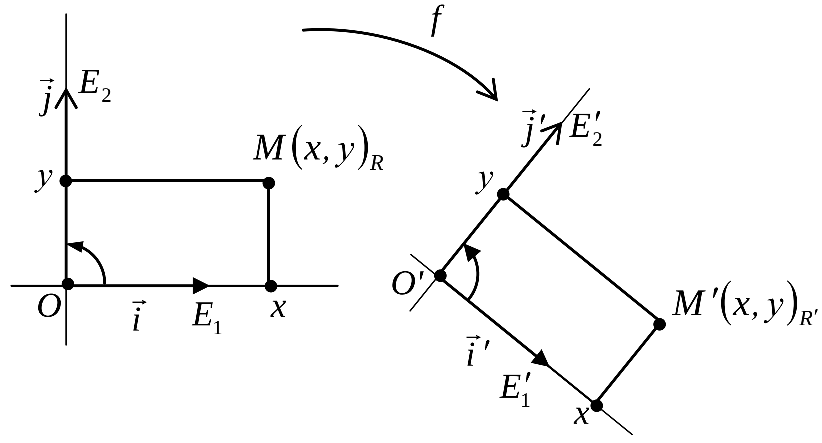

Рис. 11

Символическая запись:

$$R = \left\{ O, \overline{OE_1}, \overline{OE_2} \right\},\ R' = \left\{ O', \overline{O'E_1'}, \overline{O'E_2'} \right\}$$

$$f : \begin{cases} R \to R', \\ O \to O', \\ E_1 \to E_1', \\ E_2 \to E_2', \\ M \to M', \end{cases} \quad \text{или} \quad f : \begin{cases} R \to R', \\ O \to O', \\ \bar{i} \to \bar{i}', \\ \bar{j} \to \bar{j}', \\ M(x, y) \to M'(x, y). \end{cases}$$

5.2. Уравнение движения

Основная теорема о задании движений позволяет получить уравнение движения плоскости.

Пусть f – движение. Зададим на плоскости ПДСК.

Возьмем произвольную точку M и подействуем на нее движением f.

$$f: M(x,y)_R \to M'(x',y')_R.$$

Установим зависимость между координатами образа M' и его прообраза – M.

По основной теореме о задании движений движение f переводит репер R в равный ему репер R', а точку $M\,(x,y)_R$ – в точку $M'\,(x,y)_{R'}$ с теми же самыми координатами:

$$f: \begin{cases} R \to R', \\ M(x,y)_R \to M'(x,y)_{R'}. \end{cases}$$

Задача составления уравнения движения f свелась к задаче установления зависимости между координатами одной и той же точки M' в старой R и новой R' системах координат ($M'(x,y)_{R'}$, $M'(x',y')_R$, см. рис. 12). При этом старые координаты выражаются через новые по формулам

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - \xi\, y\sin\alpha + x_0, \\ y' = x\sin\alpha + \xi\, y\cos\alpha + y_0, \end{cases}$$

где $O'(x_0,y_0)_R$, $\angle\alpha = \angle\left(\bar{i}, \bar{i}'\right)$, а $\xi = 1$, если R и R' ориентированы одинаково и $\xi = -1$, если R и R' ориентированы противоположно.

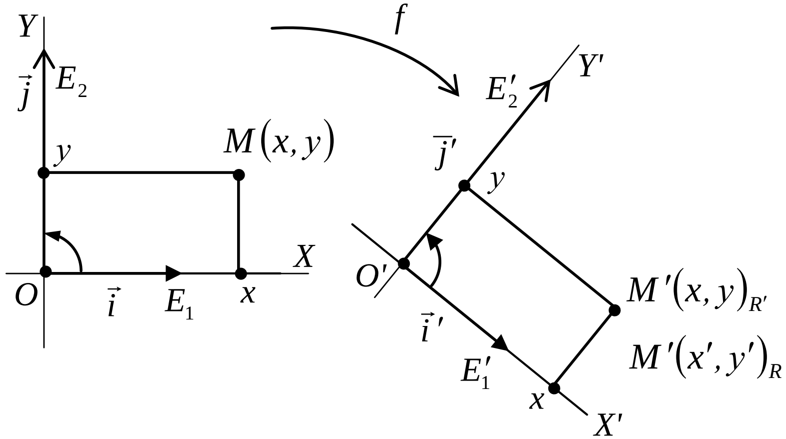

Рис. 12

Таким образом,

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + x_0, \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + y_0 \end{cases}$$ – уравнение движения первого рода;

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha + x_0, \\ y' = x\sin\alpha - y\cos\alpha + y_0 \end{cases}$$ – уравнение движения второго рода,

где матрицы $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ уравнений движений – ортогональные. В самом деле, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, а $\cos\alpha(\mp\sin\alpha) \pm \sin\alpha\cos\alpha = 0$.

Имеет место и обратное утверждение.

Если аналитическое выражение отображения f в ортонормированном репере R имеет вид

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + x_0, \\ y' = a_2x + b_2y + y_0, \end{cases}$$

где матрица $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ – ортогональная, то f – движение. При этом, если определитель Δ матрицы равен единице, то f – движение первого рода, а если $\Delta = -1$, то f – движение второго рода.

Вид движения определяется по количеству неподвижных точек (см. таблицу на с. 44).

Движения I рода				
вид движения		количество неподвижных точек		неподвижные прямые
1) Параллельные переносы	$\overline{a} = \overline{0}$	Каждая точка плоскости		Всякая прямая плоскости
	$\overline{a} \neq \overline{0}$	Нет неподвижных точек		Прямые, параллельные $\overline{a}$
2) Повороты	$\alpha = 0$	Каждая точка плоскости		Всякая прямая плоскости
	$\alpha \neq 0$	Одна – центр поворота	$\alpha \neq \pi$	Нет неподвижных прямых
(центральные симметрии)			$\alpha = \pi$	Всякая прямая, проходящая через центр симметрии
Движения II рода				
вид движения		количество неподвижных точек		неподвижные прямые
3) Осевые симметрии		Каждая точка оси симметрии		Ось симметрии; каждая прямая, перпендикулярная оси симметрии
4) Скользящие симметрии		Нет неподвижных точек		Ось симметрии

5.3. Основные типовые задачи

***I тип.* Определить вид движения по его уравнению. Указать элементы, его определяющие.**

Задача 1. Показать, что отображение, заданное уравнением, является движением. Определить его вид и указать элементы, его определяющие.

$$f:\begin{cases} x' = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{\sqrt{15}}{4}y + 1, \\ y' = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}x + \dfrac{1}{4}y - \dfrac{\sqrt{15}}{4}. \end{cases}$$

Решение:

1) $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{4} & \dfrac{\sqrt{15}}{4} \\ -\dfrac{\sqrt{15}}{4} & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$ – матрица уравнения отображения f является ортогональной, т. к.

$$a_1^2 + a_2^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 = 1,\ b_1^2 + b_2^2 = \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1,$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} + \left(\frac{-\sqrt{15}}{4}\right)\cdot\frac{1}{4} = 0.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{4} & \dfrac{\sqrt{15}}{4} \\ \dfrac{-\sqrt{15}}{4} & \dfrac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{16} + \frac{15}{16} = 1.$$

Следовательно, отображение f является движением I рода.

2) Определим его вид по количеству неподвижных точек. Пусть $M(x, y)$ – неподвижная точка движения f, т. е.

$$f : M(x, y) \to M(x, y).$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{\sqrt{15}}{4}y + 1, \\ y = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}x + \dfrac{1}{4}y - \dfrac{\sqrt{15}}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \sqrt{15}y - 4 = 0, \\ \sqrt{15}x + 3y + \sqrt{15} = 0, \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot\left(-\sqrt{15}\right) \\ \cdot 3 \end{matrix} \right| \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot\sqrt{15} \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$24y + 7\sqrt{15} = 0$$

$$24x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{8}, \\ y = -\dfrac{7\sqrt{15}}{24} \end{cases}$$ – одна неподвижная точка,

следовательно, f – поворот.

3) Укажем элементы, задающие поворот.

$$O'\left(-\frac{1}{8}; -\frac{7\sqrt{15}}{24}\right)$$ – центр поворота.

Угол поворота α определяется по значениям функций:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{1}{4} \\ \sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{15}}{4} \end{cases}$$, откуда угол $\alpha \in$ IV четверти.

$\alpha = 2\pi - arccos\dfrac{1}{4}$. Таким образом, $f = R_{O'}^{\alpha}$.

Задача 2. Определить вид движения. Указать элементы, его определяющие.

$$f : \begin{cases} x' = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y + \dfrac{8}{5}, \\ y' = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y - \dfrac{4}{5}. \end{cases}$$

Решение:

1) $\Delta = \begin{vmatrix} -\dfrac{3}{5} & \dfrac{4}{5} \\ \dfrac{4}{5} & \dfrac{3}{5} \end{vmatrix} = -\dfrac{9}{25} - \dfrac{16}{25} = -1.$ f – движение II рода.

2) Найдем неподвижные точки f.

$$\begin{cases} x = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y + \dfrac{8}{5}, \\ y = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y - \dfrac{4}{5}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 4y - 8 = 0, \\ -4x + 2y + 4 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \ 2x - y - 2 = 0.$$

Каждая точка прямой $\ell : 2x - y - 2 = 0$ является неподвижной.

3) $f = S_{\ell}$, где $\ell : 2x - y - 2 = 0$.

Задача 3. Указать элементы, определяющие движение

$$f : \begin{cases} x' = -y + 4, \\ y' = -x + 8. \end{cases}$$

Задать f конструктивно.

Решение:

1) $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1.$ f – движение II рода.

2) Найдем элементы, определяющие f.

а) Прежде всего определим его вид по количеству неподвижных точек.

$\begin{cases} x=-y+4, \\ y=-x+8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4, \\ x+y=8 \end{cases}$ – система не имеет решений.

Следовательно, f – скользящая симметрия.

б) $f=S_{\ell,\bar{a}}=T_{\bar{a}}\cdot S_{\ell}$, где $\ell \parallel \bar{a}$.

