

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования
«Сахалинский государственный университет»
Кафедра математики

УТВЕРЖДЕН

на заседании кафедры

«19» февраля 2024 г., протокол № 6

 Н. А. Самсикова

**ФОНД
ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

Б1.О.13 Теория вероятностей и математическая статистика

Направления подготовки
10.03.01 Информационная безопасность

Профиль подготовки
Безопасность автоматизированных систем
(по отрасли или в сфере профессиональной деятельности)

Уровень высшего образования
БАКАЛАВРИАТ

г. Южно-Сахалинск
2024 г.

1. Формируемые компетенции и индикаторы их достижения по дисциплине

Код компетенции	Содержание компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции
ОПК-3	Способен использовать необходимые математические методы для решения задач профессиональной деятельности	ОПК-3.1 - Знает основные понятия математического анализа и алгебры, необходимые для решения задач профессиональной деятельности; ОПК-3.2 - Умеет применять основные математические методы, а также методы теории вероятностей и математической статистики для решения задач профессиональной деятельности; ОПК-3.3 - Владеет практическими навыками решения математических задач и построения статистических моделей экспериментов при решении прикладных задач в области профессиональной деятельности.
ОПК-11	Способен проводить эксперименты по заданной методике и обработку их результатов;	ОПК-11.1 - Знает методики обработки и оценки достоверности результатов измерений; ОПК-11.2 - Умеет строить модели экспериментов при решении прикладных задач, оценивать параметры моделей, описывать и вычислять характеристики критериев проверки гипотез, а также проводить эксперименты, обрабатывать и представлять полученные результаты; ОПК-11.3 - Владеет навыками проведения исследований и экспериментов, оформления отчетов при проведении разработок в области функционирования, развития и обеспечения информационной безопасности автоматизированных систем

2. Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине (модулю)

№ п/п	Контролируемые разделы (темы) дисциплины	Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства
1.	Формулы комбинаторики и классическая вероятность	ОПК-3, ОПК-11	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
2.	Аксиоматика теории вероятностей и основные формулы	ОПК-3, ОПК-11	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
3.	Независимые испытания	ОПК-3, ОПК-11	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
4.	Дискретные случайные величины	ОПК-3, ОПК-11	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
5.	Непрерывные случайные величины	ОПК-3, ОПК-11	Задания к практическим работам, контрольные

			вопросы
6.	Двумерные случайные величины	ОПК-3, ОПК-11	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
7.	Предельные теоремы	ОПК-3, ОПК-11	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
8.	Случайные процессы	ОПК-3, ОПК-11	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
9.	Метод статистических испытаний	ОПК-3, ОПК-11	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
10.	Основные виды распределений в статистике	ОПК-3, ОПК-11	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
11.	Точечные статистические оценки и методы их построения	ОПК-3, ОПК-11	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
12.	Доверительные интервалы	ОПК-3, ОПК-11	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
13.	Статистические гипотезы	ОПК-3, ОПК-11	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
14.	Критерии согласия	ОПК-3, ОПК-11	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
15.	Элементы дисперсионного анализа	ОПК-3, ОПК-11	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
16.	Элементы корреляционного и регрессионного анализа	ОПК-3, ОПК-11	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
17.	Зачет	ОПК-3, ОПК-11	Контрольные вопросы

3. Оценочные средства

Темы и планы практических занятий

1. Классическая вероятность и геометрическая вероятность (2 ч.)
2. Аксиоматика, свойства вероятности и основные формулы (2 ч.)
3. Независимые испытания (2 ч.)
4. Законы распределения и характеристики дискретных случайных величин (3 ч.)
5. Законы распределения и характеристики непрерывных случайных величин (3 ч.)
6. Совместное распределение случайных величин, условные законы, корреляция (2 ч.)
7. Задачи на предельные теоремы (2 ч.)
8. Марковские процессы (2 ч.)
9. Метод статистических испытаний (2 ч.)

