

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сахалинский государственный университет»

Кафедра математики

УТВЕРЖДЕН
на заседании кафедры
«19» февраля 2024 г., протокол №6
Зав. кафедрой


Самсикова Н. А.

**ФОНД
ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

Б1.О.08 «Математический анализ»

Уровень высшего образования
БАКАЛАВРИАТ

Направления подготовки
10.03.01 Информационная безопасность

Профиль подготовки
*Безопасность автоматизированных систем
(по отрасли или в сфере профессиональной деятельности)*
Квалификация выпускника
Бакалавр

Форма обучения: очная

г. Южно-Сахалинск
2024 г.

1. Формируемые компетенции и индикаторы их достижения по дисциплине

Код компетенции	Содержание компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции
ОПК-3	Способен использовать необходимые математические методы для решения задач профессиональной деятельности	ОПК-3.1 - Знает основные понятия математического анализа и алгебры, необходимые для решения задач профессиональной деятельности; ОПК-3.2 - Умеет применять основные математические методы, а также методы теории вероятностей и математической статистики для решения задач профессиональной деятельности; ОПК-3.3 - Владеет практическими навыками решения математических задач и построения статистических моделей экспериментов при решении прикладных задач в области профессиональной деятельности.

2. Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине (модулю)

№ п/п	Контролируемые разделы (темы) дисциплины	Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства
1.	Введение в математический анализ	ОПК-3	Задания к практическим работам, контрольные вопросы, контрольная работа, коллоквиум
2.	Дифференциальное исчисление функции одной и нескольких переменных	ОПК-3	Задания к практическим работам, контрольные вопросы, контрольная работа, коллоквиум
3.	Интегральное исчисление функции одной переменной	ОПК-3	Задания к практическим работам, контрольные вопросы, контрольная работа, коллоквиум
4.	Интегральное исчисление функции нескольких переменных. Ряды.	ОПК-3	Задания к практическим работам, контрольные вопросы, контрольная работа, коллоквиум
5.	Промежуточная аттестация (экзамен)	ОПК-3	Защита проекта

3. Оценочные средств

I курс, 1 семестр. Введение в математический анализ.

1. Действительные числа.

Множество действительных чисел. Изображение действительных чисел на числовой прямой. Модуль действительного числа. Ограниченные и неограниченные множества. Промежутки в \mathbb{R} .

2. Функции.

Функции и их общие свойства. Композиция функций. Обратимая и обратная функция. График функции. Арифметические действия над функциями и графиками. Числовые последовательности. Подпоследовательности.

3. Предел.

Понятие предела последовательности и предела функции. Единственность предела. Свойства функций, имеющих конечный предел. Предел суммы произведения, частного. Предельный переход в неравенствах. Предел композиции, обратной функции. Односторонние пределы. Бесконечно малые функции и их свойства. Сравнение бесконечно малых. Бесконечно большие функции. Первый замечательный предел и следствия из него.

Свойства последовательности (монотонность, ограниченность). Принцип вложенных отрезков. Предел монотонной последовательности. Теорема Больцано - Вейерштрасса. Число «е» и связанные с ним пределы.

4. Непрерывность функции.

Непрерывность функции в точке и на множестве. Непрерывность суммы произведения, частного. Непрерывность композиции, обратной функции. Односторонняя непрерывность. Точки разрыва и их классификация. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

5. Элементарные функции.

Степенная функция с натуральным целым, рациональным показателем. Показательная функция, ее свойства. Логарифмическая функция, ее свойства. Степенная функция с действительным показателем. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

Формы контроля:

1. Контрольная работа по теме «Функция».
2. Контрольная работа по теме «Предел».
3. Коллоквиум по теме «Предел».
4. Коллоквиум по теме «Функции».

I курс, 2 семестр.

Дифференциальное исчисление функции одной и нескольких переменных.

1. Производная и дифференциал.

Дифференцируемость функции. Производная и дифференциал, их геометрический и механический смысл. Непрерывность дифференцируемой функции. Дифференцируемость суммы, произведения, частного. Производная композиции, обратной функции. Производные и дифференциалы высших порядков. Производные основных элементарных функций.

Функции, заданные параметрическими уравнениями, и их дифференцирование.

2. Основные формулы дифференциального исчисления и их приложения.

Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши. Правило, Лопиталю. Формула Тейлора. Признаки постоянства, возрастания и убывания функции в точке и на промежутке. Необходимое и достаточное условия экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции. Выпуклые функции, точки перегиба. Асимптоты. Применение дифференциального исчисления к построению графиков.

3. Функции нескольких переменных.

Отображение $R^n \rightarrow R$. Область определения, график, линии и поверхности уровня.

4. Дифференцируемость функции нескольких переменных.

Дифференцируемость и дифференциал. Частные производные. Достаточное условие дифференцируемости. Касательная плоскость. Геометрический смысл дифференциала. Дифференцирование композиции. Инвариантность формулы первого дифференциала. Производная по направлению, градиент. Теорема о существовании и дифференцировании неявных функций.

5. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

Частные производные и дифференциалы высших порядков. Равенство смешанных частных производных. Формула Тейлора для функции двух переменных.

6. Экстремум функции нескольких переменных.

Определение максимума и минимума. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума функции двух переменных. Нахождение наибольших и наименьших значений. Условные экстремумы.

Формы контроля:

2-е контрольные работы.

II курс, 3 семестр.

Интегральное исчисление функции одной переменной.

1. Неопределенный интеграл.

Задача восстановления функции по ее производной. Первообразная и неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов. Основные методы интегрирования.

2. Определенный интеграл.

Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Интегрируемость функции и определенный интеграл. Нижние и верхние интегральные суммы. Необходимое и достаточное условия интегрируемости. Классы интегрируемых функций. Основные свойства определенного интеграла. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование по частям и замена переменной.

3. Геометрические приложения определенного интеграла.

Квадрируемые фигуры. Вычисление площадей квадрируемых фигур. Кубируемые тела. Объем тел с заданным поперечным сечением. Принцип Кавальери. Объем тела вращения. Спрямолинейные кривые. Вычисление дуги плоской кривой.

4. Приложения определенного интеграла в физике .

Вычисление статистических моментов, координат центра тяжести, моментов инерции плоской кривой и плоской фигуры.

5. Несобственные интегралы

Понятие несобственного интеграла. Несобственные интегралы от положительных функций. Абсолютная сходимость.

II курс, 4 семестр.

Интегральное исчисление функции нескольких переменных. Ряды.

6. Двойные и тройные интегралы.

Понятие двойного интеграла. Интегрируемость непрерывной функции. Основные свойства двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла. Замена переменного в двойном интеграле. Кубируемые тела и их объемы. Понятие тройного интеграла. Замена переменных в тройном интеграле. Сферические и цилиндрические координаты.

7. Некоторые применения кратных интегралов.

Вычисление объемов, площадей поверхностей. Физические приложения кратных интегралов.

8. Криволинейные интегралы.

Задача о работе плоского силового поля. Криволинейный интеграл и его основные свойства. Вычисление криволинейных интегралов. Формула Грина. Условие независимости интеграла от пути интегрирования

9. Числовые ряды.

Основные понятия. Действия над сходящимися рядами. Остаток ряда. Геометрический и гармонический ряд. Сходимость рядов с положительными членами. Теоремы сравнения. Признаки сходимости. Знакопеременные ряды. Теорема Лейбница. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Действия над абсолютно сходящимися рядами. Теорема Римана.

10. Функциональные последовательности и ряды.

Функциональная последовательность и ряд. Область сходимости. Равномерная сходимость. Необходимый и достаточный признак сходимости (равномерной). Признак Вейерштрасса. Теоремы о равномерно сходящихся последовательностях и рядах непрерывных функций.

11. Степенные ряды.

Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости. Равномерная сходимость степенных рядов. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов.

12. Разложение функции в ряд.

Задача разложения функции в ряд Тейлора. Разложение в ряд Тейлора функции $\sin x$,

$\cos x$, e^x , $\ln(1+x)$. Биномиальный ряд и частные случаи. Приближенное вычисление значений функции и определенных интегралов с помощью рядов.

13. Степенные ряды в комплексной области.

Сходящиеся последовательности и ряды комплексных чисел. Абсолютная сходимость. Теорема Абеля. Радиус и круг сходимости. Показательная функция комплексной переменной. Формулы Эйлера. Показательная запись комплексного числа. Связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями комплексной переменной.

Формы контроля:

1. Контрольная работа «Техника интегрирования».
2. Контрольная работа «Приложения определенного интеграла».
3. Контрольная работа «Кратные и криволинейные интегралы».
4. Контрольная работа «Функциональные ряды, ряд Тейлора».
5. Коллоквиум по теме: «Техника интегрирования».

