

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сахалинский государственный университет»

Кафедра электроэнергетики и физики

УТВЕРЖДЕН
на заседании кафедры электроэнергетики и физики 19
сентября 2024 г., протокол № 1



В. П. Максимов

**ФОНД
ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

Б1.В.01.02 МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Уровень высшего образования
БАКАЛАВРИАТ

Направление подготовки
16.03.01 Техническая физика

Профиль (направленность) подготовки
Физика температурных процессов

Квалификация
Бакалавр

1. Формируемые компетенции и индикаторы их достижения по дисциплине (модулю)

Коды компетенции	Содержание компетенций	Код и наименование индикатора достижения компетенции
ПК-2	Способен применять физико-математический аппарат, теоретические, расчётные и экспериментальные методы исследований, методы математического и компьютерного моделирования в процессе профессиональной деятельности	<p>ПК-2.1 Знать: теоретические и экспериментальные исследования в избранной области технической физики.</p> <p>ПК-2.2 Уметь: самостоятельно проводить теоретические и экспериментальные исследования в избранной области технической физики, использовать основные приемы обработки и представления полученных данных, учитывать современные тенденции развития технической физики в своей профессиональной деятельности</p> <p>ПК-2.3 Владеть: Опытном самостоятельного проведения теоретических и экспериментальных исследований в избранной области технической физики, использования основных приемов обработки и представления полученных данных, учитывать современные тенденции развития технической физики в своей профессиональной деятельности.</p>

2. Паспорт фонда оценочных средств

№ п/п	Контролируемые разделы (темы) дисциплины	Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства
1.	Тема 1. Специальные функции	ПК-2	Практическое задание, выполнение домашнего задания.
2.	Тема 2. Уравнения математической физики.	ПК-2	Практическое задание, выполнение домашнего задания.
3.	Тема 3. Элементы теории обобщенных функций.	ПК-2	Практическое задание, выполнение домашнего задания.

Критерии и показатели оценивания компетенций на различных этапах их формирования

Этап формирования компетенции (разделы, темы дисциплины)	Формируемая компетенция	Критерии и показатели оценивания компетенций			Формы контроля сформированности компетенций
		Знать:	Уметь:	Владеть:	
Основные уравнений математической физики.	ПК-2	Основные уравнений математической физики. Классификация уравнений с частными производными второго порядка. Нахождение общего решения уравнений в частных производных второго порядка.	Решать примеры основных уравнений математической физики. Приведение к каноническому виду уравнений в частных производных второго порядка и нахождение их общего решения.	способностью и готовностью к изучению дальнейших понятий и теорий, разработанных в современной математики.	Контрольная работа 1
Уравнения Бесселя.	ПК-2	Уравнение Бесселя.	Разложение произвольной функции в ряд по функциям Бесселя.	применять методы математического анализа	
Уравнения гиперболического типа.	ПК-2	Метод Даламбера для решения задачи Коши для волнового уравнения свободных и вынужденных колебаний струны. Метод Тейлора для решения задачи Коши многомерных уравнений свободных и вынужденных колебаний объектов. Методы решения краевых задач. Задача Штурма-Лиувилля. Метод разделения переменных (метод Фурье) для решения однородных и неоднородных граничных задач для уравнений свободных и вынужденных колебаний.	Решать задачи по теме	иметь представление о взаимосвязи начальных и граничных условий при нахождении решений уравнений в частных производных	Контрольная работа 2
Уравнения параболического типа.	ПК-2	Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности. Формула Пуассона. Метод Тейлора для решения задачи Коши многомерных уравнений в отсутствии и при наличии внешних источников тепла. Краевые задачи для уравнения теплопроводности. Метод разделения переменных (метод Фурье) для решения однородных и неоднородных граничных задач для уравнения теплопроводности.	Решать задачи по теме	иметь представление о процессах, описываемых уравнениями математической физики (уравнениями в частных производных)	Контрольная работа 3