10. Задачи на применение свойств гамма- и бета-функций, законов распределения основных статистик (2 ч.)
11. Задачи на построение и оценку выборочных статистик (2 ч.)
12. Задачи на построение доверительных интервалов, оценку их точности и определение требуемого объема выборки (2 ч.)
13. Задачи на проверку статистических гипотез, оценку ошибки второго рода, планирование выборки, выработку решающего правила (4 ч.)
14. Задачи на применение критериев согласия (2 ч.)
15. Задачи на применение методов дисперсионного анализа (2 ч.)
16. Задачи на применение методов регрессионного анализа (2 ч.)

Пример занятия. Занятие 2. Аксиоматика, свойства вероятности и основные формулы

1. Докажите следующие свойства вероятности: а) $P(\emptyset) = 0$; б) $\forall A \in S \Rightarrow P(A) \in [0; 1]$; в) $\forall A_1, A_2, \dots, A_n \in S: A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j) \wedge \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega \Rightarrow \sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$; г) $\forall A, B \in S: A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
2. Вероятности появления каждого из двух независимых событий A_1 и A_2 соответственно равны p_1 и p_2 . Найти вероятность появления только одного из этих событий.
3. Сколько надо бросить игральных костей, чтобы с вероятностью, меньшей 0,3, можно было ожидать, что ни на одной из выпавших граней не появится шесть очков?
4. Из n экзаменационных билетов студент A подготовил только m ($m < n$). В каком случае вероятность вытащить на экзамене «хороший» для него билет выше: когда он берет наудачу билет первым, или вторым, ..., или -м ($k < n$) по счету из сдающих экзамен?
5. В одной урне 5 белых и 6 черных шаров, а в другой — 4 белых и 8 черных шаров. Из первой урны случайным образом вынимают 3 шара и опускают во вторую урну. После этого из второй урны также случайно вынимают 4 шара. Найти вероятность того, что все шары, вынутые из второй урны, белые.
6. Зависимость завтрашней погоды от погоды сегодняшней выражена следующей таблицей (модельная зависимость). Будем считать, что погода, которая может быть завтра, зависит от сегодняшней погоды и не зависит от погоды, которая была вчера и во все предшествующие дни. Определить:
 - а) вероятность дождя послезавтра, если сегодня солнечно;
 - б) вероятность того, что вчера был дождь, если позавчера было солнечно, а сегодня облачно.

		Завтра		
		Солнечно	Облачно	Дождь
Сегодня	Солнечно	0,5	0,3	0,2
	Облачно	0,4	0,3	0,3
	Дождь	0,2	0,5	0,3

7. Некоторый эксперимент независимо повторяют 3 раза, ожидая осуществление события A , имеющего постоянную вероятность p . Определите вероятность того, что A наступит ровно 1 раз, 2 раза, 3 раза, ни одного раза. Чему равна сумма этих вероятностей?

8. Пусть в отдельное испытание в задаче 6 может завершиться осуществлением одного из трех событий A , B , C (полная группа несовместных событий, имеющих вероятности p_1 , p_2 и p_3 соответственно). Определите вероятность того, что серия из четырех испытаний завершится осуществлением события A — 2 раза, событий B и C — по одному разу.

Указания по выполнению заданий:

1) задание на доказательство выполняется путем вывода требуемого утверждения из трех аксиом вероятности;

2) задачи, требующие применения основных формул элементарной теории вероятностей, рекомендуется начать с введения последовательных обозначений.

Темы дисциплины для самостоятельного изучения

1. Занимательные вероятностные парадоксы.
2. Предельные теоремы и их доказательство.
3. Многомерные случайные величины.
4. Случайные процессы.
5. Вероятностные модели в задачах практики.
6. Вероятность в теории информации.
7. Логистическая регрессия.
8. Многофакторный дисперсионный анализ.
9. Метод главных компонент в статистике.
10. Факторный анализ.

Индивидуальные практические задания

3 курс, 5 семестр

Задание 1. Комбинаторика и классическая вероятность (примеры заданий)

1. Какова вероятность того, что в тщательно перетасованной колоде (54 карты) оба джокера окажутся рядом (будут лежать один под другим)?