Вопросы для обсуждения

1 курс, 1 семестр

1. Модуль действительного числа.
 - 1) Преобразование выражений, содержащих модуль.
 - 2) Решение уравнений, содержащих модуль.
 - 3) Решение неравенств, содержащих модуль.
 - 4) Построение графиков функций, уравнение которых содержит модуль.
2. Отображение, функция, область определения, область значений.
 - 1) Сюръекция, инъекция, биекция.
 - 2) Нахождение области определения функции.
 - 3) Нахождение области значений функции.
3. График функций.
 - 1) Построение графиков элементарных функций.
 - 2) Преобразования графиков функции.
4. Алгебра графиков.
 - 1) Сложение графиков функций.
 - 2) Вычитание графиков функций.
 - 3) Умножение графиков функций.
 - 4) Деление графиков функций.
5. Композиция функций. Обратная функция.
 - 1) Сложная функция.
 - 2) Область определения сложной функции.
 - 3) Обратная функция и ее график.
6. Классификация функций.
 - 1) Четные, нечетные функции.
 - 2) Монотонные функции.
 - 3) Ограниченные, неограниченные функции.
 - 4) Периодические функции.
7. Последовательности. Предел последовательности (4 ч.).
 2. Виды последовательности.
 3. Вычисление предела последовательности.
8. Предел функции на бесконечности (4 ч.).
 - 1) Вычисление предела на $+\infty$ бесконечности.
 - 2) Вычисление предела на $-\infty$ бесконечности.
 - 3) Вычисление предела на бесконечности.
9. Предел функции в точке (4 ч.).
 - 1) Вычисление предела в точке, используя первый замечательный предел и его следствия.

- 2) Вычисление предела в точке, используя второй замечательный предел и его следствия.
10. Непрерывность функции в точке.
 - 1) Непрерывные функции.
 - 2) Классификация точек разрыва.

1 курс, 2 семестр

1. Геометрический и физический смысл производной.
 - 1) Касательная к графику функции.
 - 2) Нормаль к графику функции.
 - 3) Скорость движения материальной точки.
 - 4) Ускорение движения материальной точки.
2. Производная и дифференциал.
 - 1) Формулы дифференцирования.
 - 2) Правила дифференцирования.
 - 3) Вычисление производной.
 - 4) Вычисление дифференциала.
3. Дифференцирование функций, заданных неявно и параметрическими уравнениями.
 - 1) Вычисление производной функции, заданной неявным образом.
 - 2) Вычисление производной функции, заданной параметрическими уравнениями.
4. Логарифмическое дифференцирование.
 - 1) Логарифмическое дифференцирование.
5. Правило Лопиталя. Производная и дифференциал высших порядков. Приближенное вычисление.
 - 1) Вычисление пределов при помощи правила Лопиталя.
 - 2) Вычисление производных высших порядков.
 - 3) Вычисление дифференциалов высших порядков.
 - 4) Приближенное значение функции.
6. Применение производных к исследованию функции.
 - 1) Исследование функции на монотонность.
 - 2) Исследование функции на экстремум.
 - 3) Применение производной второго порядка для исследования точки перегиба.
 - 4) Применение производной второго порядка для исследования направления выпуклости и вогнутости.
7. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
 - 1) Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.
 - 2) Решение экстремальных задач.
8. Построение графиков функций.
 - 1) Исследование функции одной переменной с помощью производной.
 - 2) Построение графика функции.
9. Область определения функции двух переменных.
 - 1) Вычисление области определения функции двух переменных.
 - 2) Построение области определения функции двух переменных.
10. Предел функции двух переменных. Непрерывность функции двух переменных.
 - 1) Вычисление двойного предела.
 - 2) Доказательство непрерывности функции двух переменных.
11. Частные производные первого порядка.
 - 1) Вычисление частных производных первого порядка от функции многих переменных.
12. Применение полного дифференциала первого порядка. Производная сложной функции.
 - 1) Приближенное вычисление функции многих переменных.
 - 2) Производная сложной функции.
13. Касательная и нормаль к кривой. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
 - 1) Касательная к кривой, заданной неявным образом.

- 2) Нормаль к кривой, заданной неявным образом.
- 3) Касательная плоскость к поверхности.
- 4) Нормаль к поверхности.
14. Элементы векторного анализа.
 - 1) Понятие производной по направлению.
 - 2) Градиент функции в точке.
15. Производные высших порядков. Формула Тейлора. (4 ч.)
 - 1) Вычисление производных высших порядков.
 - 2) Применение формулы Тейлора к приближенным вычислениям.
16. Экстремум функции двух переменных.
 - 1) Вычисление экстремума функции двух переменных.
17. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных.
 - 1) Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции двух переменных, заданной на области.

2 курс, 3 семестр

1. Табличный интеграл. Замена переменной.
 - 1) Вычисление табличных интегралов
 - 2) Вычисление интегралов, используя метод замены переменной.
2. Интегрирование дробных выражений, содержащих квадратный трехчлен.
 - 1) Вычисление интегралов, содержащих квадратный трехчлен.
 - 2) Вычисление интегралов, содержащих квадратный трехчлен под знаком радикала.
3. Интегрирование рациональных выражений.
 - 1) Интегрирование правильных рациональных дробей.
 - 2) Интегрирование неправильных рациональных дробей.
4. Метод интегрирования по частям.
 - 1) Вычисление интегралов первого типа.
 - 2) Вычисление интегралов второго типа.
 - 3) Вычисление интегралов третьего типа.
5. Интегрирование тригонометрических выражений.
 - 1) Интегрирование степеней функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$.
 - 2) Универсальная подстановка.
 - 3) Другие подстановки..
6. Интегрирование иррациональных выражений.
 - 1) Подстановка Эйлера.
 - 2) Другие подстановки.
 - 3) Интегрирование биномиальных дифференциалов
7. Формула Ньютона-Лейбница. Метод интегрирования по частям.
 - 1) Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница.
 - 2) Метод интегрирования по частям.
8. Замена переменной в определенном интеграле.
 - 1) Замена переменной в определенном интеграле от рациональной функции.
 - 2) Замена переменной в определенном интеграле от иррациональной функции.
 - 3) Замена переменной в определенном интеграле от тригонометрических функций.
9. Несобственный интеграл.
 - 1) Вычисление несобственного интеграла первого рода.
 - 2) Вычисление несобственного интеграла второго рода.
10. Построение графиков функций, заданных параметрическими уравнениями и в полярных координатах.
 - 1) Построение графиков функций, заданных параметрическими уравнениями.
 - 2) Построение графиков функций, заданных в полярных координатах.
11. Площадь плоской фигуры.
 - 1) Площадь плоской фигуры, заданной уравнением в декартовых координатах.
 - 2) Площадь плоской фигуры, заданной параметрическими уравнениями.
 - 3) Площадь плоской фигуры, заданной уравнением в полярных координатах.

12. Объем тела вращения.
 - 1) Объем тела вращения, ограниченной поверхностью, заданной уравнением в декартовых координатах.
 - 2) Объем тела вращения, ограниченной поверхностью, заданной параметрическими уравнениями.
 - 3) Объем тела вращения, ограниченной поверхностью, заданной уравнением в полярных координатах
13. Длина дуги, площадь поверхности вращения.
 - 1) Длина дуги, заданной уравнением в декартовых координатах.
 - 2) Длина дуги, заданной параметрическими уравнениями.
 - 3) Длина дуги, заданной уравнением в полярных координатах.
14. Центр тяжести. Момент инерции.
 - 1) Центр тяжести плоской кривой.
 - 2) Центр тяжести плоской фигуры.
 - 3) Момент инерции.
15. Двойной интеграл. Двойной интеграл в полярных координатах.
 - 1) Вычисление двойного интеграла по области.
 - 2) Переход к полярным координатам.
16. Приложения двойного интеграла.
 - 1) Вычисление площади плоской фигуры.
 - 2) Вычисление объема тела.
17. Тройной интеграл.
 - 1) Вычисление тройного интеграла по телу.
 - 2) Переход к цилиндрическим координатам.
 - 3) Переход к сферическим координатам.
18. Геометрические приложения тройного интеграла (4 ч.).
 - 1) Объем тела.
19. Механические приложения тройного интеграла.
 - 1) Координаты центра тяжести тела.
 - 2) Момент инерции.
 - 3) Статистические моменты.
20. Криволинейный интеграл по координатам.
 - 1) Вычисление криволинейного интеграла по координатам по кривой, заданной явным образом.
 - 2) Вычисление криволинейного интеграла по координатам по кривой, заданной параметрическими уравнениями.
 - 3) Вычисление криволинейного интеграла по координатам по кривой, заданной в полярных координатах.
21. Криволинейный интеграл по длине дуги.
 - 1) Вычисление криволинейного интеграла по длине дуги по кривой, заданной явным образом.
 - 2) Вычисление криволинейного интеграла по длине дуги по кривой, заданной параметрическими уравнениями.
 - 3) Вычисление криволинейного интеграла по длине дуги по кривой, заданной в полярных координатах.
22. Числовые ряды с положительными членами. Сумма ряда. Признаки сходимости ряда: Даламбера, сравнения рядов.
 - 1) Понятие суммы ряда.
 - 2) Необходимый признак сходимости.
 - 3) Признак Даламбера.
 - 4) Признак сравнения рядов.
23. Радикальный признак сходимости. Интегральный признак сходимости.
 - 1) Радикальный признак сходимости.
 - 2) Интегральный признак сходимости.