Возьмем произвольную точку плоскости. Пусть $M(-4,2)$.

$$S_{\ell,\bar{a}}: M(-4,2)\to M'(x',y').$$

Координаты точки M' найдем по уравнению этого движения.

$$\begin{cases} x'=-2+4, \\ y'=4+8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=2, \\ y'=12. \end{cases} \quad M'(2;12).$$

Обозначим через L точку пересечения отрезка MM' с осью симметрии ℓ и найдем ее координаты (см. рис. 13).

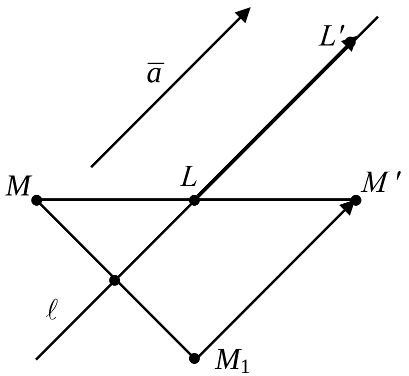

Рис. 13

L – середина $[MM']$; $L(-1;7)$.

Если на точку L подействовать скользящей симметрией, то

$S_{\ell}: L\to L$, т. к. L лежит на оси симметрии;

$T_{\bar{a}}: L\to L'$, где $\overline{LL'}=\bar{a}$;

$S_{\ell,\bar{a}}: L\to L'$, и значит, координаты точки L' могут быть найдены с помощью уравнения данного движения.

$L':\begin{cases} x'=-7+4, \\ y'=1+8. \end{cases}$ $L'(-3,9)$. Тогда $\overline{LL'}=\overline{(-2;2)}$, или

$\bar{a}=\overline{(-2;2)}$ – вектор скользящей симметрии.

в) Найдем ось симметрии ℓ.

$L(-1,7)$ – начальная точка, $\bar{a}(-2;2)$ – направляющий вектор прямой ℓ, следовательно, вектор $\overline{a'}(-1;1)$ – также направляющий вектор прямой ℓ.

$$\ell:\begin{vmatrix} x+1 & -1 \\ y-7 & +1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow x+1+y-7=0 \Leftrightarrow x+y-6=0 \ –$$

уравнение оси ℓ.

Таким образом, $f=S_{\ell,\bar{a}}$, где $\ell: x+y-6=0$, $\bar{a}(-2,2)$.

Замечание. Вектор $\bar{a}$ нельзя заменять ему коллинеарным, в противном случае получим другую скользящую симметрию с той же осью.

3) Зададим скользящую симметрию с осью $\ell: x+y-6=0$ и вектором $\bar{a}(-2,2)$ конструктивно (рис. 14).

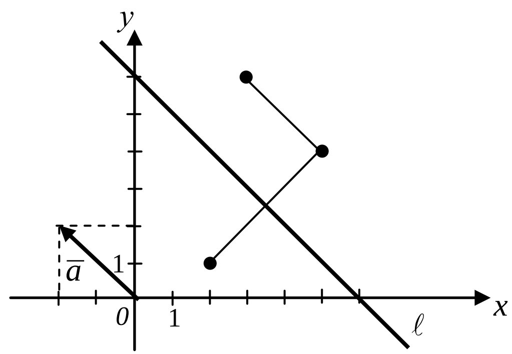

Рис. 14

***II тип.* Составить уравнение движения по определяющим его элементам, заданным в ПДСК.**

Задача 4. Составить уравнение центральной симметрии относительно центра $S(-3,4)$.

Решение: Пусть $Z_s: M(x,y)\to M'(x',y')$.

Выразим координаты образа M' через координаты его прообраза – M. Воспользуемся определением центральной симметрии: S – середина отрезка MM'. Тогда

$$\begin{cases} x_s = \dfrac{x+x'}{2}, \\ y_s = \dfrac{y+y'}{2}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -3 = \dfrac{x+x'}{2}, \\ 4 = \dfrac{y+y'}{2}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x' = -x-6, \\ y' = -y+8 \end{cases}$$ – уравнение центральной симметрии с центром S.

Задача 5. Составить уравнение поворота на угол $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$, если его центр находится в точке $S\left(2;-3\right)$.

Решение:

1) Пусть поворот $R_s : M\left(x,\, y\right) \to M'\left(x',\, y'\right)$.

Установим зависимость между координатами образа M' и его прообраза M. Известны формулы поворота вокруг начала координат на угол α*. Чтобы ими воспользоваться, перенесем S в точку O, для этого на всю конструкцию подействуем параллельным переносом на вектор $\overline{SO}\left(-2, 3\right)$.

$$T_{\overline{so}} : \begin{cases} S\left(2, -3\right) \to O\left(0, 0\right), \\ M\left(x, y\right) \to M_1\left(x_1, y_1\right), \\ M'\left(x', y'\right) \to M_1'\left(x_1', y_1'\right). \end{cases} \quad \text{(см. рис. 15)}$$

Используя уравнение параллельного переноса, получим:

$$\begin{cases} x_1 = x-2, \\ y_1 = y+3. \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x_1' = x'-2, \\ y_1' = y'+3. \end{cases} \qquad (2)$$

* Если $R_0^{\alpha} : M\left(x,\, y\right) \to M'\left(x',\, y'\right)$, то $\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$

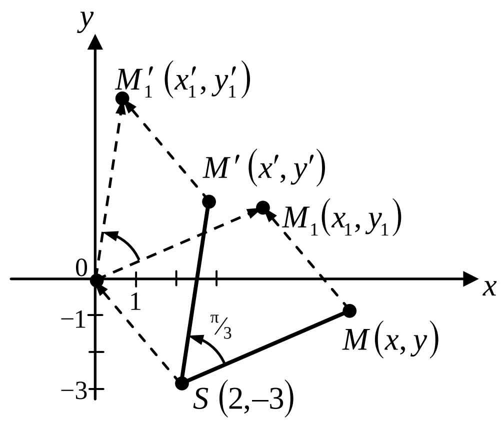

Рис. 15

Кроме того, отметим, что $\angle M_1OM_1' = \angle MSM' = \dfrac{\pi}{3}$ (как углы с соответственно параллельными и одинаково направленными сторонами).

2) На полученную точку $M_1\left(x_1, y_1\right)$ подействуем поворотом $R_0^{\frac{\pi}{3}} : M_1\left(x_1, y_1\right) \to M_1'\left(x_1',\, y_1'\right)$, тогда

$$\begin{cases} x_1' = x_1\cos\dfrac{\pi}{3} - y_1\sin\dfrac{\pi}{3}, \\ y_1' = x_1\sin\dfrac{\pi}{3} + y_1\cos\dfrac{\pi}{3}. \end{cases} \qquad (3)$$

Чтобы получить зависимость между координатами точек $M\left(x, y\right)$ и $M'\left(x', y'\right)$, достаточно в систему (3) подставить выражения из систем (1), (2), тогда

$$\begin{cases} x'-2 = \left(x-2\right)\cos\dfrac{\pi}{3} - \left(y+3\right)\sin\dfrac{\pi}{3}, \\ y'+3 = \left(x-2\right)\sin\dfrac{\pi}{3} + \left(y+3\right)\cos\dfrac{\pi}{3}, \end{cases}$$

$$\text{или}\quad \begin{cases} x' = (x-2)\dfrac{1}{2} - (y+3)\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2, \\ y' = (x-2)\dfrac{\sqrt{3}}{2} + (y+3)\dfrac{1}{2} - 3, \end{cases}$$

$$\text{или}\quad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + \left(1 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right), \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y + \left(-\dfrac{3}{2} - \sqrt{3}\right) \end{cases} \text{– уравнение поворота } R_S^{\frac{\pi}{3}}.$$

Вообще уравнение поворота в ПДСК вокруг $S\,(x_s,\, y_s)$ на угол α имеет вид:

$$\begin{cases} x' - x_s = (x - x_s)\cos\alpha - (y - y_s)\sin\alpha, \\ y' - y_s = (x - x_s)\sin\alpha + (y - y_s)\cos\alpha. \end{cases}$$

Оно может быть получено как уравнение композиции

$$R_S^{\alpha} = R_O^{\alpha} \cdot T_{\overline{SO}}.$$

Задача 6. Составить уравнение скользящей симметрии, заданной осью $\ell: 2x - 3y + 1 = 0$ и вектором $\bar{a}\,(-6, -4)$.

Решение: По определению скользящая симметрия есть композиция $S_{\ell,\bar{a}} = T_{\bar{a}} \cdot S_{\ell}$, где $\bar{a} \| \ell$.

1) Составим уравнение осевой симметрии, заданной прямой $\ell: 2x - 3y + 1 = 0$.

Возьмем произвольную точку плоскости $M_0(x_0,\, y_0)$ и подействуем на нее движением S_e.

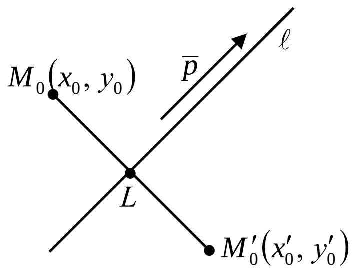

Рис. 16

$$S_e : M_0(x_0,\, y_0) \to M_0'(x_0',\, y_0').$$

а) Найдем уравнение (M_0M_0').