2. Брошены две игральные кости. Найти вероятность следующих событий: а) сумма выпавших очков равна семи; б) сумма выпавших очков равна восьми, а разность — четырем; в) сумма выпавших очков равна восьми, если известно, что их разность равна четырем.

3. В коробке 5 синих, 4 красных и 3 зеленых карандаша. Наудачу вынимают 3 карандаша. Какова вероятность того, что: а) все они одного цвета; б) все они разных цветов; в) среди них 2 синих и 1 зеленый карандаш.

Методические указания: приступая к решению, проанализировать пространство элементарных событий, сформулировать вопрос задачи в терминах случайных событий; при подсчете числа возможных комбинаций использовать формулы комбинаторики.

Задание 2. Формулы теории вероятностей (примеры заданий)

1. Двое осуществляют связь по каналу с сильными помехами, используя двоичный код. Первый передает код в виде трех сигналов (трехзначное двоичное число). Второй, получив сигнал, отвечает тем же кодом, который только что принял. Определить вероятность прямой и обратной передачи без ошибок, а также вероятность получения

первым в точности того же кода, который он передавал второму, если искажение отдельных сигналов происходит независимо и с вероятностью 0,43.

2. Сколько надо бросить игральных костей, чтобы с вероятностью, меньшей 0,3, можно было ожидать, что ни на одной из выпавших граней не появится шесть очков?

3. Зависимость завтрашней погоды от погоды сегодняшней выражена следующей таблицей (модельная зависимость). Будем считать, что погода, которая может быть завтра, зависит от сегодняшней погоды и не зависит от погоды, которая была вчера и во все предшествующие дни. Определить: а) вероятность дождя послезавтра, если сегодня солнечно; б) вероятность того, что вчера был дождь, если позавчера было солнечно, а сегодня облачно.

		Завтра		
		Солнечно	Облачно	Дождь
Сегодня	Солнечно	0,5	0,3	0,2
	Облачно	0,4	0,3	0,3
	Дождь	0,2	0,5	0,3

Методические указания: при решении задач использовать основные формулы (вероятность суммы и произведения событий, вероятности противоположных событий), формулы полной вероятности и Байеса.

Задание 3. Независимые испытания (примеры заданий)

1. Вероятность того, что в партии из 8 изделий имеется хотя бы одно бракованное, составляет 57%. Найти вероятность того, что в партии не более одного бракованного изделия.

2. Фирма раскладывает рекламные листки по почтовым ящикам. Опыт работы показывает, что примерно в одном случае из двух тысяч следует заказ. Найти вероятность того, что при размещении 100 тысяч листов число заказов будет: а) равно 48; б) находиться в границах от 45 до 55.

3. Вероятность того, что случайно взятая деталь окажется второго сорта, равна $3/8$. Сколько нужно взять деталей, чтобы с вероятностью, равной 0,995, можно было ожидать, что доля деталей второго сорта отклонится от вероятности менее, чем на 0,01?

Методические указания: в задачах, где $n > 30$, использовать асимптотические формулы из теорем Пуассона и Муавра-Лапласа.

Задание 4. Дискретные случайные величины (примеры заданий)

1. Известны все возможные значения дискретной случайной величины X : $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Найти вероятности, соответствующие возможным значениям величины X , если известно, что $M(X) = 0,9$ и $M(X^2) = 1,3$.

2. Прибор комплектуется из двух деталей. Вероятность брака для первой детали – 0,1, а для второй – 0,05. Выбрано 4 прибора. Прибор считается бракованным, если в нем есть хотя бы одна бракованная деталь. Построить закон распределения для числа бракованных приборов среди выбранных 4 приборов.

3. Устройство состоит из большого числа независимо работающих элементов с одинаковой (очень малой) вероятностью отказа каждого элемента за время t . Найти среднее число отказавших за указанное время элементов, если вероятность того, что за это время что-либо откажет (хотя бы один элемент), равна 0,95.

Методические указания: при решении задач использовать определения основных характеристик дискретных случайных величин (и их статистический смысл).