24. Знакопеременные ряды.
 - 1) Признак Лейбница.
 - 2) Абсолютно сходящийся ряд, условно сходящийся ряд.
25. Функциональные ряды.
 - 1) Нахождение суммы функционального ряда.
 - 2) исследование на сходимость функционального ряда.
26. Степенной ряд. Разложение в степенной ряд.
 - 1) Область сходимости степенного ряда.
 - 2) Вычисление суммы степенного ряда.
27. Приближенное вычисление значений функций.
 - 1) Применение формулы Тейлора к приближенным вычислениям.
28. Тригонометрические ряды Фурье.
 - 1) Разложение четной функции в ряд Фурье.
 - 2) Разложение нечетной функции в ряд Фурье.
 - 3) Разложение функции общего вида в ряд Фурье.

Пример практического занятия

Занятие № 1. Модуль действительного числа.

1. Решить уравнения:
 - а) $|x + 1| = 1$, б) $||x| + 1| = 1$, в) $||x| - 1| = 1$.
2. Решить неравенства:
 - а) $|x| + |x - 1| < 4$, б) $|x^2 - 3x + 2| \leq 2x - x^2$.
3. Упростить выражение:
 - а) $\sqrt{a^2 + 6a + 9} + \sqrt{a^2 - 6a + 9}$, б) $\frac{|a|+a}{|a|-a}$.
4. Найти значение выражения $\frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ при $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, $a > 0, b > 0$.
5. Построить график функции:
 - а) $y = \frac{x^2-1}{|x+1|}$, б) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 1} - 1$, в) $y = \frac{|x-3|}{x^2-9}$

Указания по выполнению заданий:

1. Решить уравнение, используя на определение модуля.
2. Решить неравенство, используя на определение модуля.
3. Упростить выражение, используя определение модуля.
4. Найти значение выражения, используя определение модуля.
5. Построить график функции, используя определение модуля.

Пример тренинга

Занятие № 13. Предел функции в точке.

- 1) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1)$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 2}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{3x^2 - 14x - 5}$
- 6) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^5 + 2x^4 + x^2 - 3x - 10}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x - 2}$
- 7) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos 3x}$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x}$
- 9) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x+1}}$
- 10) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}$
- 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$
- 12) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{\arctg(x+2)}$
- 13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$
- 14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{\sin 4x}$

Указания по выполнению заданий:

- 1-6. Вычислить предел, преобразовав дроби..
- 8-10. Вычислить предел, умножив на сопряженное выражение..
- 11-13. Вычислить предел, используя первый замечательный предел

Работа в малых группах

Занятие №3
Логарифмическое дифференцирование.

Задание № 1

1. $f(x) = (\sin^2 x)^{\operatorname{tg} x}$

2. $f(x) = (\ln x + \sqrt[3]{x})^{\operatorname{arctg} x}$

3. $f(x) = (\cos \sqrt{x})^{\arcsin x}$

4. $f(x) = \operatorname{arctg} 4x^{\sqrt[3]{1+x^2}}$

Задание № 2

5. $f(x) = (x^4 + x^2) \cdot \sqrt{x^3 - 4} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

6. $f(x) = \ln \frac{\operatorname{tg} x \cdot \sin x}{\cos x} \cdot \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{x}{\sqrt{\arcsin x}}$

7. $f(x) = \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{e^{x^2} \sqrt{1-x^2}}$

8. $f(x) = \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{\cos^2 x \cdot \ln x} \cdot e^x$

Задание № 3

9. $f(x) = \frac{(x-2)^2 \cdot \sqrt[3]{1+x}}{(x-5)^3}$

10. $f(x) = \frac{e^{-x} \cdot \operatorname{arctg} x \cdot e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$

11. $f(x) = \sqrt[2]{3x^2 - 2} \cdot \operatorname{arctg}^2 2x \cdot e^{3x} \cdot \ln^2 x$

Указания по выполнению заданий

Задание № 1. Вычисление производной степенно-показательной функции.

Задание № 2. Вычисление производной сложной функции.

Задание № 3. Вычисление производной сложной функции.

Темы дисциплины для самостоятельного изучения

1. Элементарные функции, их свойства и графики.
2. Применение производных первого и высших порядков к исследованию функции и построению графиков.
3. Дифференцирование неявной функции.
4. Приложение частных производных функций в теории поля.
5. Нахождение условных экстремумов.
6. Геометрические приложения определенного интеграла.
7. Физические приложения определенного интеграла.
8. Несобственные интегралы и их применение.
9. Замена переменных в двойном и тройном интеграле.
10. Геометрические и физические приложения кратных интегралов.
11. Криволинейные интегралы и их применение в геометрии и физике.
12. Приложение степенных рядов к решению различных задач.
13. Степенные ряды в комплексной области.

Вопросы для самоконтроля:

1. Понятие элементарной функции, области определения, области значений функции, график функции.
2. Понятие производной первого порядка.

3. Понятие производной высших порядков.
4. Понятие частной производной первого и высших порядков.
5. Алгоритм нахождения условного экстремума.
6. Геометрические приложения определенного интеграла.
7. Понятие градиента.
8. Понятие производной по направлению.
9. Дивергенция векторного поля.
10. Ротор векторного поля.
11. Несобственные интегралы первого рода.
12. Несобственные интегралы второго рода.
13. Криволинейные координаты: цилиндрическая и сферическая система координат.
14. Геометрические приложения кратных интегралов.
15. Физические приложения кратных интегралов.
16. Криволинейный интеграл первого рода.
17. Криволинейный интеграл второго рода.
18. Понятие степенного ряда.
19. Степенной ряд в степенной области.

Индивидуальные задания

I семестр:

Индивидуальное задание № 1

Построить графики функций:

- 1) $y = x + \frac{1}{x^3}$, 2) $y = x - \operatorname{sgn}(\cos x)$, 3) $y = x^2 - E(x)$, 4) $y = x^2 - \{x\}$,
- 5) $y = 1 + x + e^x$, 6) $y = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-1}$, 7) $y = -x^3\sqrt{x}$, 8) $y = x^2 \operatorname{sgn}(\operatorname{tg} x)$,
- 9) $y = \ln x \operatorname{sgn}(\cos x)$, 10) $y = x^2 E(x)$, 11) $y = xe^x$, 12) $y = \frac{1}{1+x^3}$.

Индивидуальное задание № 2

1. Найти область определения функции: $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.
2. Построить график функции, найти область определения, область значений, промежутки монотонности:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ \frac{1}{x}, & 0 < x < 1, \\ \ln x, & x \geq 1. \end{cases}$$
3. Построить график функции: $f(x) = 2^{-\frac{1}{x^2}}$
4. Дано: $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$. Найти композиции $f \circ f$, $\varphi \circ \varphi$, $\varphi \circ f$, $f \circ \varphi$, их область определения.
5. Представить в виде суммы четной и нечетной функций:
 $f(x) = x^4 + \operatorname{ctg} x - 1$
6. Продолжить периодически на \mathbb{R} функцию $f(x) = \sqrt{x}$, заданную на $[1; 2)$.
7. Найти основной период функции: $f(x) = 2 \cos(4x - 7)$
8. Найти обратную функцию, построить ее график: $f(x) = \sqrt{x+2}$.

Индивидуальное задание № 3.

Вычисление пределов.