Этап формирования компетенции (разделы, темы дисциплины)	Формируемая компетенция	Критерии и показатели оценивания компетенций			Формы контроля сформированности компетенций
		Знать:	Уметь:	Владеть:	
Уравнения эллиптического типа.	ПК-2	Уравнения Лапласа и Пуассона. Постановка основных краевых задач. Внутренняя и внешняя задачи Дирихле для круга. Внутренняя и внешняя задачи Неймана для круга. Фундаментальное решение уравнения Лапласа в пространстве и на плоскости.	Решать задачи по теме	иметь представление о процессах, описываемых уравнениями математической физики (уравнениями в частных производных)	Контрольная работа 4
Преобразование Лапласа и его применение при решении уравнений	ПК-2	Уравнения Лапласа.	Применять при решении уравнений метод Лапласа	иметь представление о процессах, описываемых уравнениями математической физики (уравнениями в частных производных)	
Нелинейные уравнения математической физики.	ПК-2	Уравнение Римана. Уравнения ударной волны. Уравнение Бюргерса.	Решать уравнения	иметь представление о процессах, описываемых уравнениями математической физики (уравнениями в частных производных)	
Уравнение Кортевега-де Фриза.	ПК-2		Решать уравнения	иметь представление о процессах, описываемых уравнениями математической физики (уравнениями в частных производных)	
Математические модели при решении различных прикладных задач.	ПК-2		Решать задачи по теме	иметь представление о процессах, описываемых уравнениями математической физики (уравнениями в частных производных)	

Контрольная работа

Каждый студент в рамках проведения семинарских занятий представляет четыре контрольные работы.

Результат	Контрольная работа выполнена не в полном объеме полностью (частично)	Контрольная работы выполнена правильно в полном объеме
Количество баллов	5	15

Типовые контрольные задания и методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Примерная тематика контрольных работ

1. Приведение уравнений к канонической форме и нахождение общего решения уравнения.
2. Задача Коши для волновых уравнений. Решение граничных задач методом Фурье.
3. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Решение граничных задач методом Фурье.
4. Решение граничных задач для уравнений эллиптического типа.

Примеры решения задач

Пример 1. Привести к каноническому виду уравнение:

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0. \quad (1.1)$$

▲ Запишем общий вид уравнения второго порядка

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (1.2)$$

и сравним коэффициенты при производных в уравнении (1.2) и в исходном (1.1):

$$a = x^2; \quad b = 0; \quad c = -y^2.$$

Определим, к какому типу принадлежит исходное уравнение:

$$D = b^2 - ac = 0 - x^2(-y^2) = (xy)^2 > 0,$$

следовательно, исходное уравнение (1.1) принадлежит к уравнениям гиперболического типа.

Осуществим переход к канонической форме с помощью общих интегралов уравнения характеристик. В нашем случае это уравнение имеет вид:

$$x^2(dy)^2 - y^2(dx)^2 = 0, \text{ или } (xdy + ydx)(xdy - ydx) = 0,$$

$$\Rightarrow xdy + ydx = 0, \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}, \Rightarrow xy = C_1;$$

$$\Rightarrow xdy - ydx = 0, \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \Rightarrow \frac{y}{x} = C_2.$$

Следовательно, C_1 и C_2 определяют уравнения семейств характеристик. Тогда преобразование независимых переменных будет иметь вид

$$\xi = C_1 = xy,$$

$$\eta = C_2 = \frac{y}{x}.$$

Найдем u_{xx} и u_{yy} в новых переменных

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi y - \frac{y}{x^2} u_\eta, \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = x u_\xi + \frac{1}{x} u_\eta,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \eta_{\xi\xi} + u_\eta \eta_{xx} =$$

$$= y^2 u_{\xi\xi} - 2 \frac{y^2}{x^2} u_{\xi\eta} + \frac{y^2}{x^4} u_{\eta\eta} + 2 \frac{y}{x^3} u_\xi,$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy} = x^2 u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + \frac{1}{x^2} u_{\eta\eta}$$

Таким образом, исходное уравнение (1.1) в новых переменных имеет вид:

$$x^2 \left(y^2 u_{\xi\xi} - 2 \frac{y^2}{x^2} u_{\xi\eta} + \frac{y^2}{x^4} u_{\eta\eta} + 2 \frac{y}{x^3} u_\xi \right) - y \left(x^2 u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + \frac{1}{x^2} u_{\eta\eta} \right) = 0,$$