Задание 5. Непрерывные случайные величины (примеры заданий)

1. Пассажир приходит в случайный момент на остановку, где может сесть на автобус или троллейбус (смотря что придет раньше). Автобус ходит с интервалами в 15 минут, троллейбус – 10 минут (независимо один от другого, оба времени распределены по равномерному закону). Найти функцию распределения времени ожидания и его среднее значение.

2. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} C(x+1)^{-3/2}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Вычислить константу C , функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность $P\left(\left|X - \frac{1}{3}\right| < 1\right)$.

3. Цена некоторой ценной бумаги нормально распределена. В течение последнего года 20% рабочих дней она была ниже 88 у. е., а 75% — выше 90 у. е. Найти: а) математическое ожидание и стандартное отклонение цены ценной бумаги; б) вероятность того, что в день покупки цена будет заключена в пределах от 83 до 96 у. е.; в) с надежностью 95% определить максимальное отклонение цены ценной бумаги от среднего значения (прогнозного) по абсолютной величине.

Методические указания: в задачах на непрерывные случайные величины часто полезно использовать определение функции распределения вероятностей $F_X(x) = P(X < x)$, а также основное свойство функции плотности вероятности $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Задание 6. Двумерные случайные величины (примеры заданий)

1. Двумерная случайная величина (X, Y) распределена по закону $f(x, y) = \frac{A}{1+x^2+x^2y^2+y^2}$. Найдите: а) коэффициент A ; б) вероятность попадания в квадрат с центром в начале координат и сторонами, параллельными осям координат и имеющими длину 2; в) выражения для плотностей составляющих (являются ли составляющие зависимыми случайными величинами?).

2. Совместный закон распределения пары (X, Y) задан таблицей.

$X \backslash Y$	0	1	2
-1	1/9	1/6	1/3
1	1/9	1/18	2/9

Найти закон распределения вероятностей случайной величины $X + Y$ и вычислить $\mu_{(2y+x)(y+x)}$. Исследовать вопрос о зависимости случайных величин X и Y .

3. Совместная плотность двумерной случайной величины (X, Y) имеет вид:

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x^2 + xy + y^2) & \text{при } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найдите: а) постоянную C ; б) плотности одномерных составляющих; в) условные плотности составляющих; г) характеристики $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$; д) r_{xy} .

Методические указания: при решении задач использовать определения и теоремы, рассмотренные в соответствующей лекции; в задаче 2 используйте свойства ковариации случайных величин.

Задание 7. Пределные теоремы (примеры заданий)

1. Средний размер вклада в отделении банка равен 6000 руб. Оценить вероятность, что случайно взятый вклад не превысит 10 000 руб.
2. По статистическим данным в среднем 87% новорожденных доживают до 50 лет. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что из 1000 новорожденных доля доживших до 50 лет будет отличаться от вероятности этого события не более чем на 0,04 (по абсолютной величине).
3. В целях контроля из партии в 100 ящиков взяли по одной детали из каждого ящика и измерили длину. Требуется оценить вероятность того, что вычисленная по данным выборки средняя длина детали отличается от средней длины детали во всей партии не более чем на 0,3 мм, если известно, что среднее квадратическое отклонение не превышает 0,8 мм.

Методические указания: при решении задач использовать формулы, рассмотренные в соответствующей лекции.

Задание 8. Случайные процессы (примеры заданий)

1. Трудоспособное население (постоянной численности) делится на работающих и безработных. Вероятность потерять работу в течение месяца составляет 2%, а вероятность ее найти — 16%. Определить стационарный уровень безработицы. Во сколько раз сократится доля безработных, если благодаря госпрограмме вероятность найти работу в течение месяца увеличится в двое?
2. Машина состоит из трех узлов, каждый из которых отказывает с интенсивностью $\lambda = 2$. Интенсивность восстановления отказавшего узла равна $\mu = 3$. Найти стационарное распределение числа работающих узлов.
3. Машина состоит из трех узлов. Среднее время безотказной работы каждого узла составляет 20 часов, а среднее время ремонта узла — 5 часов. Найти среднюю производительность машины, если при трех работающих узлах она равна 100%, при двух — 50%, а при одном или менее машина вообще не работает.