1. Вычислить пределы числовых последовательностей:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 - \sqrt{n^5 + 1}}{\sqrt{4n^6 + 3} - n} & \text{б)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 2} - 5n^2}{n - \sqrt{n^4 - n + 1}} \\ \text{в)} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{(n+2)(n+1)} - \sqrt{(n-1)(n+3)}) & \\ \text{г)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - \sqrt{3n^5 - 7}}{(n^2 - n \cos n + 1)\sqrt{n}} & \text{д)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4+6+\dots+2n}{1+3+5+\dots+(2n-1)} \\ \text{е)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)! - (n+2)!}{(n+3)!} & \text{ж)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2} \quad \text{з)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+2}\right)^n \end{array}$$

2. Вычислить пределы функции:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2} & \text{б)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2} & \text{в)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\ln(1 + 2x)} \\ \text{г)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^{3x} - 1)^2} & \text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12^x - 5^{-3x}}{2 \arcsin x - x} & \text{е)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-3x}}{\sin 3x - \operatorname{tg}^2 x} \\ \text{ж)} \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{(e^{\sin x} - 1) \cos \frac{1}{x} + 4 \cos 3} & \text{з)} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\ln(4x - 1)}{\sqrt{1 - \cos \pi x} - 1} & \\ \text{и)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{e^{\sqrt[3]{x^3 - 4x^2 + 6} - e}} & \text{к)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^3} - 1}{x^2}\right)^{\frac{8x+3}{1+x}} & \text{л)} \lim_{x \rightarrow 1} (1 + e^x)^{\frac{\sin \pi x}{1-x}} \end{array}$$

2 семестр

Задание 1

Геометрический и механический смысл производной.

- Найдите координаты точек пересечения с осью Ox тех касательных к графику функции $f(x) = \frac{3x-1}{x+8}$, которые образуют угол $\frac{\pi}{4}$ с Ox .
- Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = \frac{8a^3}{4a^2 + x^2}$ в точке $x_0 = 2a$.
- Напишите уравнения касательных к кривым $y = 2x^2 - 5$ и $y = x^2 - 3x + 5$, проведенных через точки пересечения этих кривых.
- На кривой $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ найти точки, где касательные параллельны оси Ox .
- Составить уравнение касательной к линии $y = x^3 + 3x^2 - 5$, перпендикулярной к прямой $2x - 6y + 1 = 0$.
- Найти углы, под которыми пересекаются кривые $x^2 + y^2 = 8ax$ и $y^2 = \frac{8a^3}{2a - x}$.
- Показать, что линия $y = x^5 + 5x - 12$ во всех своих точках наклонена к оси Ox под острым углом.
- В точках пересечения прямой $x - y + 1 = 0$ и параболы $y = x^2 - 4x + 5$ проведены нормали к параболе. Найти площадь треугольника, образованного нормальями и хордой, стягивающей точки пересечения.
- Доказать, что отрезок касательной к трактрисе $y = \frac{a}{2} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{a - \sqrt{a^2 - x^2}} - \sqrt{a^2 - x^2}$, заключенный между осью ординат и точкой касания, имеет постоянную длину.
- Точка движется прямолинейно так, что ее расстояние s от начального пункта через t с равно $s(t) = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$. В какие моменты точка была в начальном пункте? В какие моменты ее скорость равна нулю?
- Тело массой в 3 кг движется прямолинейно по закону $s = 1 + t + t^2$, s – в сантиметрах, t – в секундах. Определить кинетическую энергию тела через 5 с после начала движения.

Задание 2.

Техника дифференцирования.

Найти производные:

$$1) f(x) = \frac{1-x^2+3x^4}{\sqrt{(x^2+3)^3}} \quad 2) f(x) = 2x^2 - \ln(1+2e^{3x} - 2\sqrt{\ln x + 1})$$

$$3) f(x) = \sqrt{\sin x} \cdot \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x-2}) \quad 4) f(x) = \sqrt{x} \cdot \cos x + \frac{\sin^2 2x}{\cos^4 3x} - \arcsin 3$$

$$5) f(x) = \ln \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\sqrt{3}} \quad 6) f(x) = \ln \frac{3 - \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th} x}$$

$$7) f(x) = (\sin x)^{\operatorname{tg} x} \quad 8) f(x) = (x^4 + x^2) \cdot \sqrt{x^3 - 4} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

$$9) f(x) = \ln \frac{\operatorname{tg} x \cdot \sin x}{\cos x} \cdot \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{x}{\sqrt{\arcsin x}} \quad 10) f(x) = \frac{x^2 \cdot \arcsin x}{\cos x \sqrt{1-x^2}}$$

ЗАДАНИЕ № 3

Исследование функций с применением производной.

1. Покажите, что функция f является постоянной:

$$f(x) = \cos^2 x + \cos^2 \left(\frac{\pi}{3} + x \right) - \cos x * \cos \left(\frac{\pi}{3} + x \right)$$

2. Доказать, что функция f возрастает или убывает на всей числовой прямой

$$a) f(x) = (x-1)^3 \quad б) f(x) = -x - \operatorname{arctg} x$$

3. Найдите промежутки монотонности функции f :

$$a) f(x) = 3x - x^3 \quad б) f(x) = \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}$$

4. Найти экстремумы функции f :

$$a) f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2} \quad б) f(x) = (x+1)^{10} e^{-x}$$

5. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции f на указанном промежутке:

$$a) f(x) = x^3 - x \quad [0; 5] \quad б) f(x) = 2 \cos x - \sin^2 x \quad R$$

6. Найдите промежутки выпуклости и точки перегиба графика функции f :

$$a) f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad б) f(x) = \arcsin \frac{1}{x}$$

7. Докажите неравенство:

$$\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{x-a}, \quad n > 1, x > a > 0$$

Задание № 4.

Построение графиков функций с полным исследованием.

$$1) f(x) = (x-1)^2(x+2)$$

$$2) f(x) = x^4 - 2x^2$$

$$3) f(x) = \frac{2x+1}{3-x}$$

$$4) f(x) = \frac{x^4}{(x+1)^3}$$

$$5) f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

$$6) f(x) = e^{-x} + e^{2x}$$

$$7) f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

$$8) f(x) = \ln(\cos x - \sin x)$$

Задание № 5

Область определения, график функции, непрерывность функции двух переменных.

1. Изобразить область определения функции

$$a) z = \frac{3}{x^2 + y^2}, \quad б) z = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$$

2. Найти повторные пределы: а) $a = b = 0, f(x, y) = \frac{ax + by}{cx + dy}, c \neq 0, d \neq 0,$

б) $a = b = \infty, f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}.$

3. Найти двойной предел: а) $a = 3, b = 0, f(x, y) = \frac{tgxy}{y},$

б) $a = b = \infty, f(x, y) = \frac{x + 2y}{x^2 - 2xy + y^2}.$

4. Непрерывна ли функция: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, x \neq 0, y \neq 0, \\ 0, x = 0, y = 0. \end{cases}$

5. Найти точки или линии разрыва функции: $f(x, y) = \frac{10x}{(x-1)^2 + (y-1)^2}.$

6. Найти линии уровня функции : $z = xy.$

Задание № 6

Вычисление частных производных первого порядка

1) $z = x^3 + 5xy^2 - y^3$ 2) $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x}$

3) $z = \sqrt{ax^2 - by^2}$ 4) $z = \sqrt[x]{e^g}$

5) $z = (2x)^{3y}$ 6) $z = \ln(x + y^2)$

7) $z = \arcsin \frac{x}{y}$ 8) $u = \sin^2(3x + 2y - z)$

Задание № 7

Элементы векторного анализа

1. Найти производную функции u в направлении вектора \vec{e} в данной точке A :

а) $u = \sqrt{x^2 + y^2}; A(3;4); \vec{e}$ – биссектриса первого координатного угла,

б) $u = xy + yz + 1; A(0; -2; 1); \vec{e} = \{12; -3; -4\}$

2. Найти градиент функции u :

а) $u = x^2 - 2xy + 5y - 1$

б) $u = x^2 y^2 z; M(1;2;3)$

3. Найти точки, в которых функция $z = x^3 + y^3 + 3xy$ стационарна.

4. Найти угол между градиентами функции в точках M_0 и M_1 : $z = \arcsin \frac{x}{x+y}; M_0(1;1);$

$M_1(3;4)$

Задание № 8

Приложения частных производных первого порядка

1. Найти дифференциал первого порядка

а) $z = \arccos \frac{1}{xy}$ б) $u = 2x^{yz}$

2. Найти приближенное значение $1,08^{3,96}$

3. Найти $\frac{dy}{dx}$

а) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 2 = 0$ б) $\sin xy = 1 - 0,2xy$

4. Найти dz

а) $x^2 + y^2 + z^2 - z = 0$ б) $ax + by + cz = \cos(ax + bx + cz)$

5. Найти производную сложной функции:

а) $z = x^2 e^y; x = \sin t; y = \cos t$

б) $z = u^v; u = \ln(x - y); v = e^{\frac{x}{y}}$

в) $z = x \sin v \cdot \cos w; v = \ln(x^2 - 1); w = -\sqrt{1 - x^2}$

6. Написать уравнение касательной и нормали к кривой в данной точке:
 $x^3y + y^3x = 3x^2y^2A(1; 0)$
7. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в данной точке
 $a) z = 2x^2 + y^2; A(1; -1; 3)$
 $б) 4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z; A(2; 3; 6)$
8. Дана поверхность $x^2 + y^2 + z^2 = 676$. Найти точки, в которых касательная плоскость параллельна плоскости $3x - 12y + 4z = 0$.