$M_0(x_0,\, y_0)$ – начальная точка, $\bar{p}\,(3, 2)$ – вектор нормали (M_0M_0'):

$$3(x - x_0) + 2(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y + (-3x_0 - 2y_0) = 0.$$

б) Обозначим через L точку пересечения прямых ℓ, (M_0M_0') и найдем ее координаты:

$$\begin{cases} 3x + 2y + (-3x_0 - 2y_0) = 0, & \cdot 3 & \cdot(-2) \\ 2x - 3y + 1 = 0, & \cdot 2 & \cdot 3 \end{cases}$$

$$13x + (-9x_0 - 6y_0 + 2) = 0$$

$$-13y + (6x_0 + 4y_0 + 3) = 0$$

$$L\left(\frac{9x_0 + 6y_0 - 2}{13};\, \frac{6x_0 + 4y_0 + 3}{13}\right).$$

в) L – середина отрезка M_0M_0', и значит,

$$\begin{cases} x_L = \dfrac{x_0 + x_0'}{2}, \\ y_L = \dfrac{y_0 + y_0'}{2}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_0' = 2x_L - x_0, \\ y_0' = 2y_L - y_0, \end{cases}$$

$$\text{или}\quad \begin{cases} x_0' = \dfrac{18x_0 + 12y_0 - 4}{13} - x_0, \\ y_0' = \dfrac{12x_0 + 8y_0 + 6}{13} - y_0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_0' = \dfrac{5x_0 + 12y_0 - 4}{13}, \\ y_0' = \dfrac{12x_0 - 5y_0 + 6}{13}. \end{cases}$$

Таким образом, уравнение осевой симметрии, заданной прямой $\ell: 2x - 3y + 1 = 0$, имеет вид:

$$S_{\ell} : \begin{cases} x' = \dfrac{5}{13}x + \dfrac{12}{13}y - \dfrac{4}{13}, \\ y' = \dfrac{12}{13}x - \dfrac{5}{13}y + \dfrac{6}{13}. \end{cases} \qquad (1)$$

2) На полученную точку $M'(x', y')$ подействуем параллельным переносом на вектор $\bar{a}(-6, -4)$.

$$T_{\bar{a}} : M'(x', y') \to M''(x'', y''),$$

откуда $\overline{M'M''} = \bar{a}$ или $\overline{(x''-x'; y''-y')} = \overline{(-6; -4)}$.

Итак, уравнение параллельного переноса на вектор $\bar{a}(-6; -4)$ имеет вид:

$$\begin{cases} x'' = x' - 6, \\ y'' = y' - 4. \end{cases} \qquad (2)$$

3) $S_{\ell,\bar{a}} : M(x, y) \to M''(x'', y'')$. Подставляя в уравнение (2) соотношения из уравнения (1), получим уравнение скользящей симметрии, заданной осью $\ell : 2x - 3y + 1 = 0$ и вектором $\bar{a}(-6, -4)$.

$$\begin{cases} x'' = \dfrac{5}{13}x + \dfrac{12}{13}y - \dfrac{82}{13}, \\ y'' = \dfrac{12}{13}x - \dfrac{5}{13}y - \dfrac{46}{13}. \end{cases}$$

***III тип.* Составить уравнение движения I (II) рода, заданного двумя парами соответствующих точек.**

Задача 7. Записать уравнение движения I рода, при котором

$A(-3, 4) \to A'(4, -1)$,

$B(-1, 6) \to B'(6, -3)$.

Определить его вид.

Решение:

1) Сначала проверим, будут ли указанные пары соответствующих точек задавать движение.

$$\left.\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(-1+3)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}, \\ |A'B'| &= \sqrt{(6-4)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}, \end{aligned}\right\} \Rightarrow |AB| = |A'B'|.$$

Следовательно, движение задано.

2) Запишем уравнение движения I рода в общем виде.

$$\begin{cases} x' = x\cos a - y\sin a + x_0, \\ y' = x\sin a + y\cos a + y_0. \end{cases}$$

Найдем коэффициенты при x, y и свободные члены x_0, y_0. Для этого в уравнение движения подставим координаты заданных точек. Получим:

$$\begin{cases} 4 = -3\cos\alpha - 4\sin\alpha + x_0, \\ -1 = -3\sin\alpha + 4\cos\alpha + y_0 \end{cases} \qquad (1)$$

$$\text{и} \begin{cases} 6 = -\cos\alpha - 6\sin\alpha + x_0, \\ -3 = -\sin\alpha + 6\cos\alpha + y_0. \end{cases} \qquad (2)$$

3) Найдем $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, приравняв выражения x_0, затем y_0 из систем (1), (2).

$$\begin{cases} 4 + 3\cos\alpha + 4\sin\alpha = 6 + \cos\alpha + 6\sin\alpha, \\ -1 + 3\sin\alpha - 4\cos\alpha = -3 + \sin\alpha - 6\cos\alpha, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin\alpha - 2\cos\alpha + 2 = 0, \\ 2\sin\alpha + 2\cos\alpha + 2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha - \cos\alpha = -1, \\ \sin\alpha + \cos\alpha = -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = -1, \\ \cos\alpha = 0. \end{cases}$$

$$\frac{2\sin\alpha \qquad = -2}{2\cos\alpha \qquad = 0}$$

4) Теперь найдем x_0, y_0. Подставляя найденные значения $sin\,\alpha$, $cos\,\alpha$ в систему (1), получим $\begin{cases} x_0 = 0, \\ y_0 = -4. \end{cases}$

Таким образом, $\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x - 4, \end{cases}$ – уравнение движения I рода.

5) Определим вид движения.

$$\begin{cases} x = y, \\ y = -x-4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = -2. \end{cases}$$ $S(-2,-2)$ – центр поворота.

$\begin{cases} \sin\alpha = -1, \\ \cos\alpha = 0, \end{cases}$ откуда $\alpha = \frac{3}{2}\pi$ – угол поворота. $f = R_S^{\alpha}$.

***IV тип.* Найти образ фигуры при заданном движении.**

Задача 8. Найти образ прямой $\ell: 2x-3y-3=0$ при параллельном переносе на вектор $\overline{a}\,(-1,4)$. Дать графическую иллюстрацию.

Решение:

1-й способ

1) Составим уравнение параллельного переноса $T_{\overline{a}}$. Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка плоскости. $T_{\overline{a}}: M(x,y) \to M'(x',y')$, тогда $\overline{MM'} = \overline{a}$ или $\overline{(x'-x,\, y'-y)} = \overline{(-1,4)}$.

Откуда уравнение параллельного переноса имеет вид:

$$\begin{cases} x' = x-1, \\ y' = y+4. \end{cases} \qquad (1)$$

2) $T_{\overline{a}}: \begin{cases} M(x,y) \to M'(x',y'), \\ \ell \to \ell'. \end{cases}$

Чтобы найти уравнение прямой ℓ', достаточно из уравнения (1) параллельного переноса выразить координаты прообраза M через координаты образа M' и подставить их в уравнение ℓ.

$$\begin{cases} x = x'+1, \\ y = y'-4. \end{cases} \qquad (2)$$

Тогда $\ell': 2(x'+1)-3(y'-4)-3=0$ или $2x'-3y'+11=0$.

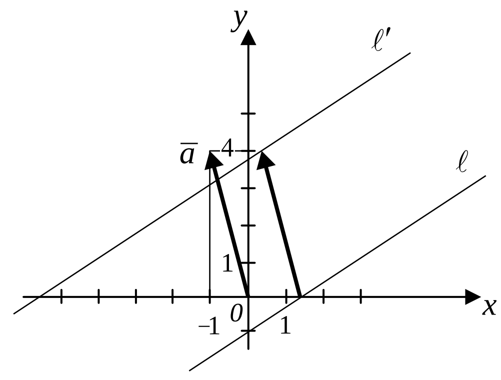

Рис. 17

2-й способ

$T_{\overline{a}}: \ell \to \ell'$, где $\ell' \parallel \ell$ по свойству параллельного переноса. Тогда уравнение прямой ℓ' имеет вид $2x'-3y'+C=0$. Найдем свободный член C. Для этого возьмем произвольную точку M на прямой ℓ, например, $M(0,-1)$, отложим от нее вектор $\overline{a}$ и получим $\overline{MM'} = \overline{a}$. $M'(x',y') = T_{\overline{a}}(M)$.

$$\begin{cases} x'-0 = -1, \\ y'+1 = 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -1, \\ y' = 3. \end{cases}$$

$M'(-1,3)$ лежит на прямой ℓ', и значит, ее координаты удовлетворяют уравнению прямой ℓ', т. е. $2\cdot(-1)-3\cdot 3+C=0$ – верное числовое равенство. Откуда $C=11$ и $\ell': 2x'-3y'+11=0$.

Можно указать и другие способы решения этой задачи.

Задача 9. Найти образ окружности $x^2+y^2-6x+2y+6=0$ при повороте вокруг точки $M(-3,2)$ на угол $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Проиллюстрировать графически.

Решение:

1) Известно, что при движении окружность переходит в окружность того же радиуса. Следовательно, достаточно определить центр искомой окружности.

2) Укажем центр и радиус данной окружности.

$$x^2+y^2-6x+2y+6=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-6x+9\right)+\left(y^2+2y+1\right)-10+6=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+1)^2=4.$$

$S(3,-1)$ – центр; $R=2$ – радиус.

3) Уравнение поворота с центром $M(-3,2)$ на угол $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ имеет вид:

$$\begin{cases} x'=(x+3)\cos\dfrac{\pi}{2}-(y-2)\sin\dfrac{\pi}{2}-3, \\ y'=(x+3)\sin\dfrac{\pi}{2}+(y-2)\cos\dfrac{\pi}{2}+2, \end{cases}$$

или $\begin{cases} x'=-y+2-3, \\ y'=x+3+2, \end{cases}$ или $\begin{cases} x'=-y-1, \\ y'=x+5. \end{cases}$

4) Найдем центр искомой окружности и запишем ее уравнение.

$R_M^{\frac{\pi}{2}}: S(3,-1)\to S'(x',y')$, где $\begin{cases} x'=1-1=0, \\ y'=3+5=8. \end{cases}$ $S'(0,8)$.

$$(x-0)^2+(y-8)^2=4 \text{ или } x^2+(y-8)^2=4.$$

5) Проиллюстрируем графически.

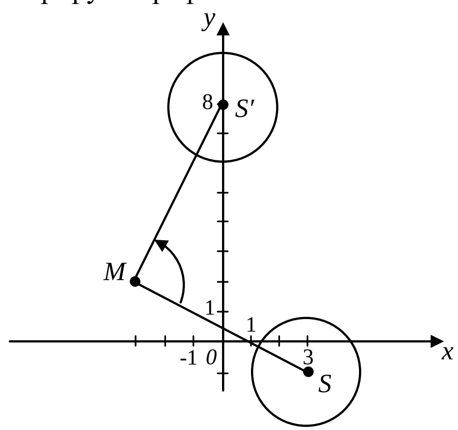

Рис. 18

Задача 10. Найти образ параболы $y=x^2$ при осевой симметрии относительно прямой $\ell: x-2y-4=0$. Дать графическую иллюстрацию.