Методические указания: решение задач начать с изображения схемы (графа) состояний; в задаче 1 можно воспользоваться моделированием в Excel.

Задание 9. Метод статистических испытаний (примеры заданий)

1. Запишите явную формулу для разыгрывания показательной случайной величины с параметром $\lambda = 2$ и разыграйте 5 значений.
2. Выведите формулу для разыгрывания значений случайной величины, заданной в интервале $(0; \frac{1}{8})$ плотностью вероятности $f(x) = \frac{10}{(1+2x)^2}$, и разыграйте 5 возможных значений.
3. Выведите формулу для разыгрывания случайной величины, заданной функцией распределения $F(x) = 1 - \frac{1}{7}(e^{-x} + 2e^{-2x} + 4e^{-3x})$, $x > 0$.

Методические указания: при решении задач типа 1-2 достаточно помнить определения $F(x)$ и $f(x)$, а в задачах типа 3 необходимо воспользоваться методом суперпозиции.

Задание 10. Выборочный метод. Точечные оценки (примеры заданий)

1. Считая, что генеральная совокупность распределена непрерывно и равномерно на интервале $(0; 12)$, запишите плотности распределения $f_{x_{\min}}(x)$ и $f_{x_{\max}}(x)$ крайних членов вариационного ряда для выборки объемом $n = 5$.

2. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$ — случайные выборки объема n и m из нормально распределенной генеральной совокупности $N(a, \sigma^2)$ с исправленными выборочными дисперсиями s_x^2 и s_y^2 . Докажите, что выборочная характеристика

$$s_{x,y}^2 = \frac{1}{n+m-2} \left((n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2 \right)$$

является несмещенной оценкой теоретической дисперсии σ^2 .

3. Даны результаты 8 независимых измерений одной и той же величины (длины протяжки) прибором, не имеющим систематических ошибок: 369, 378, 315, 420, 385, 401, 372, 383 см. Определить несмещенную дисперсию ошибок измерения, если: а) номинальная длина протяжки неизвестна; б) номинальная длина протяжки известна и равна 375 см.

Методические указания: приступая к решению задач, повторите материал соответствующей лекции.

Задание 11. Основные виды распределений в статистике (примеры заданий)

1. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ и $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ — независимые нормально распределенные случайные величины: $\xi_i \sim N(0, \sigma^2)$ и $\eta_j \sim N(0, \sigma^2)$. Найдите закон распределения следующей случайной величины: $\gamma = \frac{(1/n) \sum \xi_i^2}{(1/m) \sum \eta_j^2}$.

2. Докажите, что в случае нормального распределения $N(a, \sigma^2)$ выборочная дисперсия (неисправленная) имеет дисперсию $D(\sigma_B^2) = \frac{2\sigma^4(n-1)}{n^2}$.

3. Докажите, что сумма двух независимых χ^2 -распределенных случайных величин подчиняется распределению χ^2 , причем $\chi_n^2 + \chi_m^2 = \chi_{n+m}^2$.

Методические указания: при решении задач полезно обратиться к определениям и теоремам, рассмотренным на лекциях.

Задание 12. Методы построения оценок (примеры заданий)

1. Найдите методом моментов оценку параметра θ ($\theta > 0$) для геометрического распределения с вероятностью «успеха» $p = \frac{1}{1+\theta}$ и докажите несмещенность найденной оценки.

2. Найдите методом максимального правдоподобия оценку параметра θ ($\theta > 0$) для геометрического распределения с вероятностью «успеха» $p = \frac{1}{1+\theta}$ и докажите несмещенность найденной оценки.

3. Найдите методом моментов оценки параметров θ и μ ($\theta, \mu > 0$) для сдвинутого показательного распределения $f(x; \theta, \mu) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}, x > \mu$.

Методические указания: перед решением задач повторите материал соответствующей лекций.

Задание 13. Доверительные интервалы (примеры заданий)

1. Постройте асимптотический доверительный интервал для вероятности успеха p в n испытаниях Бернулии, учитывая, что относительная частота $w \xrightarrow{\epsilon} N(p, \frac{p(1-p)}{n})$ при $n \rightarrow \infty$.