3 семестр

Задание № 1

- | | |
|---|---|
| 1) $\int \frac{3 + \sqrt[3]{x^2} - 2x}{\sqrt{x}} dx$ | 2) $\int \sqrt{3+x} dx$ |
| 3) $\int \frac{dx}{3-x}$ | 4) $\int \sin(2-3x) dx$ |
| 5) $\int \frac{\sqrt{3} dx}{9x^2 - 3}$ | 6) $\int \frac{2x dx}{\sqrt{5-4x^2}}$ |
| 7) $\int \frac{dx}{2x^2 + 5}$ | 8) $\int e^{2x-7} dx$ |
| 9) $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt[3]{\ln^2(2x+1)}}$ | 10) $\int \sin^4 2x \cos 2x dx$ |
| 11) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}{\cos^2 x} dx$ | 12) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}^6 3x}}{1+9x^2} dx$ |
| 13) $\int \frac{x dx}{e^{3x^2+4}}$ | 14) $\int \frac{x-1}{7x^2+4} dx$ |

Задание № 2.

Вычисление неопределенного интеграла.

- | | | | |
|--|--------------------------------------|---|---|
| 1) $\int \frac{1-2x-x^3}{1+x^2} dx$ | 2) $\int \frac{2-3x}{x^2+2} dx$ | 3) $\int \frac{\sin 2x}{1+3\cos 2x} dx$ | 4) $\int \frac{dx}{x^2-5x+4}$ |
| 5) $\int \frac{x+1}{2x^2+3x-4} dx$ | 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{4+8x-x^2}}$ | 7) $\int \frac{2x-3}{\sqrt{3x^2-3x+16}} dx$ | 8) $\int \frac{3x^2+20x+9}{(x^2+4x+3)(x+5)} dx$ |
| 9) $\int \frac{3x+13}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx$ | 10) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} dx$ | 11) $\int \frac{5x}{x^4+3x^2-4} dx$ | |

Задание № 3.

Вычисление неопределенного интеграла.

- | | | |
|--|--|--|
| 1) $\int \sin^2(1-x) dx$ | 2) $\int \operatorname{tg}^3 x dx$ | 3) $\int \sin 3x \cdot \cos x dx$ |
| 4) $\int \frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}$ | 5) $\int \frac{dx}{8\sin^2 x - 16\sin x \cdot \cos x}$ | 6) $\int \cos^4 3x \cdot \sin^2 3x dx$ |

Задание № 4.

Вычисление неопределенного интеграла.

- 1) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx$ 2) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x^2}}$ 3) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x+3}}$
- 4) $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{(1+\sqrt[3]{x+1})\sqrt{x+1}} dx$ 5) $\int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} dx$ 6) $\int \sqrt{1-x} \arccos \sqrt{x} dx$
- 7) $\int x^2 \cos 2x dx$ 8) $\int (x+1) e^{2x} dx$ 9) $\int \ln(x-5) dx$ 10) $\int \operatorname{arctg} 2x dx$

Задание № 5.

Вычисление определенного интеграла.

I. Вычислить определенный интеграл:

- 1) $\int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{1+x^2} dx$ 2) $\int_2^3 x \ln(x-1) dx$ 3) $\int_2^3 \frac{2x^4 - 5x^2 + 3}{x^2 - 1} dx$
- 4) $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$ 5) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx$ 6) $\int_2^3 \frac{dx}{2x^2 + 3x - 2}$ 7) $\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3 + \sqrt[3]{(x-2)^2}} dx$

II. Вычислить несобственный интеграл:

- 1) $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{16x^4 + 1}$ 2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$

Задание № 6.

Приложения определенного интеграла.

- Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией: $r = 3\sqrt{\cos 2\varphi}$.
- Вычислить длину дуги данной линии: $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$.
- Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры Φ вокруг указанной оси координат: $\Phi: y^2 = 4-x$, $x=0$; Oy .
- Вычислить площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой L вокруг указанной оси: $L: y = \frac{x^2}{3}$ $\left(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\right)$; Ox .
- Найти координаты центра масс однородной плоской кривой L : полуокружности $x^2 + y^2 = R^2$, расположенной над осью Ox .

Задание № 7. Двойной интеграл.**Задание № 1.** Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле.

- 1) $\int_{-2}^2 dx \int_{x^2}^4 f(x, y) dy$, 2) $\int_1^3 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx$, 3) $\int_{-\sqrt{3}}^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x, y) dy$,

Задание № 2. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле.

- 1) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx$, 2) $\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy$,

Задание № 3. Вычислить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ от функции $f(x, y)$ по области D .

- 1) $f(x, y) = xy$, $D: x \in [0, 1], y \in [0, 2]$, 2) $f(x, y) = e^{x+y}$, $D: x \in [0, 1], y \in [0, 1]$,

Задание № 4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ от функции $f(x, y)$ по области D .

- 1) $f(x, y) = xy$, $D: y = 4-x, y^2 = 2x$, 2) $f(x, y) = x+y$, $D: x=0, y=0, x+y=0$,

Задание № 5. Вычислить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ от функции $f(x, y)$ по области D , используя полярные координаты.

1) $f(x, y) = x + y$, $D: x^2 + y^2 = x + y$, 2) $f(x, y) = x^2 y^2$, $D: x^2 + y^2 = R^2$,

Задание № 8.

Тройной интеграл. Криволинейный интеграл.

Задание №1. Вычислить тройной интеграл $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ от функции $f(x, y, z)$ по области V :

1) $f(x, y, z) = \frac{1}{1-x-y}$, $V: x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$,

Задание №2. Вычислить тройной интеграл $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ от функции $f(x, y, z)$ по области V с помощью цилиндрических координат.

1) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $V: 3(x^2 + y^2) + z^2 = 3a^2$,

Задание № 3. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int_L f(x, y) dl$ от функции $f(x, y)$:

1) $f(x, y) = 4\sqrt[3]{x} - \sqrt{y}$, по прямой AB от $A(-1, 0)$ до $B(0, 1)$,

Задание № 4. Вычислить криволинейный интеграл по координатам $\int_L f(x, y) dx + g(x, y) dy$:

1) $f(x, y) = xy - 1$, $g(x, y) = x^2 y$, $L: 2x + y = 2$, от $A(1, 0)$ до $B(0, 2)$,

Задание № 9.

Геометрические и физические приложения кратных интегралов.

Задание № 1. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми:

1) $y^2 = x^3$, $y^2 = 8(6-x)^3$, 2) $y = 2^x$, $y = 2^{-2x}$, $y = 4$,

Задание №2. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми, используя полярные координаты.

1) $x^3 + y^3 = 2xy$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, 2) $(x+y)^3 = xy$, $x \geq 0$, $y \geq 0$,

Задание № 3. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать чертеж.

1) $y = 1$, $y = x^2$, $z = 0$, $x + y + z = 0$,

Задание № 4. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями, используя цилиндрические координаты. Сделать чертеж.

1) $2z = x^2 + y^2$, $y + z = 4$, $z = 0$, 2) $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$,

Задание № 5. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки плотности $\rho = 1$, ограниченной кривыми:

1) $ay = x^2$, $x + y = 2a$, ($a > 0$), 2) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x = 0$, $y = 0$,

Задание № 6. Вычислить массу неоднородной пластины D , ограниченной линиями, если поверхностная плотность в каждой ее точке $\rho = \rho(x, y)$.

1) $D: y^2 = x$, $x = 3$, $\rho = x$,

Задание № 7. Вычислить координаты центра тяжести однородного тела, занимающего область V , ограниченную указанными поверхностями.

1) $V: x = 6(y^2 + z^2)$, $y^2 + z^2 = 3$, $x = 0$, 2) $V: y = 3\sqrt{x^2 + z^2}$, $x^2 + z^2 = 36$, $y = 0$.

Задание № 8. Вычислить массу неоднородного тела, ограниченного заданными поверхностями, если объемная плотность в каждой его точке $\rho = \rho(x, y, z)$

1) $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, $z \geq 0$, $\rho = z$.

Задание № 9. Вычислить момент инерции относительно указанной оси координат однородного тела, занимающего область V , ограниченную данными поверхностями.

- 1) $V : y^2 = x^2 + z^2, y = 4, Oy$ 2) $V : x = y^2 + z^2, x = 2, Ox$.

ЗАДАНИЕ № 10.

Числовые знакоположительные и знакопеременные ряды.