и после преобразований, получим

$$2 \frac{y}{x} u_\eta - 4y^2 u_{\xi\eta} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{2xy} u_\eta - u_{\xi\eta} = 0,$$

с учетом того, что $xy = \xi$ каноническая форма исходного уравнения имеет вид:

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{2\xi} u_\xi.$$

Пример 2. Найти решение уравнения

$$u_{tt} - 2\Delta u = 2xyt^2, \text{ если } u|_{t=0} = xy + z^2, \quad u_t|_{t=0} = y^3$$

Здесь $\bar{x} = (x, y, z)$, $u_0 = xy + z^2$, $u_1 = y^3$. Так как $a^2 = 2$ и $f(x, t) = 2xyt^2$,

то по (15.17)

$$u_{n+2}(x) = 2\Delta u_n(x) + \frac{\partial^n}{\partial t^n} (2xyt^2) \Big|_{t=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Найдем u_n по этой формуле

$$n = 0$$

$$u_2 = 2\Delta u_0 + 2xyt^2 \Big|_{t=0} = 2(0 + 0 + 2) + 0 = 4,$$

$$n = 1$$

$$u_3 = 2\Delta u_1 + \frac{\partial}{\partial t} (2xyt^2) \Big|_{t=0} = 2 \cdot 6y + 4xyt \Big|_{t=0} = 12y + 0 = 12y,$$

$$n = 2$$

$$u_4 = 2\Delta u_2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} (2xyt^2) \Big|_{t=0} = 2 \cdot 0 + 4xy \Big|_{t=0} = 4xy,$$

$$n = 3$$

$$u_5 = 2\Delta u_3 + \frac{\partial^3}{\partial t^3} (2xyt^2) \Big|_{t=0} = 2\Delta(12y) + 0 = 2 \cdot 0 = 0,$$

$$n = 4$$

$$u_6 = 2\Delta u_4 + \frac{\partial^4}{\partial t^4} (2xyt^2) \Big|_{t=0} = 2\Delta(4xy) + 0 = 2 \cdot 0 = 0.$$

И так далее, все остальные $u_{2k} = 0$ ($k \geq 3$) и $u_{2k+1} = 0$ ($k \geq 2$).

Подставляем полученные u_n в решение (15.16)

$$u(x, y, z, t) = xy + z^2 + ty^3 + \frac{t^2}{2} \cdot 4 + \frac{t^3}{6} \cdot 12y + \frac{t^4}{24} \cdot 4xy = \\ xy + z^2 + ty^3 + 2t^2 + 2yt^3 + \frac{1}{6} xyt^4.$$

Таким образом, решением исходного уравнения является функция

$$u(x, y, z, t) = xy + z^2 + ty^3 + 2t^2 + 2yt^3 + \frac{1}{6} xyt^4.$$

Пример 3. Решить краевую задачу для неоднородного уравнения гиперболического типа

$$u_{tt} = u_{xx} + 2t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

при начальных условиях

$$u \Big|_{t=0} = 0, \quad u_t \Big|_{t=0} = x$$

и граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = t.$$

▲ Решение этой задачи будем искать в виде

$$u(x, t) = v(x, t) + \varpi(x, t)$$

Запишем, чему равна функция $\varpi(t, x)$ в соответствии с граничными условиями (7.3)

$$\varpi(x, t) = 0 + \frac{x}{l}[t - 0] = \{l = 1\} = xt,$$

Следовательно, функция $u(x, t)$ принимает вид

$$u(x, t) = v(x, t) + xt.$$

Вычислим от этой функции вторые производные по t и x

$$u_{tt}(x, t) = v_{tt}(x, t) + \varpi_{tt}(x, t) = \{\varpi_t(x, t) = x; \varpi_{tt}(x, t) = 0\} = v_{tt};$$

$$u_{xx}(x, t) = v_{xx}(x, t) + \varpi_{xx}(x, t) = \{\varpi_x(x, t) = t; \varpi_{xx}(x, t) = 0\} = v_{xx},$$