2. Для отрасли, включающей 1200 фирм, составлена случайная выборка из 19 фирм. По выборке оказалось, что в фирме в среднем работают $\bar{x} = 77,5$ человек при среднем квадратическом отклонении $s = 25$ человек. Пользуясь 95%-м доверительным интервалом, оцените среднее число работающих в фирме по всей отрасли и общее число работающих в отрасли. (Предполагается, что число работников в фирме имеет нормальное распределение.)

3. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,975 точность оценки математического ожидания a по выборочному среднему равна $\delta = 0,3$, если известно среднее квадратическое отклонение $\sigma = 1,2$ нормальной генеральной совокупности.

Методические указания: при решении задач использовать теоретические результаты для доверительных интервалов, полученные на лекции.

Задание 14. Проверка статистических гипотез (примеры заданий)

1. По выборке объема $n = 9$, извлеченной из нормальной генеральной совокупности с известным $\sigma = 4$, на уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверяется основная гипотеза $H_0: a = a_0 = 15$. Требуется: а) найти мощность критерия для проверки $H_1: a = a_1 = 17$; б) найти объем выборки n_1 , при котором мощность критерия равна 0,8.

2. В таблице представлены сгруппированные данные о расходе сырья на одно изделие для двух различных технологий изготовления.

Показатель	Старая технология			Новая технология			
Расход	304	307	308	303	304	306	308
Число изделий	1	4	4	2	6	4	1

В предположении, что расход сырья как при старой, так и при новой технологии имеет нормальное распределение, выяснить, влияет ли изменение технологии на средний расход сырья на одно изделие. Принять $\alpha = 0,1$.

3. Из 100 выстрелов по цели каждым из двух орудий зарегистрировано соответственно $m_1 = 12$ и $m_2 = 8$ промахов. На уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу $H_0: p_1 = p_2$ о равенстве вероятностей промаха орудий при конкурирующей гипотезе: $H_1: p_1 \neq p_2$.

Методические указания: при решении задач использовать классические критерии и полученные для них формулы.

Задание 15. Критерии согласия (примеры заданий)

1. Проведено исследование посещаемости популярного Интернет-сайта. В таблице ниже приведены данные о распределении числа посетителей по часам (наблюдение велось в течение длительного времени).

Число посетителей	Часы	Число посетителей	Часы
0	57	7	139
1	203	8	45

2	383	9	27
3	525	10	10
4	532	11	4
5	408	12	1
6	273	14	1

На уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить гипотезу о том, что посещаемость сайта можно описать распределением Пуассона.

2. В следующей таблице представлены данные о месячных доходах жителей некоторого региона ($n = 1000$).

x_i	<500	500...1000	1000...1500	1500...2000	2000...2500	>2500
n_i	58	96	239	328	147	132

На уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить гипотезу, что доходу жителей региона можно описать нормальным распределением.

3. За 6 рабочих дней спрос на некоторый товар составлял: 104, 80, 96, 120, 113, 82 кг. На уровне значимости $\alpha = 0,1$ проверить гипотезу о том, что спрос распределен равномерно в интервале (75; 125).

Методические указания: при решении задач использовать критерий χ^2 -Фишера и критерий Колмогорова.

Задание 16. Корреляционный и дисперсионный анализ (примеры заданий)

1. Найдите выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X по данным следующей таблицы:

Y	X					n_y
	20	25	30	35	40	
16	4	6				10
26		8	10			18
36			32	3	9	44
46			4	12	6	22
56				1	5	6
n_x	4	14	46	16	20	$n = 100$

2. Найдите выборочное уравнение квадратичной регрессии по данным следующей таблицы:

Y	X			n_y
	0	4	5	
1	50	5	1	56
35		44		44
50		5	45	50
n_x	50	54	46	$n = 150$

3. Произведено 14 испытаний на различных уровнях фактора, результаты испытаний приведены в таблице.