1. По заданным первым членам записать одну из возможных формул для n -ого члена.

$$\frac{1000}{1} + \frac{1000 \cdot 1001}{1 \cdot 3} + \frac{1000 \cdot 1001 \cdot 1002}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots$$

2. Запишите каждый из рядов, используя знак суммы.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

3. По заданной формуле общего члена ряда записать 5 первых членов ряда

$$a_n = \frac{n^3}{(n+1)!}$$

4. По известной частичной сумме определите общий член ряда и найдите его сумму:

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

5. Найдите выражение для частичной суммы ряда. Является ли ряд сходящимся? В этом случае найдите его сумму.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

6. Исследовать ряд на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n!}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1})$

7. Выяснить, какие ряды сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^3}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+2}{n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{6n+1}{n} \right)^n$

ЗАДАНИЕ № 11

Функциональные и степенные ряды.

Вариант № 1.

1. Найти области сходимости функционального ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^n$

2. Доказать, используя числовой ряд, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

3. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2(n-1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$

4. Найти область сходимости степенного ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2(n-1)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$

5. Используя признак Вейерштрасса, докажите равномерную сходимость ряда в промежутке $(-\infty; +\infty)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$$

5. Найти сумму ряда

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{n-1}}{2^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$

6. Используя почленное дифференцирование или интегрирование степенного ряда, найти сумму ряда:

$$x + \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} + \dots + \frac{x^{4n-3}}{4n-3} + \dots$$

Контрольная работа

1 семестр

Контрольная работа №1.

1. Найти область определения функции:

$$f(x) = \frac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt{x+2}$$

2. Построить график функции, найти область определения, область значений, промежутки убывания, возрастания:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ \frac{1}{x}, & 0 < x < 1, \\ \ln x, & x \geq 1. \end{cases}$$

3. Построить график функции:

$$f(x) = 2|x| - 1$$

4. Дано: $f(x) = \sqrt{x-1}$, $\varphi(x) = e^x$

Найти: $f \circ f$, $\varphi \circ \varphi$, $f \circ \varphi$, $\varphi \circ f$, их области определения.

5. Найти обратную функцию, построить ее график:

$$f(x) = 7x + 5$$

Контрольная работа № 2

1. Вычислите пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \lg x}$, б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(x+2)}{x^3 + x^2 - x - 1}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5}{x^2 - 1} \right)^{x^2}$,
г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{(1+x)^2 - 1}$, д) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)5n+4}{n^4 + 4n^2 - 7}$.

2. Вычислить предел, предварительно упростив выражение:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x-1}{x+\sqrt{x}+1} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^3}-1} + \frac{2}{\sqrt{x-1}} \right).$$

3. Исследуйте функцию на непрерывность, установите характер точек разрыва и постройте график:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 0, \\ (x-1)^2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 4 - x, & x > 2. \end{cases}$$

2 семестр

Контрольная работа № 1

1. Доказать, что функция f дифференцируема в точке $x_0 = 2$, найти производную $f'(2)$ и дифференциал $df(2)$: $f(x) = 3x^3 - 2x + 1$.

2. Найти производную по определению: $f(x) = 3e^{2x+5}$.

3. Найти производную: $f(x) = \ln^2 \sin \arctg^2(3x^3 + 7)$.

4. Тело движется по закону $s(t)$. Найти скорость и ускорение при $t = 3$.
 $s(t) = 2t^3 + 3t^2 - 1$.

5. Записать уравнение нормали и касательной к графику функции в точке $x_0 = 1$, $y_0 = -2$: $f(x) = 3x^3 - 5x$.

Контрольная работа № 2

1. Написать полный дифференциал второго порядка: $z = y e^x + y$

2. Найти производную сложной функции z'_x :

$$z = \sqrt{\frac{\cos u}{\arctg v}}, \quad u = \frac{x^2 + y^2}{xy}, \quad v = \frac{y^2 + x}{y^2}$$

3. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности второго порядка в данной точке:

$$z = x e^{y^2} \cos(xy), \quad (1; 0; 1)$$

4. Найти экстремум функции двух переменных: $z = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$

3 семестр

Контрольная работа № 1

Вычислить неопределенные интегралы:

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{3 - \ctg^2 x}{\cos^2 x} dx \quad & 2) \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad & 3) \int \frac{x+2}{\sqrt{4x^2 - 4x + 3}} dx \quad & 4) \int \frac{dx}{4x^3 - x} \\ 5) \int \cos 2x \cos^2 x dx \quad & 6) \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} dx \end{aligned}$$

Контрольная работа № 2

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y^2 = x^3$, $x = 4$.

2. Вычислить длину дуги данной линии: $\rho = 5(1 + \cos \varphi)$.

3. Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры вокруг указанной оси координат: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$; Ox .

4. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой вокруг указанной оси координат: $x = \cos t$, $y = 2 + \sin t$, Ox .

5. Найти координаты центра масс однородной плоской кривой: $x^2 + y^2 = a^2$, первая четверть.

6. Найти координаты центра масс плоской однородной фигуры, ограниченной линиями: $ay^2 = x^3$, $x = a$ ($a > 0$).

Контрольная работа № 4.

1. Переменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx$$

2. Вычислить двойной интеграл по области D , ограниченной линиями:

$$\iint_D xy \, dx dy, \quad D: y = x - 4, y^2 = 2x$$

3. Вычислить, перейдя к полярным координатам:

$$\iint_{(D)} x dx dy, \quad D: x^2 + y^2 = 4$$

4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$z = x^2 + y^2, \quad x + y = 1$$

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями:

$$y = \cos x, \quad y = \cos 2x$$

6. Вычислить :

$$\iiint_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2)^3 dx dy dz$$

если V ограничено поверхностями $x^2 + y^2 = 1, y = 0, y = 1$

7. Вычислить криволинейный интеграл:

$$\int_L (xy + y) dy - (x - y^2) dx$$

$L: y = x^2$ от $A(0;0)$ до $B(2;4)$.

Контрольная работа № 5

1. Разложить функцию в ряд Тейлора в точке $a: f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{4}), \quad a = \frac{\pi}{2}$.

2. Разложить функцию в ряд Маклорена: $f(x) = \ln(e^x - x)$.

3. Найти три первых члена ряда: $\int \cos \frac{x^2}{4} dx$.

4. Вычислить приближенно с точностью до 0,001: а) $\sqrt[4]{18}$, б) $\int_0^{0,25} \ln(1 + \sqrt{x}) dx$.

Критерии оценки:

- оценка «отлично» выставляется студенту, если работа выполнена полностью и безошибочно;

- оценка «хорошо» выставляется студенту, если в работе могут быть отдельные вычислительные и негрубые ошибки;

- оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если решено правильно более половины заданий;

- оценка «неудовлетворительно» выставляется, если решено правильно менее половины заданий.

Перечень вопросов к коллоквиуму № 1 «Теория функций»

1. Понятие множества.
2. Операции над множествами.
3. Множество действительных чисел.
4. Свойства действительных чисел.
5. Абсолютная величина числа.
6. Грани числовых множеств.
7. Понятие функции.
8. Классификация элементарных функций.
9. Алгебра функций. Алгебра графиков.
10. Композиция функций. Понятие обратной функции.
11. Сужение функции на множестве.
12. Четные, нечетные функции.

13. Ограниченные, неограниченные функции.
14. Монотонные функции.
15. Алгебра, композиция монотонных функций.
16. Периодические функции.

Перечень вопросов к коллоквиуму № 2 «Предел функции»

1. Понятие бесконечно-малых функций на бесконечности.
2. Предел функции на бесконечности.
3. Алгебра конечных пределов.
4. Понятие предела последовательности и его свойства.
5. Теоремы о сходимости монотонных функций.
6. Теорема Больцано-Вейерштрассе.
7. Критерий Коши.
8. Бесконечно-большие функции на бесконечности.
9. Понятие последовательности и ее виды.
10. Принцип вложенных стягивающихся отрезков.
11. Число e .
12. Второй замечательный предел на бесконечности.
13. Понятие предельной точки.
14. Предел функции в точке. Критерий существования предела.
15. Свойства функции, имеющей предел в точке.
16. Первый замечательный предел и его следствия.
17. Второй замечательный предел в нулевой точке и его следствия.
18. Сравнение бесконечно-малых.
19. Теорема о пределе сложной функции.
20. Односторонние пределы.
21. Понятие непрерывной функции.
22. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
23. Точки разрыва и их классификация.