Решение:

1) Составим уравнение осевой симметрии с осью $\ell: x-2y-4=0$.

Возьмем произвольную точку плоскости $M_0(x_0,y_0)$. Пусть $S_\ell: M_0(x_0,y_0)\to M_0'(x_0',y_0')$. Получим уравнение S_ℓ.

а) Составим уравнение прямой M_0M_0'. $M_0(x_0,y_0)$ – начальная точка, $\overline{p}(2,1)$ – вектор нормали, тогда $2(x-x_0)+(y-y_0)=0$ или $2x+y+(-2x_0-y_0)=0$.

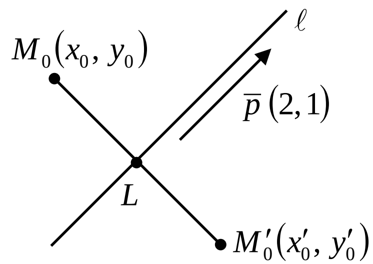

Рис. 19

б) Найдем $L=(M_0M_0')\cap\ell$:

$$\begin{cases} x-2y-4=0, \\ 2x+y+(-2x_0-y_0)=0, \end{cases} \Bigg| \cdot 2 \Bigg| \cdot(-2) \Bigg|$$

$$5x+(-4-4x_0-2y_0)=0$$

$$5y+(8-2x_0-y_0)=0$$

$$L\left(\frac{4x_0+2y_0+4}{5}, \frac{2x_0+y_0-8}{5}\right).$$

в) L – середина отрезка M_0M_0', и значит,

$$\begin{cases} \dfrac{4x_0+2y_0+4}{5}=\dfrac{x_0+x_0'}{2}, \\ \dfrac{2x_0+y_0-8}{5}=\dfrac{y_0+y_0'}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0'=\dfrac{3}{5}x_0+\dfrac{4}{5}y_0+\dfrac{8}{5}, \\ y_0'=\dfrac{4}{5}x_0-\dfrac{3}{5}y_0-\dfrac{16}{5}. \end{cases}$$

Таким образом, уравнение осевой симметрии S_ℓ имеет вид:

$$\begin{cases} x'=\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y+\dfrac{8}{5}, \\ y'=\dfrac{4}{5}x-\dfrac{3}{5}y-\dfrac{16}{5}. \end{cases} \qquad (1)$$

2) Чтобы найти образ *П'* параболы *П*, заданной уравнением $y=x^2$, достаточно из уравнения (1) выразить координаты (x, y) прообраза через координаты (x', y') образа и подставить их в данное уравнение параболы.

Но обратим внимание, что если $S_\ell : M(x, y) \to M'(x', y')$, то $(S_\ell)^{-1} : M'(x', y') \to M(x, y)$. Известно, что $(S_\ell)^{-1}=S_\ell$, и следовательно,

$$\begin{cases} x=\dfrac{3}{5}x'+\dfrac{4}{5}y'+\dfrac{8}{5}, \\ y=\dfrac{4}{5}x'-\dfrac{3}{5}y'-\dfrac{16}{5}. \end{cases}$$

0

$$S_\ell : П \to П'.\ П : y=x^2;$$

$$П' : \frac{4}{5}x'-\frac{3}{5}y'-\frac{16}{5}=\left(\frac{3}{5}x'+\frac{4}{5}y'+\frac{8}{5}\right)^2, \text{ или}$$

$$\frac{4}{5}x'-\frac{3}{5}y'-\frac{16}{5}=\frac{9}{25}x'^2+\frac{16}{25}y'^2+\frac{64}{25}+\frac{24}{25}x'y'+\frac{48}{25}x'+\frac{64}{25}y',$$

$$\text{или } \frac{9}{25}x'^2+\frac{16}{25}y'^2+\frac{24}{25}x'y'+\frac{28}{25}x'+\frac{79}{25}y'+\frac{144}{25}=0,$$

$$\text{или } П' : 9x'^2+16y'^2+24x'y'+28x'+79y'+144=0.$$

3) Проиллюстрируем графически.

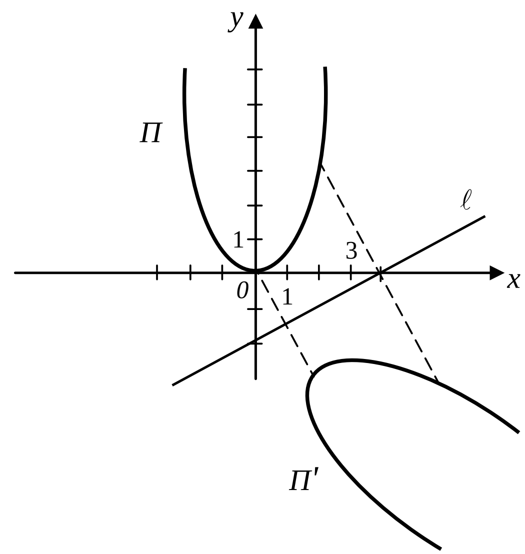

Рис. 20

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Определить вид движения по его уравнению. Указать элементы, его определяющие.

1) $\begin{cases} x'=-y-1, \\ y'=-x-1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x'=y, \\ y'=-x-1. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x'=x+\dfrac{3}{5}, \\ y'=-y-1. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x'=x+3, \\ y'=y-2. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{1}{2}y+1, \\ y'=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y-2. \end{cases}$

6) $\begin{cases} x'=\dfrac{12}{13}x+\dfrac{5}{13}y+1, \\ y'=\dfrac{5}{13}x-\dfrac{12}{13}y-2. \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x'=-x+6, \\ y'=-y-4. \end{cases}$

8) $\begin{cases} x' = \dfrac{8}{17}x - \dfrac{15}{17}y + \dfrac{21}{17}, \\ y' = -\dfrac{15}{17}x - \dfrac{8}{17}y + \dfrac{35}{17}. \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x' = \dfrac{12}{13}x - \dfrac{5}{13}y + 1, \\ y' = \dfrac{5}{13}x + \dfrac{12}{13}y - 2. \end{cases}$

2. Показать, что отображение f, заданное уравнением, является движением. Определить его вид. Задать f конструктивно.

1) $\begin{cases} x' = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{\sqrt{5}}{3}y + 1, \\ y' = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}x + \dfrac{2}{3}y + 4\sqrt{5}. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{\sqrt{8}}{3}y + 1, \\ y' = \dfrac{\sqrt{8}}{3}x - \dfrac{1}{3}y + \sqrt{2}. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x' = -\dfrac{15}{17}x + \dfrac{8}{17}y - \dfrac{20}{17}, \\ y' = \dfrac{8}{17}x + \dfrac{15}{17}y + \dfrac{6}{17}. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x' = \dfrac{7}{25}x + \dfrac{24}{25}y - \dfrac{12}{25}, \\ y' = \dfrac{24}{25}x - \dfrac{7}{25}y + \dfrac{16}{25}. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{\sqrt{8}}{3}y + \dfrac{1}{3}, \\ y' = \dfrac{\sqrt{8}}{3}\tilde{o} + \dfrac{1}{3}y + \dfrac{\sqrt{8}}{3}. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x' = \dfrac{5}{7}x + \dfrac{2\sqrt{6}}{7}y - 1, \\ y' = \dfrac{2\sqrt{6}}{7}x - \dfrac{5}{7}y. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x' = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{\sqrt{7}}{4}y + 1, \\ y' = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}x + \dfrac{3}{4}y + \sqrt{7}. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x' = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{\sqrt{5}}{3}y - 1, \\ y' = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}x - \dfrac{2}{3}y - \sqrt{5}. \end{cases}$

3. Составить уравнение движения первого (второго) рода, заданного двумя парами соответствующих точек.

1) $A(-1;0)$, $B(2;1)$, $A_1(1;1)$, $B_1(4;0)$.

2) $A(0;0)$, $B(1;1)$, $A_1(1;8)$, $B_1(2;9)$.

3) $B(1;1)$, $C(-2;-3)$, $B_1(2;9)$, $C_1(-2;6)$.

4) $A(0;0)$, $C(-2;-3)$, $A_1(1;8)$, $C_1(-2;6)$.

5) $M(0;3)$, $N(5;-1)$, $M_1(1;-2)$, $N_1(-3;3)$.

6) $M(1;2)$, $N(-1;0)$, $M_1(4;5)$, $N_1(2;3)$.

4. Составить уравнение скользящей симметрии, зная две пары соответствующих точек $A(3;3)$ и $A'(5;-5)$, $B(4;2)$ и $B'(6;-4)$.

5. Составить уравнение поворота, при котором точки $A(0;0)$, $B(2;3)$ переходят соответственно в точки $A'(1;2)$, $B'(4;0)$.

6. Найти уравнение поворота с центром $M_0(2;1)$, при котором точка $A(1;1)$ переходит в точку $A'\left(\dfrac{7}{5};\dfrac{1}{5}\right)$.

7. Составить уравнение осевой симметрии относительно прямой а) $\ell: 3x + y - 1 = 0$; б) $3x - 2y + 1 = 0$; в) $x + y + 1 = 0$; г) $2x - 1 = 0$.

8. Составить уравнение осевой симметрии, при которой прямая ℓ переходит в прямую ℓ', где $\ell: 4x - y + 5 = 0$; $\ell': 4x - y - 8 = 0$.

9. Найти уравнение поворота вокруг точки $(1;-1)$ на угол (-90^0).

10. Составить уравнение поворота вокруг точки $(1;-2)$ на угол $\dfrac{\pi}{3}$.

11. Составить уравнение осевой симметрии, для которой $2x - y = 0$ – инвариантная прямая, а $(2;2)$ – инвариантная точка.

12. Составить уравнение скользящей симметрии, заданной осью $\ell: x - 3y + 2 = 0$ и вектором $\overline{p}(6,2)$.

13. Найти уравнение образа прямой $x - 3y + 2 = 0$ при параллельном переносе, при котором точка $A(4,-6)$ переходит в точку $A'(7,-7)$. Дать графическую иллюстрацию.