№ п/п	Уровни фактора				
	1	2	3	4	5
1	7,3	5,4	6,4	7,9	7,1
2	7,6	7,1	8,1	9,5	
3	8,3	7,4		9,6	
4	8,3				
5	8,4				
\bar{x}_j	7,98	6,63	7,25	9,0	7,1

Считая выборки извлеченными из нормальных совокупностей с равными дисперсиями, проверьте гипотезу о равенстве групповых средних (на уровне значимости 0,05).

Методические указания: при решении задач 1-2 использовать рассмотренные на лекции алгоритмы нахождения прямой и квадратической линий регрессии; в задаче 3 применить однофакторный дисперсионный анализ.

Темы рефератов и докладов

1. Парадокс дней рождения (визуализация, вероятностный анализ и интерпретация).
2. Парадокс Монти-Холла (визуализация, вероятностный анализ и интерпретация).
3. Парадокс нетранзитивных костей (визуализация, вероятностный анализ и интерпретация).
4. Пример наивного байесовского классификатора (на примере классификации документов или фильтрации СПАМА с подробными вычислениями и комментариями).
5. Игра без среднего выигрыша, Санкт-Петербургский парадокс (визуализация, вероятностный анализ и интерпретация).
6. Ошибки первого и второго рода при статистической обработке данных (с примерами ситуаций, на модельных данных).
7. Проблема оценки ошибки второго рода и планирование эксперимента (пример вычисления требуемого объема выборки).
8. Типичные ошибки в статистических исследованиях (с примерами модельных данных, неправильной и правильной интерпретации данных и результатов).
9. Парадокс Симпсона и его роль в понимании и интерпретации результатов статистики.
10. Историческая справка об ученом на выбор с обязательной привязкой к доказательству важных теорем вероятности или открытию известных законов распределения.

Критерии оценки:

высокий балл (10-15 баллов) выставляется за полное раскрытие темы, при условии хорошо подготовленного выступления с презентацией, грамотного и четкого ответа на вопросы преподавателя и слушателей;

средний балл (5-10 баллов) выставляется при наличии нераскрытых вопросов, отсутствие презентации, неточности при ответе на вопросы преподавателя и слушателей;

низкий балл (<5 баллов) выставляется при наличии явных недочетов в раскрытии основных вопросов темы, отсутствие ответа на вопросы преподавателя и слушателей.

Вопросы к зачету

1. Случайные события и классическое определение вероятности.
2. Частотная интерпретация вероятности, статистическое определение.
3. Геометрическая вероятность.
4. Алгебра событий и аксиоматическое определение вероятности.
5. Конечное вероятностное пространство.
6. Теорема сложения и умножения вероятностей для различных типов событий.

7. Формула полной вероятности и формулы Байеса.
8. Независимые испытания. Формула Бернулли.
9. Независимые испытания. Теорема Пуассона.
10. Независимые испытания: локальная и интегральная теоремы Лапласа.
11. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.
12. Закон распределения и характеристики дискретной случайной величины.
13. Биномиальное распределение. Математическое ожидание и дисперсия числа появлений события в независимых испытаниях.
14. Функции распределения и функция плотности непрерывной случайной величины.
15. Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины.
16. Нормальное распределение.
17. Функция одного случайного аргумента. Нахождение закона распределения и характеристик.
18. Двумерная случайная величина, основные понятия.
19. Двумерное распределение. Вероятности попадания в полуполосу и прямоугольник.
20. Плотность совместного распределения, ее свойства и вероятностный смысл. Вероятность попадания в произвольную область.
21. Плотность вероятности составляющих двумерной случайной величины.
22. Условные законы распределения составляющих для системы дискретных и для системы непрерывных величин. Условное математическое ожидание.
23. Корреляционный момент.
24. Коэффициент корреляции.
25. Коррелированность и зависимость случайных величин.
26. Линейная регрессия.
27. Неравенства Маркова и Чебышева.
28. Закон больших чисел.
29. Центральная предельная теорема.
30. Общее представление о случайном процессе. Марковское свойство и марковский процесс.
31. Цепи Маркова с конечным числом состояний и дискретным временем.
32. Цепи Маркова с непрерывным временем.
33. Случайный процесс Бернули.
34. Случайный процесс Пуассона.
35. Случайная функция. Общие понятия.
36. Математическое ожидание случайной функции и его свойства.
37. Дисперсия случайной функции и ее свойства.
38. Математическая идея метода статистических испытаний.
39. Методы разыгрывания случайных величин.
40. Генеральная и выборочная совокупности, репрезентативность выборки.
41. Эмпирическая функция распределения, теорема Гливенко-Кантелли.
42. Выборочные характеристики и точечные оценки.
43. Статистическая устойчивость основных выборочных характеристик.
44. Асимптотически нормальный характер основных выборочных характеристик.
45. Эффективность оценок. Неравенство Рао-Фреше-Крамера.