Вопросы к коллоквиуму № 3 «Техника вычисления неопределенного интеграла»

1. Метод интегрирования по частям.
2. Интегрирование выражений вида $\frac{1}{Ax^2 + Bx + C}$.
3. Интегрирование выражений вида $\frac{Mx + N}{Ax^2 + Bx + C}$.
4. Интегрирование выражений вида $\frac{1}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}}$.
5. Интегрирование выражений вида $\frac{Mx + N}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}}$.
6. Интегрирование рациональных дробей:
 - а) интегрирование элементарных дробей,
 - б) разложение правильной дроби на элементарные,
 - в) методы нахождения коэффициентов разложения правильной дроби на элементарные.
7. Интегрирование произведения $\sin ax$ и $\cos bx$.
8. Интегрирование степеней $\sin x$ и $\cos x$.
9. Интегрирование произведения степеней $\sin x$ и $\cos x$.
10. Интегрирование степеней $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$.
11. Универсальная подстановка.
12. Интегрирование тригонометрических выражений подстановкой $y = \operatorname{tg} x$

13. Интегрирование иррациональных выражений $R\left(x, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^{r_k}\right)$.

14. Биномиальный дифференциал.

15. Подстановка Эйлера.

16. Вычисление интеграла $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$ при помощи других подстановок.

Критерии оценивания

Оценка «отлично» выставляется студенту, глубоко и прочно усвоил программный материал, исчерпывающе, последовательно, грамотно и логически стройно его излагает, правильно обосновывает и использует рациональные способы решения задачи.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, твёрдо знает программный материал, грамотно и по существу излагает его, не допускает существенных неточностей в ответе на вопрос, правильно применяет теоретические положения при решении практических вопросов и задач.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, который знает только основной программный материал, но не усвоил его деталей, допускает в ответе неточности, затрудняется в выполнении практических задач.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который не знает значительной части программного материала, допускает в ответе существенные ошибки, с затруднениями выполняет практические работы.

Темы рефератов, докладов

Реферат должен быть представлен текстовыми и таблично - графическими материалами. К защите реферата студент должен приготовить краткое сообщение (не более 10 минут), в котором должен изложить основные результаты.

Темы рефератов по математическому анализу.

1. Степенная функция с натуральным показателем.
2. Степенная функция с дробным показателем.
3. Степенная функция с рациональным показателем.
4. Показательная функция.
5. Тригонометрические функции.
6. Обратные тригонометрические функции.
7. Применение криволинейных интегралов к решению геометрических и физических задач.
8. Применение кратных интегралов к решению геометрических и физических задач.
9. Степенные ряды и их применение к решению различных задач.
10. Числовые ряды и их применение в комбинаторике.

Критерии оценки:

– оценка «отлично» выставляется за полное раскрытие темы доклада, при условии правильного ответа на вопросы преподавателей. Студент правильно определяет понятия, свободно ориентируется в теоретическом материале.

– оценка «хорошо» выставляется, если есть незначительные ошибки при ответе на вопросы преподавателя. Студент не очень свободно ориентируется в теоретическом материале.

– оценка «удовлетворительно» выставляется, если тема раскрыта не полностью, есть незначительные ошибки при ответе на вопросы преподавателя. Студент неточно определяет понятия.

– оценка «неудовлетворительно» выставляется в случае, если содержание реферата (доклада) не соответствует теме, есть значительные ошибки при ответе на вопросы преподавателей. Студент неправильно определяет основные понятия.

Перечень вопросов к экзаменам

1 семестр.

1. Понятие множества.

2. Множество действительных чисел.
3. Абсолютная величина чисел.
 1. Грани числовых множеств.
 2. Понятие функции.
 3. Элементарные функции и их классификация.
 4. Алгебра функций.
 5. Композиция функций. Обратная функция. Сужение функции на множестве.
 6. Четные, нечетные функции.
 7. Алгебра четных и нечетных функций.
 8. Ограниченные, неограниченные функции.
 9. Монотонные функции.
 10. Алгебра монотонных функций. Композиция монотонных функций.
 11. Периодические функции.
 12. Понятие бесконечно-малых функций.
 13. Предел функции на бесконечности.
 14. Свойства предела на бесконечности.
 15. Алгебра конечных пределов.
 16. Бесконечно-большие функции.
 17. Понятие последовательности и ее виды.
 18. Понятие предела последовательности и его свойства.
 19. Теоремы существования предела.
 23. Теорема Больцано-Вейерштрассе.
 24. Принцип вложенных стягивающихся отрезков.
 25. Число e .
 26. Второй замечательный предел.
 27. Предельная точка.
 28. Предел функции в точке.
 29. Критерий существования предела.
 30. Свойства функции, имеющей предел.
 31. Первый замечательный предел и его следствия.
 32. Второй замечательный предел и его следствия.
 33. Сравнение бесконечно-малых функций.
 34. Теорема о пределе сложной функции.
 35. Односторонние пределы
 36. Понятие непрерывности функции.
 37. Классификация точек разрыва.
 38. Теоремы о сумме, произведении и частном непрерывных функций.
 39. Теорема об ограниченности функции, непрерывной на отрезке.
 40. Теорема Вейерштрассе.
 41. Теорема Больцано-Коши.
 42. Теорема о промежуточном значении.
 43. Понятие равномерной непрерывности функции.
 44. Теорема о непрерывности обратной функции.
 45. Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции .
 46. Теорема о непрерывности сложной функции.
 47. Степенная функция с натуральным показателем.
 48. Степенная функция с дробным показателем.
 49. Показательная функция.
 50. Тригонометрические функции.

Перечень вопросов к экзаменам
2 семестр

1. Понятие производной, понятие бесконечной, односторонней производной.

2. Дифференцируемость функции. Понятие дифференциала функции. Теорема о связи непрерывной и дифференцируемой функции.
3. Механический смысл производной. Геометрический смысл производной.
4. Правила дифференцирования.
5. Производная обратной функции. Производная сложной функции.
6. Логарифмическое дифференцирование.
7. Дифференцирование функции, заданной параметрическими уравнениями. Понятие неявной функции, ее дифференцирование.
8. Применение дифференциала к приближенным вычислениям. Инвариантность формы дифференциала.
9. Понятие производной высших порядков. Дифференциалы высших порядков.
10. Теорема Ролля.
11. Теорема Лагранжа.
12. Теорема Коши. Теорема Дарбу.
13. Формула Тейлора для многочленов.
14. Формула Тейлора для функции, не являющейся многочленом.
15. Применение формулы Тейлора и Маклорена к приближенному представлению элементарных функций.
17. Правило Лопиталя
18. Условия монотонности.
19. Понятие точек экстремума.
20. Необходимые и достаточные условия существования экстремума.
21. Наибольшее и наименьшее значения функции.
22. Вогнутость и выпуклость кривой. Достаточные признаки.
23. Понятие точек перегиба. Необходимые и достаточные условия точки перегиба.
24. Асимптоты графика.
25. Понятие функции многих переменных. Понятие сложной функции.
26. Предел функции в точке. Свойства предела функции в точке. Повторный предел.
27. Понятие непрерывности функции многих переменных в точке. Понятие непрерывности функции многих переменных по отдельным аргументам.
28. Свойства непрерывных функций многих переменных.
29. Понятие частной производной.
30. Геометрическое истолкование частной производной функции двух переменных.
31. Понятие дифференцируемости функции и полного дифференциала функции двух переменных.
32. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции двух переменных.
33. Понятие дифференцируемости и полного дифференциала функции многих переменных. Применение полного дифференциала функции многих переменных к приближенным вычислениям.
34. Производная сложной функции. Теорема 1. Формула полной производной.
35. Производная сложной функции. Общий случай.
36. Инвариантность формы полного дифференциала.
37. Производная неявной функции двух переменных. Дифференцирование неявной функции n функций.
38. Касательная и нормаль к плоской кривой, заданной уравнением в неявном виде.
39. Касательная плоскость и нормаль к поверхности, заданной уравнением в неявном виде.
40. Понятие производной по заданному направлению.
41. Понятие градиента функции и его свойства.
42. Производная по направлению и градиент функции многих переменных.
43. Понятие частных производных высших порядков. Теорема о независимости смешанных производных от порядка интегрирования.
44. Дифференциалы высших порядков. Свойство дифференциалов высших порядков.
45. Формула Тейлора для функции нескольких переменных.
46. Понятие максимума и минимума функции многих переменных.

47. Необходимые условия существования экстремума.
48. Достаточные условия существования экстремума. Правило нахождения экстремума функции двух переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных.