14. Найти уравнение образа окружности $(x+1)^2 + y^2 = 7$ при параллельном переносе, переводящем параболу $y = x^2$ в параболу $y = (x-3)^2 + 2$.

15. Найти координаты образа точки $(1,-3)$ при параллельном переносе на вектор $\overline{a}$, при котором прямая $x+y-1=0$ инвариантна, а длина вектора $\overline{a}$ равна 2.

16. Найти уравнение прообраза прямой $m: x+7y-1=0$ при параллельном переносе, при котором прямая $c: 4x+3y=0$ инвариантна и прямая $d: x+y+1=0$ переходит в прямую $d': x+y=0$.

17. Найти координаты образа точки $M\ (0;0)$ при повороте с центром $A\,(1;1)$ на угол 45°.

18. Составить уравнение образа окружности

$$S: (x-1)^2+(y+2)^2=4$$

при движении f, заданном уравнением $\begin{cases} x'=y+3 \\ y'=-x-1 \end{cases}$.

19. Определить координаты прообраза точки $A\,(3;-2)$ при повороте, для которого точка $O\,(0;0)$ инвариантна, а прямая $3x+y+1=0$ переходит в прямую $x-3y+1=0$.

20. Найти координаты образа точки $A\,(0;1)$ при осевой симметрии, при которой точка $M\ (4;-6)$ переходит в точку $M'\ (2;-8)$. Проиллюстрировать графически.

21. Составить уравнение образа прямой $2x-y+5=0$ при осевой симметрии, при которой точка $M'\,(2;1)$ является образом точки $M\ (0;1)$. Дать графическую иллюстрацию.

22. Найти уравнение образа окружности $x^2+y^2=1$ при осевой симметрии, зная две инвариантные точки $A\,(1,1)$ и В $(2,3)$.

23. Составить уравнение образа прямой $x-y+1=0$ при осевой симметрии, при которой прямая $4x-y+5=0$ переходит в прямую $4x+y-8=0$.

24. Ось симметрии ℓ задана уравнением $x-y+2=0$. Написать уравнение прямой m', симметричной данной прямой $m: x-2y+1=0$ относительно ℓ. Проиллюстрировать графически.

25. Найти образ прямой $m: x+3y-2=0$ при осевой симметрии относительно $\ell: 2x-y+3=0$.

26. Найти координаты образа точки $M\ (1,1)$ при скользящей симметрии, при которой точки $O\ (0,0)$ и $A\,(1,2)$ переходят в точки $O'\,(2,5)$ и $A'\,(4,4)$.

27. Найти образ $\Delta\ ABC$ с вершинами $A\,(1,2)$, $B\,(5,4)$, $C\,(3,-2)$ при скользящей симметрии, заданной осью $\ell: 2x+y+1=0$ и вектором $\overline{a}\ (-2;4)$.

28. Найти координаты прообраза точки $M\ (2,1)$ при скользящей симметрии, зная координаты ее вектора $\overline{a}\ (1,1)$ и пару соответствующих точек $A\,(1,1)$ и $A'\,(3,5)$.

ЧАСТЬ II

ПОДОБИЯ ПЛОСКОСТИ

Преобразование плоскости называется *подобием* (*преобразованием подобия*), если для любых двух точек A и B плоскости и их образов A_1 и B_1 имеет место соотношение $|A_1B_1| = k|AB|$, где k – положительное число, называемое *коэффициентом подобия*. Подобие с коэффициентом k обозначается так: $\ddot{I}_k$.

Из определения следует: а) преобразование, обратное преобразованию подобия $\ddot{I}_k$, есть подобие с коэффициентом, равным $\frac{1}{k}$; б) композиция двух преобразований подобия с коэффициентами k_1 и k_2 есть преобразование подобия с коэффициентом $k_1 \cdot k_2$. Следовательно, множество всех преобразований подобия плоскости образует группу. Группа движений плоскости есть подгруппа группы подобий плоскости.

Фигура F_1 называется *подобной* фигуре F ($F_1 \sim F$), если существует подобие, отображающее F на F_1.

Отношение фигур «быть подобными» обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, т. е. является отношением эквивалентности.

Любое движение является подобием при $k = 1$, поэтому равные фигуры подобны.

Свойства преобразований подобия:

1. Подобие отображает точки, лежащие на одной прямой, в точки, также лежащие на одной прямой.
2. Подобие отображает прямую на прямую, отрезок на отрезок, луч – на луч, полуплоскость – на полуплоскость.
3. Подобие отображает параллельные прямые на параллельные прямые.
4. Подобие отображает угол на равный ему угол.

5. Подобие сохраняет отношение длин любых двух отрезков.
6. При подобии многоугольник преобразуется в одноименный ему многоугольник, углы которого равны соответственно углам, а стороны пропорциональны сторонам исходного многоугольника.

Подобие плоскости, сохраняющее ориентацию треугольников, называется подобием первого рода. Подобие плоскости, изменяющее ориентацию треугольников на противоположную, называется подобием второго рода.

1. ГОМОТЕТИЯ ПЛОСКОСТИ

Гомотетией с центром O и коэффициентом $m \neq 0$ называется преобразование плоскости, при котором образом произвольной точки A является такая точка A_1, что $\overrightarrow{OA_1} = m\,\overrightarrow{OA}$. Обозначение: H_O^m.

Из определения следует, что при $m = 1$ гомотетия есть тождественное преобразование; при $m = -1$ гомотетия есть центральная симметрия.

Свойства гомотетии:

1. Гомотетия H_O^m есть подобие с коэффициентом $k = |m|$.
2. Преобразование, обратное гомотетии, есть гомотетия с тем же центром: $\left(H_O^m\right)^{-1} = H_O^{\frac{1}{m}}$.
3. Точка и ее образ в данной гомотетии лежат на одной прямой с центром гомотетии.
4. Центр – единственная неподвижная точка нетождественной гомотетии. Любая прямая, проходящая через центр гомотетии, является инвариантной прямой.
5. Гомотетия с положительным коэффициентом отображает любой луч на сонаправленный ему луч; гомотетия с отрицательным коэффициентом отображает любой луч на противоположно направленный ему луч.
6. Гомотетия отображает любую прямую, не проходящую через центр, на параллельную ей прямую.
7. Гомотетия не меняет ориентацию треугольников, то есть является подобием первого рода.
8. Множество всех гомотетий с одним и тем же центром есть абелева группа относительно композиции преобразований.

Можно доказать, что любое подобие плоскости $\ddot{I}_k$ представляется в виде композиции гомотетии H_O^m и некоторого движения f, причем O – произвольная точка плоскости, а $|m| = k$. Так как гомотетия – это подобие первого рода, то род подобия $\ddot{I}_k$ определяется родом движения f.

Гомотетию можно графически задать:

1) центром O и парой соответственных точек A и A_1 при условии, что точки O, A и A_1 лежат на одной прямой;

2) двумя парами соответствующих точек A и A_1, B и B_1 при условии, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{\grave{A}_1\hat{A}_1}$ коллинеарны, но не равны.

Фигура F_1 называется *гомотетичной* фигуре F, если существует гомотетия, отображающая F на F_1.

Задача 1. Доказать, что в неравностороннем треугольнике ABC точка пересечения медиан M, ортоцентр K и центр O описанной окружности лежат на одной прямой, причем $\overrightarrow{MK} = 2\overrightarrow{OM}$.

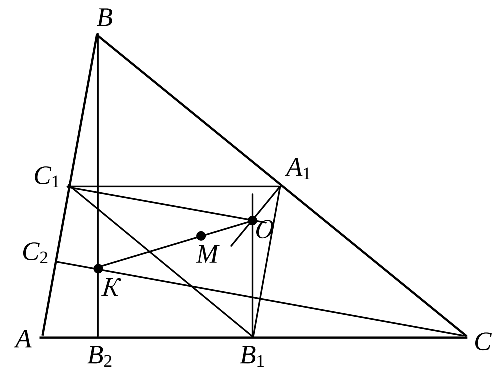

Рис. 21

Решение: Пусть A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, AC и AB соответственно (рис. 21). Так как медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении $2:1$, считая от вершин, то $\overrightarrow{MA_1} = -0{,}5\,\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB_1} = -0{,}5\,\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC_1} = -0{,}5\,\overrightarrow{MC}$. Следовательно, гомотетия с центром M и коэффициентом $m = -0{,}5$ преобразует $\Delta\, ABC$ в $\Delta\, A_1B_1C_1$. Высоты треугольника $A_1B_1C_1$ являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника ABC, следовательно, точка O является ортоцентром треугольника $A_1B_1C_1$ и образом точки K в данной гомотетии. Так как $H_M^{-0,5} : K \to O$, то $\overrightarrow{MO} = -0{,}5\overrightarrow{MK}$, откуда следует $\overrightarrow{MK} = 2\overrightarrow{OM}$.

Задача 2. Через точку внутри угла проведите прямую так, чтобы отрезок прямой, отсекаемый сторонами угла, делился этой точкой в отношении $1:2$.

I. Анализ

Предположим, задача решена, отрезок $[NN']$ прямой ℓ удовлетворяет условию задачи, т. е. $N \in [AB)$, $N' \in [AC)$ угла BAC и $|NM|:|MN'| = 1:2$. Определим положение точек N, N'. Для этого рассмотрим гомотетию с центром M и коэффициентом $\kappa = -2$.

$$H_M^{-2} : \begin{cases} N \to N', \\ [AB) \to [A'B'). \end{cases}$$

Так как по условию $N \in [AB)$, то по свойству преобразований $N' \in [A'B')$. Но по условию задачи $N' \in [AC)$. Следовательно, точка N' есть пересечение лучей $[A'B')$ и $[AC)$ (см. рис. 22), точка N может быть получена из N' при обратном преобразовании, т. е. $H_M^{-\frac{1}{2}} : N' \to N$.

II. Построение

1) $[A'B')$;

$$H_M^{-2} : \begin{cases} A \to A', \\ [AB) \to [A'B'). \end{cases}$$

2) N';

$N' = [AC) \cap [A'B')$.

3) N; $N = H_M^{-\frac{1}{2}}(N')$.