46. Оценки математического ожидания по неравноточным наблюдениям.
47. Бета- и гамма- функции.
48. Распределение χ^2 .
49. Распределение Стьюдента.
50. Распределение Фишера.
51. Гамма-распределение.
52. Бетта-распределение.
53. Теорема Фишера.
54. Построение оценок. Метод моментов.
55. Построение оценок. Метод максимального правдоподобия.
56. Построение оценок. Метод наименьших квадратов.
57. Точные доверительные интервалы.
58. Асимптотические доверительные интервалы.
59. Проверка статистических гипотез. Основные определения.
60. Ошибки первого и второго рода, уровень значимости и мощность критерия.
61. Критерий отношения правдоподобия.
62. Проверка гипотез для одной выборки в предположении о нормальном распределении (при известном σ и при неизвестном σ).
63. Проверка гипотез для двух независимых выборок в предположении о нормально распределении.
64. Проверка гипотез для двух зависимых выборок (парные наблюдения).
65. Критерий согласия χ^2 Пирсона и Фишера.
66. Критерий согласия Колмогорова.
67. Критерий U-Манна-Уитни, сравнение независимых выборок.
68. Критерий Вилкоксона, проверка гипотезы об однородности двух выборок.
69. Проверка гипотез о значимости выборочных коэффициентов ранговой корреляция Спирмена и Кендалла.
70. Понятие о дисперсионном анализе, задача сравнения нескольких средних.
71. Общая, факторная и остаточная дисперсии.
72. Сравнение нескольких средних методом дисперсионного анализа.
73. Парная регрессионная модель.
74. Интервальная оценка функции регрессии, проверка значимости уравнения регрессии.
75. Нелинейная регрессия.
76. Множественный регрессионный анализ.
77. Выборочная оценка корреляционной матрицы.
78. Доверительные интервалы для коэффициентов и функции регрессии.
79. Оценка взаимосвязи переменных и проверка уравнения регрессии.

Критерии оценки:

высокий балл на зачете (20-30 баллов) выставляется за полный ответ по вопросам билета, а также развернутый и грамотный ответ на вопросы преподавателя, при этом допускаются незначительные недочеты, если обучающийся способен исправить их самостоятельно;

средний балл на зачете (10-20 баллов) выставляется при наличии недочетов в ответе по вопросам билета, если учащийся не может исправить все недочеты самостоятельно;

низкий балл на зачете (<10 баллов) выставляется при наличии явных недочетов и ошибок при ответе по вопросам билета (например, путает понятия или не может правильно сформулировать условие теоремы), которые не может исправить самостоятельно, либо не дал ни одного ответа на вопросы преподавателя.

Дисциплина оценивается по 100-балльной системе.

№	Форма контроля	Минимальное для аттестации количество баллов	Максимальное для аттестации количество баллов
1	Посещение занятий	2	5
2	Активная работа на практических занятиях	0	10
3	Индивидуальные практические задания	40	40
4	Реферат	0	15
5	Зачет	10	30
6	Всего	52	100

Перевод баллов в оценки осуществляется следующим образом:

85-100 баллов	<i>отлично</i>
70-84 балла	<i>хорошо</i>
52-69 баллов	<i>удовлетворительно</i>
0-51 балл	<i>неудовлетворительно</i>

Составитель

Чу

Чуванова Г.М.

«18» февраля 2024 г.