3 семестр

1. Понятие первообразной функции. Теорема о связи различных первообразных для одной и той же функции.
2. Понятие неопределенного интеграла и его свойства.
 1. Теорема о замене переменной под знаком неопределенного интеграла.
 2. Метод интегрирования по частям.
 3. Задача о площади криволинейной трапеции.
 4. Понятие определенного интеграла.
 5. Необходимое условие интегрируемости функции.
 6. Понятие нижних и верхних сумм Дарбу. Их свойства. Критерий интегрируемости функций.
 7. Теорема об интегрируемости непрерывной функции.
 8. Свойства определенного интеграла, принимаемые по определению. Теорема о вынесении коэффициента за знак определенного интеграла.
 9. Свойство аддитивности определенного интеграла.
 10. Свойство линейности определенного интеграла.
 11. Оценки интегралов. Первая теорема и ее следствия.
 12. Оценки интегралов. Вторая теорема и ее следствия.
 13. Теорема о среднем значении и ее геометрическая интерпретация.
 14. Понятие определенного интеграла с переменным верхним пределом.
 15. Формула Ньютона-Лейбница.
 16. Вычисление определенного интеграла методом интегрирования по частям.
 17. Замена переменной в определенном интеграле.
 18. Понятие несобственных интегралов первого рода.
 19. Свойства несобственных интегралов первого рода. Признаки сходимости несобственных интегралов первого рода.
 20. Понятие несобственных интегралов второго рода.
 21. Площадь плоской фигуры в декартовой системе координат.
 22. Площадь плоской фигуры, ограниченной линией, заданной параметрическими уравнениями.
 23. Площадь криволинейного сектора.
 24. Объем тела с заданными поперечными сечениями.
 25. Объем тела вращения.
 26. Понятие длины дуги плоской кривой
 27. Спрямолинейное расстояние дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями.
 28. Длина дуги кривой, заданной уравнением в декартовых координатах и в полярных координатах.
 31. Понятие площади поверхности вращения.
 32. Формула площади поверхности вращения.
 33. Механические приложения определенного интеграла.

Тестовые задания

Вариант № 1

Задание № 1 (выберите один вариант ответа)

Значение функции $f\left(\frac{x}{2} + 3\right)$, если $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$, равно...

Ответы

$$1) \frac{x^2}{4} + 3x + 9 + \frac{2}{x+6} \quad 2) \frac{x^2}{4} + 9 + \frac{2}{x+6}$$

$$3) \frac{x^2}{4} + 9 + \frac{1}{\frac{x}{2} + 3} \quad 4) \frac{x^2}{4} + 3x + \frac{2}{x+3}$$

Задание № 2. (выберите один вариант ответа)

График какой функции изображен на рисунке?



Ответы

1) $2^{|x|+1}$ 2) $2^{|x-1|}$ 3) $2^{|x+1|}$ 4) $2^{|x|}$

Задание № 3 (выберите один вариант ответа)

Область определения функции $f(x) = \sqrt{\pi^2 - x^2} + \frac{1}{\ln(x-1)}$ имеет вид ...

Ответы

1) $(1; \pi]$ 2) $[-\pi; \pi]$ 3) $(0; \pi]$ 4) $(1; 2) \cup (2; \pi]$

Задание № 4 (выберите один вариант ответа)

Предел функции $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x}$ равен...

Ответы

1) 1 2) π 3) 0 4) ∞

Задание № 5 (выберите один вариант ответа)

Предел функции $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{3x+1} \right)^x$ равен...

Ответы

1) 0 2) $\frac{2}{3}$ 3) e^3 4) ∞

Задание № 6 (выберите один вариант ответа)

Точками разрыва первого рода функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & x < -1, \\ x, & |x| \leq 1, \\ x^2, & 1 < x < 2, \\ 3, & x \geq 2. \end{cases}$$

являются ...

Ответы

1) $\{-1; 1\}$ 2) $\{1; 2\}$ 3) $\{-1; 2\}$ 4) $\{2\}$

Задание № 7 (выберите один вариант ответа)

Производная функции $f(x) = \cos^2(2x + 1)$ равна ...

Ответы

1) $-2 \sin(4x + 2)$ 2) $2 \cos(2x + 1)$
3) $-2 \sin(2x + 1)$ 4) $4 \cos(2x + 1)$

Задание № 8 (выберите один вариант ответа)

Угол наклона касательной к графику функции $f(x) = \sin(3x - 1)$ в точке $x = 1/3$ равен ...

Ответы

- 1) $\arctg(-3)$ 2) $-\pi/4$ 3) 0 4) $\arctg 3$

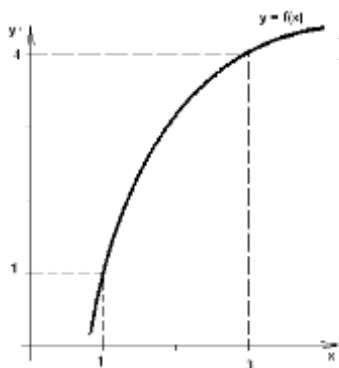
Задание № 9 (выберите один вариант ответа)

Точкой максимума функции $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$ является точка ...

Ответы

- 1) 2 2) -2 3) -3 4) нет такой точки

Задание № 10 (выберите один вариант ответа)



На рисунке изображен график функции.
Какие знаки имеют $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ на $(1;3)$?

Ответы

- 1) $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, 2) $f(x) < 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$,
3) $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$, 4) $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$,

Задание № 11 (выберите один вариант ответа)

Полный дифференциал функции $f(x,y) = \ln(x + y)$ равен ...

Ответы

- 1) $\frac{dx + dy}{x + y}$ 2) $\frac{dx - dy}{x + y}$ 3) $x dy + y dx$ 4) $x dx + y dy$

Задание № 12 (выберите один вариант ответа)

Стационарная точка для функции $f(x,y) = xy$ имеет координаты ...

Ответы

- 1) (0;0) 2) (1;0) 3) (0;1) 4) (1;1)

Задание № 13 (выберите один вариант ответа)

Максимум функции $f(x,y) = x + 2y$ при условии $x^2 + y^2 = 5$ равен ...

Ответы

- 1) 5 2) -5 3) 0 4) -1

Задание № 14 (выберите один вариант ответа)

Первообразная $F(x)$ для функции $f(x) = 4x^3 + \cos 4x$ имеет вид ...

Ответы

- 1) $4x^4 + \sin 4x + C$ 2) $x^4 + \sin 4x + C$
3) $x^4 + 0,25 \sin 4x + C$ 4) $x^4 - 0,25 \sin x + C$

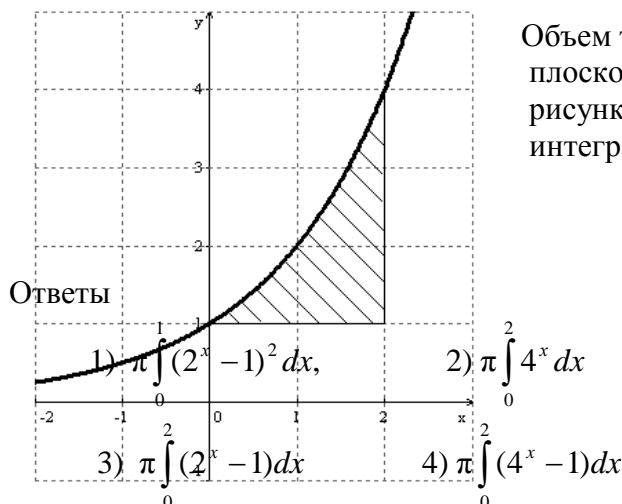
Задание № 15 (выберите один вариант ответа)

Площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$, равна ...

Ответы

- 1) $2/3$ 2) 1 3) $4/3$ 4) $1/3$

Задание № 16 (выберите один вариант ответа)



Задание № 17 (выберите один вариант ответа)

Двойной интеграл $\iint_D x^2 y d\sigma$, где $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$, равен ...

ОТВЕТЫ

- 1) $1/9$ 2) 1 3) $1/2$ 4) $2/3$

Задание № 18 (выберите один вариант ответа)

Сумма ряда $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ равна ...

ОТВЕТЫ

- 1) 1 2) $1/2$ 3) $3/2$ 4) 2

Задание № 19 (выберите один вариант ответа)

Какие из данных рядов сходятся?

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n(n+1)}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^n$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{5n-1}$.

ОТВЕТЫ:

- 1) 2;3 2) 1;3 3) 1;2 4) 1;2;3

Задание № 20 (выберите один вариант ответа)

Область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2}$ имеет вид ...

ОТВЕТЫ:

- 1) $(-1/2; 1/2)$ 2) $(-2; 2)$ 3) $[-1/2; 1/2]$ 4) $[-1/2; 1/2]$

Задание № 21 (выберите один вариант ответа)

Записать три первых отличных от нуля члена ряда Тейлора в окрестности точки O для функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

ОТВЕТЫ

1) не существует, 2) $\frac{1}{x} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots$

$$3) \quad 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad 4) \quad 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$$

Критерии оценок.

Перевод количества верных ответов в баллы: 1 верный ответ – 2 балла, максимальное количество баллов – 42 балла.

Каждая дисциплина учебного плана оценивается по 100-балльной системе с переводом баллов в оценки пятибалльной системы.

Составитель



Чуванова Г. М.

«18» февраля 2024 г.