4) $(NN') = \ell$; $[NN']$. (см. рис. 22)

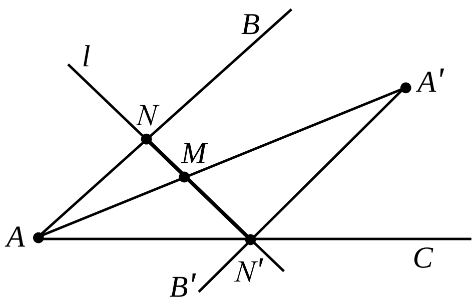

Рис. 22

III. Доказательство

1) По построению точка N' лежит на стороне $[AC)$ угла BAC;

$$H_M^{-\frac{1}{2}} : \begin{cases} N' \to N \text{ – по построению,} \\ [A'B') \to [AB) \text{ – по свойству взаимно обратных пре-} \end{cases}$$
образований.

2) Так как по построению $N' \in [A'B')$, то по свойству преобразований $N \in [AB)$.

3) Имеем: $H_M^{-\frac{1}{2}} : N' \to N$, откуда по определению гомотетии $\overline{MN} = -\frac{1}{2}\overline{MN'}$, и значит, $|MN'| = 2|MN|$ или $|MN|:|MN'| = 1:2$.

Итак, прямая ℓ, содержащая отрезок $[NN']$, является искомой.

IV. Исследование

Задача всегда имеет единственное решение, если данный угол не является развернутым.

Задача 3. Построить треугольник по периметру и двум его углам.

I. Анализ

Два угла α, β треугольника определяют его форму, а периметр – его размеры.

Легко построить $\Delta A_1B_1C_1$, в котором $\angle A_1 = \alpha$, $\angle C_1 = \beta$. Искомый треугольник гомотетичен вспомогательному. Гомотетия задается центром B_1 и коэффициентом κ, где $\kappa = \frac{P}{P_1}$, P – периметр искомого треугольника, P_1 – периметр вспомогательного $\Delta A_1B_1C_1$ (см. рис. 23.1).

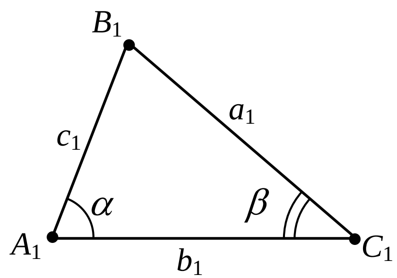

Рис. 23.1

II. Построение

1) $\Delta\ A_1B_1C_1$, $\angle A_1 = \alpha$, $\angle B_1 = \beta$.

Обозначим $A_1B_1 = c_1$, $A_1C_1 = b_1$, $B_1C_1 = a_1$ (см. рис. 23.2).

2) P; P разделим в отношении, равном отношению соответствующих сторон $\Delta\ A_1B_1C_1$ (см. рис. 23.3). Если a, b, c – стороны искомого $\Delta\ AB_1C$, то $a : b : c = a_1 : b_1 : c_1$.

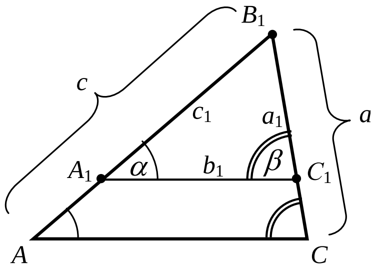

Рис. 23.2

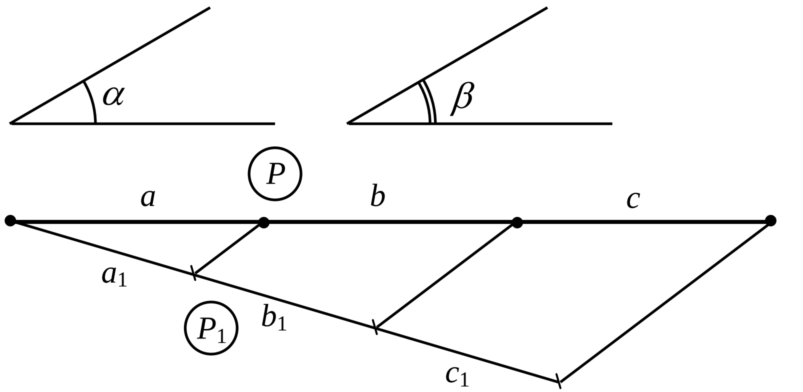

Рис. 23.3

3) На $[B_1A_1)$ отложим $B_1A = c$. На $[B_1C_1)$ отложим $B_1C = a$.

4) $\Delta\ B_1AC$.

III. Доказательство

1) По построению $\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1} = \dfrac{c}{c_1} = \dfrac{p}{p_1} = \kappa$.

2) $\Delta\ AB_1C \sim \Delta\ A_1B_1C_1$, т. к. $\angle B_1$ – общий,

$$\frac{B_1A}{B_1A_1} = \frac{B_1C}{B_1C_1} \Leftrightarrow \frac{c}{c_1} = \frac{a}{a_1} = \kappa \text{ – по построению.}$$

Тогда $\angle A = \angle A_1 = \alpha, \angle B = \angle B_1 = \beta$ и $\kappa = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{AC}{b_1}$, откуда $AC = b$.

3) $P_{AB_1C} = AB_1 + B_1C + AC = \underbrace{c + a}_{\text{по построению}} + b = P.$

Следовательно, $\Delta\ AB_1C$ – искомый.

IV. Исследование

Задача всегда имеет единственное решение, если $\alpha + \beta < 180^\circ$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Даны два отрезка AB и A_1B_1, лежащие на параллельных прямых и не равные друг другу. Докажите, что существует одна гомотетия, отображающая A на A_1 и B на B_1, и вторая гомотетия, отображающая A на B_1 и B на A_1. Постройте центр каждой гомотетии и найдите их коэффициенты.

2. Гомотетия задана двумя парами соответствующих точек A и A_1, B и B_1. Постройте образ произвольной точки C при этой гомотетии, не находя центр гомотетии.

3. Докажите, что два треугольника с соответственно параллельными сторонами гомотетичны или равны.

4. Постройте два квадрата так, чтобы один из них можно было отобразить на другой при помощи гомотетии. Сколькими гомотетиями это можно сделать?

5. Докажите, что гомотетия отображает окружность на окружность.

6. Докажите, что существуют две гомотетии, каждая из которых одну из двух неравных окружностей отображает на другую.

7. Пусть $ABCD$ – произвольный четырехугольник, M – любая точка плоскости, M_1, M_2, M_3, M_4 – точки, симметричные точке M относительно середин сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что $M_1M_2M_3M_4$ – параллелограмм.

8. Через точку касания двух окружностей проведены две произвольные прямые, которые пересекают эти окружности вторично в точках A, B и C, D, причем точки A и B лежат на одной окружности, C и D – на другой. Докажите, что прямые AB и CD параллельны.

9. Через точку касания двух окружностей проведена секущая. Докажите, что касательные к этим окружностям в точках пересечения их с секущей параллельны.

10. Пусть A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, AC и AB соответственно треугольника ABC, а точки A_2, B_2, C_2 – образы вершин A, B, C при симметрии относительно произвольной точки P плоскости. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

11. Докажите, что середины сторон любой трапеции, точка пересечения ее диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

12. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABO и CDO, касаются в точке O.

13. Две окружности касаются друг друга в точке A, а общая касательная касается этих окружностей в точках B и С. Докажите, что угол BAC – прямой.

14. Две окружности касаются внутренним образом в точке A. Хорда MN большей окружности касается меньшей окружности в точке P. Докажите, что луч AP – биссектриса угла MAN. Докажите аналогичную теорему для случая внешнего касания окружностей.

15. Постройте прямую, параллельную основаниям данной трапеции, так, чтобы две образовавшиеся трапеции были гомотетичны.

16. На плоскости заданы две концентрические окружности. Проведите хорду в большей из них так, чтобы она делилась меньшей окружностью на три равные части.

17. Дан острый угол AOB и внутри его точка C. Найти на стороне OB точку M, равноудаленную от стороны OA и от точки C.

18. Постройте квадрат так, чтобы одна его сторона касалась данной окружности, а противоположная служила хордой этой окружности.

19. В данный круговой сектор с углом, меньшим развернутого, вписать окружность, касающуюся боковых радиусов и дуги сектора.

20. В данный треугольник впишите прямоугольник с отношением сторон $2:1$.

21. В данный треугольник ABC впишите треугольник $A_1B_1C_1$ со сторонами, соответственно перпендикулярными сторонам треугольника ABC.

22. Постройте параллелограмм по стороне, отношению диагоналей и углу между диагоналями.

23. Даны пересекающиеся прямые a и b и точка M, не принадлежащая им. Постройте окружность, касающуюся данных прямых и проходящую через данную точку.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГОМОТЕТИЙ И ПОДОБИЙ

Задача 1. Составить уравнение гомотетии, заданной коэффициентом $\kappa = -\frac{1}{2}$ и центром $S(-3, 4)$. Найти образ точки $A(5, -6)$, прообраз точки $B'(-12, 4)$. Дать графическую иллюстрацию.

Решение: 1) Пусть гомотетия $H_S^{-\frac{1}{2}}$ произвольную точку $M(x, y)$ плоскости переводит в точку $M'(x', y')$. Установим зависимость между координатами образа и прообраза.

$H_S^{-\frac{1}{2}} : M(x, y) \to M'(x', y')$, тогда по определению гомотетии $\overline{SM'} = -\frac{1}{2}\overline{SM}$.

Запишем это векторное равенство в координатах:

$$\left(\overline{x'+3;\ y'-4}\right) = -\frac{1}{2}\left(\overline{x+3;\ y-4}\right).$$

Приравняем соответствующие координаты, получим

$$\begin{cases} x'+3 = -\frac{1}{2}(x+3), \\ y'-4 = -\frac{1}{2}(y-4), \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{9}{2}, \\ y' = -\frac{1}{2}y + 6. \end{cases} \qquad (*)$$

(*) – уравнение гомотетии $H_S^{-\frac{1}{2}}$, где $S\,(-3,4)$.

2) $H_S^{-\frac{1}{2}} : A\,(5,-6) \to A'\,(x', y')$. По уравнению гомотетии найдем координаты A':

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}\cdot 5 - \frac{9}{2}, \\ y' = -\frac{1}{2}\cdot(-6) + 6, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x' = -7, \\ y' = 9. \end{cases}$$

Следовательно, $A'\,(-7, 9)$.

3) $H_S^{-\frac{1}{2}} : B\,(x, y) \to B'\,(-12, 4)$.

Подставив координаты точки B' в уравнение (*), найдем

$$B: \begin{cases} x = 15 \\ y = 4 \end{cases}, \text{ т. е. } B\,(15; 4).$$

4) Проиллюстрируем графически.

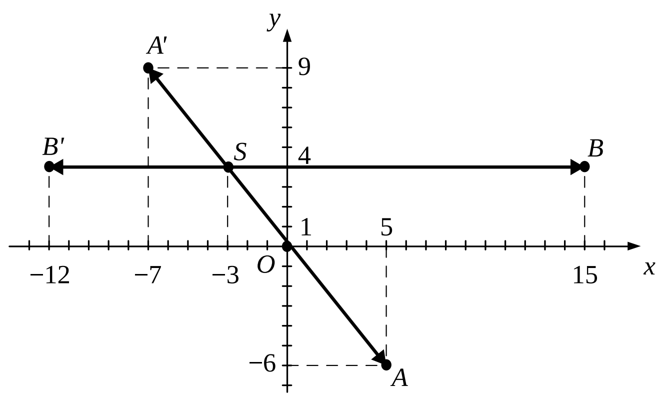

Рис. 24

Задача 2. Составить уравнение гомотетии с центром $S\,(S_1, S_2)$ и коэффициентом κ, $\kappa \neq 0$.

Решение: Возьмем произвольную точку плоскости $M\,(x, y)$, подействуем на нее гомотетией H_S^{κ}, получим точку $M'\,(x', y')$. Выразим координаты образа M' через координаты прообраза M.

По определению гомотетии

$$\overline{SM'} = \kappa \cdot \overline{SM} \;\text{ или }\; \left(\overline{x' - S_1, y' - S_2}\right) = \kappa\left(\overline{x - S_1; y - S_2}\right).$$

Откуда $\begin{cases} x' = \kappa(x - S_1) + S_1, \\ y' = \kappa(y - S_2) + S_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \kappa x + (1-\kappa)\cdot S_1, \\ y' = \kappa y + (1-\kappa)\cdot S_2, \end{cases}$ – уравнение гомотетии с центром $S\,(S_1, S_2)$ и коэффициентом κ.

Частный случай. Пусть центр гомотетии S совпадает с началом O (0; 0) ПДСК. Тогда уравнение гомотетии примет вид:

$$\begin{cases} x' = \kappa x, \\ y' = \kappa y. \end{cases}$$

Его называют каноническим уравнением гомотетии H_O^{κ}.

В заключение отметим, что формулы гомотетии в общем случае приводятся к виду $\begin{cases} x' = \kappa x + a \\ y' = \kappa y + b \end{cases}$, где κ – коэффициент гомотетии. Центр гомотетии может быть найден как инвариантная точка гомотетии, т. е. из системы $\begin{cases} x = \kappa x + a, \\ y = \kappa y + b. \end{cases}$

Задача 3. Найти уравнение образа прямой $m: x - 2y + 1 = 0$ при гомотетии с коэффициентом $\kappa = 2$, зная две инвариантные прямые гомотетии $a: x + y - 5 = 0$ и $b: 2x - y + 2 = 0$. Дать графическую иллюстрацию.

Решение:

1) По условию a и b – инвариантные прямые гомотетии, следовательно, каждая из них проходит через центр S гомотетии. Найдем S, решив совместно уравнения прямых a, b.

$$\begin{cases} x+y-5=0, \ \big| \cdot(-2) \\ 2x-y+2=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases},$$

$$3x \qquad -3=0$$

$$-3y+12=0$$

$S\,(1;4)$ – центр гомотетии.

2) Запишем уравнение гомотетии H_S^2.

$$\begin{cases} x' = 2x+(1-2)\cdot 1, \\ y' = 2y+(1-2)\cdot 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x-1, \\ y' = 2y-4. \end{cases}$$

3) Найдем образ прямой $m: x-2y+1=0$. Для этого из уравнения гомотетии H_S^2 выразим координаты прообраза через координаты образа:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}x' + \dfrac{1}{2}, \\ y = \dfrac{1}{2}y' + 2. \end{cases}$$

Подставим их в уравнение прямой m, получим

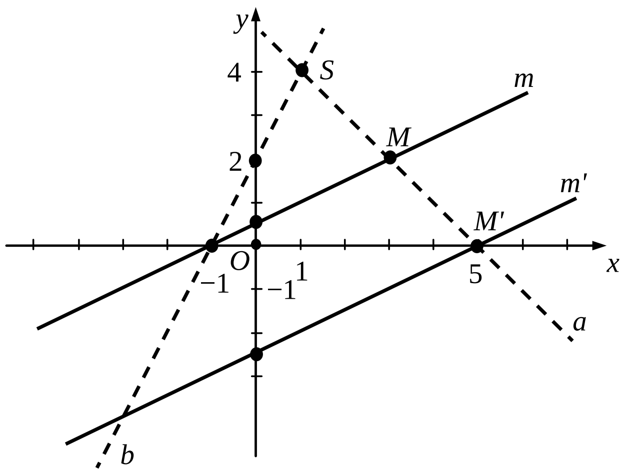

Рис. 25

$$\left(\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}\right) - 2\cdot\left(\frac{1}{2}y' + 2\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x' - y' - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x' - 2y' - 5 = 0$ – уравнение прямой m'.

4) Проиллюстрируем графически (см. рис. 25).

Задачу 3 можно решить другими способами. Укажем еще один способ.

2-й способ

1) Сначала так же находим центр гомотетии $S\,(1,4)$.

2) По условию имеем:

$$H_S^2: \begin{cases} a \to a, \text{ т.к. } a - \text{инвариантная прямая,} \\ m \to m, \text{ где } m' \| m, \text{ т.к. } m \text{ не проходит через точку } S. \end{cases}$$

Тогда гомотетия H_S^2 точку M пересечения прямых a и m переводит в точку $M' = a \cap m'$ (см. рис. 25). Найдем эти точки.

а) $M: \begin{cases} x+y-5=0, \\ x-2y+1=0, \end{cases} \Big| \cdot(-1) \Big| \cdot 2 \Rightarrow M\,(3;2).$

$$3y-6=0$$

$$3x \qquad -9=0$$

б) $H_s^{\,2}: M\,(3,2) \to M'(x', y')$,

откуда $\overline{SM'} = 2\overline{SM}$ или $\left(\overline{x'-1;\, y'-4}\right) = 2\left(\overline{2;-2}\right)$

или $\begin{cases} x'-1=4, \\ y'-4=-4, \end{cases}$ и значит, $\begin{cases} x'=5, \\ y'=0. \end{cases}$ $M'\,(5;0)$.

3) Поскольку $m' \| m$, то m' может быть задана уравнением $x-2y+c=0$. И так как M' лежит на этой прямой, то $c=-5$. Таким образом, $m': x-2y-5=0$.

Задача 4. Найти уравнение образа окружности $(x+1)^2 + y^2 = 1$ при гомотетии с коэффициентом $\kappa = -3$, если точка $A'\,(5,-3)$ является образом точки $A\,(1;1)$. Проиллюстрировать графически.

Решение:

1) Найдем центр гомотетии $S\left(S_1, S_2\right)$.

По условию $H_s^{-3}: A(1,1) \to A'(5,-3)$, тогда $\overline{SA'} = -3\overline{SA}$ или

$$\left(\overline{5-S_1;-3-S_2}\right) = -3\left(\overline{1-S_1;1-S_2}\right),$$

откуда $\begin{cases} 5-S_1 = -3+3S_1, \\ -3-S_2 = -3+3S_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_1 = 2, \\ S_2 = 0. \end{cases}$

Точка $S\left(2, 0\right)$ – центр гомотетии.

2) Запишем уравнение гомотетии

$$H_S^{-3}: \begin{cases} x' = -3x + (1+3)\cdot 2, \\ y' = -3y + (1+3)\cdot 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -3x+8, \\ y' = -3y. \end{cases}$$

3) Чтобы найти уравнение образа данной окружности, достаточно определить образ центра этой окружности и радиус R искомой окружности.

$O_1(-1, 0)$ – центр, $r = 1$ – радиус данной окружности $\left(O_1, r\right)$.

Найдем O_1', R.

а) $O_1': \begin{cases} x' = -3\cdot(-1)+8, \\ y' = -3\cdot 0, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x' = 11, \\ y' = 0. \end{cases}$

Точка $O_1'\left(11; 0\right)$ – центр искомой окружности.

б) Очевидно, что $R = |\kappa|\cdot r$.

В самом деле, если $r = |O_1O| = 1$ и $H_S^{-3}: \begin{cases} O_1\ (-1;0) \to O_1'\ (11;0), \\ O\ (0;0) \to O'\ (8;0), \end{cases}$

то $R = |O_1'O'| = 3$.

Тогда $(x-11)^2 + y^2 = 9$ – уравнение окружности $\left(O_1', R\right)$.

4) Проиллюстрируем графически (см. рис. 26).

Задачу 4 можно решить другими способами.

Коротко остановимся на аналитическом представлении подобия. Отметим, что уравнения любого подобия в ПДСК имеют вид

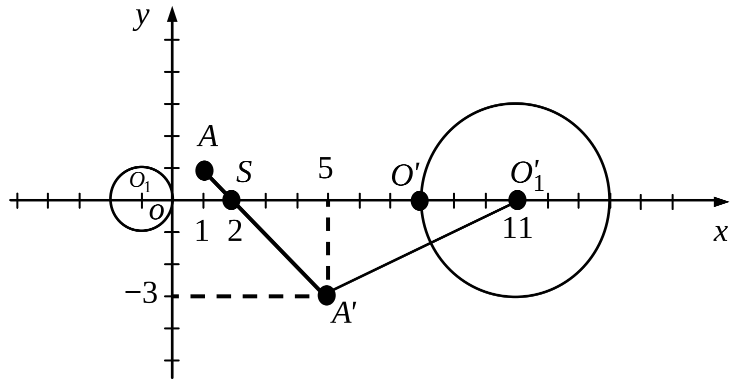

Рис. 26

$\begin{cases} x' = ax - by + x_0, \\ y' = bx + ay + y_0, \end{cases}$ или $\begin{cases} x' = ax + by + x_0, \\ y' = bx - ay + y_0, \end{cases}$ где числа a и b одновременно не равны 0.

В этом случае коэффициент подобия $\kappa = \sqrt{|\Delta|}$, где Δ – определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных x и y в формулах подобия.

Задача 5. Представить подобие в виде композиции гомотетии и движения, указав вид движения.

$$\begin{cases} x' = 5x - 12y + 2, \\ y' = 12x + 5y - 1. \end{cases}$$

Решение:

1) Найдем коэффициент подобия κ:

$$\kappa = \sqrt{|\Delta|}, \text{ где } \Delta = \begin{vmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{vmatrix} = 25 + 144 = 169. \ \kappa = 13.$$

2) Любое подобие с коэффициентом κ можно представить в виде композиции гомотетии H с тем же коэффициентом и любым центром и движения f. В качестве центра гомотетии возьмем точку $O(0;0)$, тогда уравнение гомотетии H_0^{13} будет иметь вид:

$$\begin{cases} x' = 13x \\ y' = 13y \end{cases}.$$

3) Найдем уравнение движения f. Для этого прежде выразим движение через подобие и гомотетию. Умножим обе части равенства $\Pi_\kappa = f \cdot H_O^\kappa$ справа на $H_O^{\frac{1}{\kappa}}$:

$$\Pi_\kappa \cdot H_O^{\frac{1}{\kappa}} = \left(f \cdot H_O^\kappa\right) \cdot H_O^{\frac{1}{\kappa}};$$

получим $f = \Pi_\kappa \cdot H_O^{\frac{1}{\kappa}}$. В нашем случае $f = \Pi_{13} \cdot H_O^{\frac{1}{13}}$.

Пусть гомотетия $H_O^{\frac{1}{13}} : M\left(x, y\right) \to M'\left(x', y'\right)$,

где $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{13}x, \\ y' = \dfrac{1}{13}y, \end{cases}$ а подобие $\Pi_\kappa : M\left(x'; y'\right) \to M''\left(x''; y''\right)$,

где $\begin{cases} x'' = 5x' - 12y' + 2, \\ y'' = 12x' + 5y' - 1. \end{cases}$

Тогда $f:\ M\left(x, y\right) \to M''\left(x'', y''\right)$

и $\begin{cases} x'' = 5 \cdot \dfrac{1}{13}x - 12 \cdot \dfrac{1}{13}y + 2, \\ y'' = 12 \cdot \dfrac{1}{13}x + 5 \cdot \dfrac{1}{13}y - 1, \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \dfrac{5}{13}x - \dfrac{12}{13}y + 2, \\ y'' = \dfrac{12}{13}x + \dfrac{5}{13}y - 1 \end{cases}$ – уравнение движения f.

Определим вид движения.

а) $\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{5}{13} & -\dfrac{12}{13} \\ \dfrac{12}{13} & \dfrac{5}{13} \end{vmatrix} = \dfrac{25}{169} + \dfrac{144}{169} = 1.$ f – движение I рода.

б) $\begin{cases} x = \dfrac{5}{13}x - \dfrac{12}{13}y + 2, \\ y = \dfrac{12}{13}x + \dfrac{5}{13}y - 1, \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 12y - 26 = 0, \\ 12x - 8y - 13 = 0, \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 8 \\ \cdot 12 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-12) \\ \cdot 8 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{4}, \\ y = 1. \end{cases}$$

$$\underline{208x \ \ - 364 = 0}$$

$$-208y + 208 = 0$$

Движение имеет одну неподвижную точку, следовательно, является поворотом с центром $S\left(\dfrac{7}{4};\ 1\right)$ и углом $\alpha = \arccos\dfrac{5}{13}$.

Таким образом, подобие, заданное уравнением

$$\begin{cases} x' = 5x - 12y + 2, \\ y' = 12x + 5y - 1, \end{cases}$$

является композицией гомотетии $H_0^{13} : \begin{cases} x' = 13x, \\ y' = 13y \end{cases}$ и поворота R_S^α

с центром $S\left(\dfrac{7}{4};\ 1\right)$ и углом $\alpha = \arccos\dfrac{5}{13}$, заданного уравнением:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{5}{13}x - \dfrac{12}{13}y + 2, \\ y' = \dfrac{12}{13}x + \dfrac{15}{13}y - 1. \end{cases}$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти координаты образа точки $M\,(2,-4)$ при гомотетии с центром $M_0\,(-1,-2)$ и коэффициентом $\kappa=-3$.

2. Найти координаты образа точки $M\,(3,-5)$ при гомотетии с центром $M_0\,(1,-5)$, при которой начало координат $O\,(0,0)$ переходит в точку $A\,(-4,20)$.

3. Найти уравнение образа прямой $d: 2x+3y=0$ при гомотетии с центром $M_0\,(1,2)$, при которой прямая $a: x+y+1=0$ переходит в прямую $a': x+y-5=0$. Дать графическую иллюстрацию.

4. Найти уравнение прообраза прямой $d: 3x-y+1=0$ при гомотетии, зная, что точки $A'\,(7;4)$ и $B'\,(11;0)$ являются образами точек $A\,(2;1)$, $B\,(3;0)$. Дать графическую иллюстрацию.

5. Найти образ точки $M\,(5;3)$ при гомотетии с коэффициентом $\kappa=-2$, зная две инвариантные прямые гомотетии

$$a: 2x-y+2=0 \text{ и } b: x+4y+1=0.$$

6. Найти прообраз точки $A'\,(3;-4)$, образ точки $B\,(-4;5)$ при гомотетии с коэффициентом $\kappa=-2$, при которой прямые

$$a: 2x-y+6=0 \text{ и } b: 6x+5y-30=0$$

переходят соответственно в прямые

$$a': 2x-y=0 \text{ и } b': 6x+5y=0.$$

Проиллюстрировать графически.

7. Найти уравнение образа окружности $(x-3)^2+(y+1)^2=4$ при гомотетии с коэффициентом $\kappa=3$, если точка $A'\,(2;-3)$ является образом точки $A\,(1;1)$. Дать графическую иллюстрацию.

8. Найти уравнение прообраза оси OX, прообраза оси OY при гомотетии с центром $M_0\,(1,2)$, переводящей прямую $a: 3x+4y-5=0$ в прямую $a': 3x+4y+19=0$.

Дать графическую иллюстрацию.

9. Какие из данных формул являются формулами подобия? Найти коэффициенты заданных подобий.

1) $\begin{cases} \tilde{o}' = 3\tilde{o}-5\acute{o}+1, \\ \acute{o}' = 5\tilde{o}+3\acute{o}-7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x+1, \\ y' = \dfrac{1}{2}y+9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x' = 6x+4y-7, \\ y' = 4x+6y-9; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x' = 8y+3, \\ y' = 8x-1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x' = 3x-2y-1, \\ y' = 3x+2y; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x' = -2x+1, \\ y' = 2y-3; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x+3y+2, \\ y' = 3x-\dfrac{1}{2}y+4; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x' = -4x+3y-1, \\ y' = 3x+4y+9; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x' = 3y-1, \\ y' = 3y-x+1. \end{cases}$

10. Представить подобие, заданное уравнением, в виде композиции гомотетии и движения, указав вид движения.

1) $\begin{cases} x' = 3x-4y+1, \\ y' = 4x+3y-7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x' = -4x+3y-1, \\ y' = 3x+4y+9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x' = 4x+2y+5, \\ y' = 2x-4y+3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}y-3, \\ y' = -\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{2}y+2. \end{cases}$

11. Представить подобие $\begin{cases} x' = 4x+3y-1, \\ y' = -3x+4y \end{cases}$ в виде композиции гомотетии и движения с общей инвариантной точкой.

12. Каким преобразованием является композиция двух гомотетий с разными центрами и коэффициентами, равными κ_1 и κ_2?

13. Найти образ прямой $a: 2x + y - 3 = 0$ при подобии, заданном уравнением

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - 3, \\ y' = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + 2. \end{cases}$$

14. Составить уравнение образа окружности $(x+1)^2 + y^2 = 9$ при подобии, заданном уравнением $\begin{cases} x' = -2x + 1, \\ y' = 2y - 3. \end{cases}$ Проиллюстрировать графически.

Литература

1. Атанасян, Л. С. Геометрия : в 2 ч. – Ч. 1 : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев. – М. : Просвещение, 1986. – 336 с.

2. Аргунов, Б. И. Преобразования плоскости : учеб. пособие для студентов-заочников педагогических институтов / Б. И. Аргунов. – М. : Просвещение, 1976. – 80 с.

3. Гусева, Н. И. Сборник задач по геометрии : в 2 ч. – Ч. 1 : учеб. пособие / Н. И. Гусева, Н. С. Денисова, О. Ю. Тесля. – М. : КНОРУС, 2012. – 528 с.

4. Понарин, Я. П. Перемещения и подобия плоскости : пособие для самообразования учителей / Я. П. Понарин, З. А. Скопец. – К. : Радянська школа, 1981. – 176 с.

Учебное издание

АДАМЧУК Маргарита Станиславовна
ЧИКИШЕВА Лариса Григорьевна

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

Практикум по курсу геометрии

Корректор М. Ф. Шатохина
Верстка О. П. Резников

Подписано в печать 19.05.2014 г. Бумага «PaperOne».
Гарнитура «Times New Roman». Формат $60\times84\,{}^{1}/_{16}$.
Тираж 500 экз. (1-й завод 1–100 экз.). Объем 5,5 усл. п. л. Заказ № 1070-13.

Издательство Сахалинского государственного университета
693007, Южно-Сахалинск, ул. Ленина, 290, каб. 32.
Тел. (4242) 45-23-16, факс (4242) 45-23-17.
E-mail: polygraph@sakhgu.ru,
izdatelstvo@sakhgu.ru