и, подставив в исходное уравнение, получим

$$v_{tt} = v_{xx} + 2t.$$

Добавим к этому уравнению начальные

$$u|_{t=0} = v|_{t=0} + xt|_{t=0} = v|_{t=0} + 0, \Rightarrow v|_{t=0} = 0,$$

$$u_t|_{t=0} = v_t|_{t=0} + (xt)_t|_{t=0} = v_t|_{t=0} + x, \Rightarrow v_t|_{t=0} = x,$$

и граничные условия

$$u|_{x=0} = v|_{x=0} + xt|_{x=0} = v|_{x=0} + 0, \Rightarrow v|_{x=0} = 0,$$

$$u|_{x=1} = v|_{x=1} + xt|_{x=1} = v|_{x=1} + t = t, \Rightarrow v|_{x=1} = 0.$$

Таким образом, получим следующую задачу

$$v_{tt} = v_{xx} + 2t;$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = x;$$

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=1} = 0.$$

Решение этой задачи будем искать в виде

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) \sin n\pi x.$$

причем

$$V_n|_{t=0} = 0; V_n'|_{t=0} = x.$$

Вычислим от функции (7.7) вторые производные по t и x и, подставив их в уравнение (7.5), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} [V'_n(t) + (n\pi)^2 V_n(t)] \sin n\pi x = 2t.$$

Для нахождения функции $V_n(t)$ разложим единицу в ряд Фурье по системе функций на интервале (0,1):

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin n\pi x.$$

Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} [V'_n(t) + \lambda^2 V_n(t)] \sin n\pi x = \sum_{n=0}^{\infty} 2ta_n \sin n\pi x,$$

так как

$$\int_0^1 \sin^2 n\pi x dx = \frac{1}{2}, \quad \Rightarrow \quad a_n = \int_0^1 \sin n\pi x dx = \frac{2}{n\pi},$$

то, уравнение (7.9) принимает вид

$$V'_n(t) + (n\pi)^2 V_n(t) = \frac{4t}{n\pi},$$

которое является обыкновенным неоднородным линейным уравнением второго порядка. Его общее решение равно сумме общего решения, соответствующего ему однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Общее решение однородного уравнения

$$V'_n(t) + (n\pi)^2 V_n(t) = 0$$

имеет вид

$$V_n^{общ.одн.}(t) = B_n \cos n\pi t + A_n \sin n\pi t, \quad A_n, B_n = const.$$

Частное решение уравнения (7.10) можно найти, например, методом неопределенных коэффициентов. Сравним вид правой части уравнения с выражением

$$f(t) = e^{\alpha t} [P_q \cos \beta t + Q_l \sin \beta t]$$

и определим значения параметров α, β, q, l

$$\alpha = 0, \beta = 0, P_q = t, \Rightarrow q = 1, l = 0$$

При этих значениях параметров выражение имеет вид правой части уравнения Следовательно, можно записать частное решение этого уравнения в виде

$$V_n^q(t) = e^{\alpha t} [E_m \cos \beta t + R_m \sin \beta t] t^s.$$

Так как $q=1, l=0$, то степень m многочленов E и R равна 1, и эти многочлены имеют вид $E_m = C_1 t + C_2, R_m = D_1 t + D_2$. При наших значениях параметров α и β комплексное число $\alpha + i\beta = 0$ равно нулю и не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения $k_{1,2} = \pm i\lambda$, поэтому значение показателя s в формуле равно нулю. Таким образом, частное решение через неопределенные коэффициенты имеет вид

$$V_n^q(t) = C_1 t + C_2.$$

Для определения коэффициентов C_1 и C_2 , подставим эту функцию в уравнение (III.6.3.10)

$$C_1 t + C_2 = \frac{4}{n\pi} t.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых функциях в правой и левой частях этого уравнения, найдем значения неопределенных коэффициентов C_1 и C_2

$$C_1 = \frac{4}{n\pi} \quad \text{и} \quad C_2 = 0.$$

Следовательно, частное решение уравнения (7.5) имеет вид

$$V_n^q(t) = \frac{4t}{n\pi}.$$

Таким образом, общее решение уравнения (7.10) имеет вид

$$V_n(t) = B_n \cos n\pi t + A_n \sin n\pi t + \frac{4t}{n\pi}.$$

Используя условие (7.8), найдем значения коэффициентов A_n и B_n :

$$V_n(t) = B_n \cos n\pi t + A_n \sin n\pi t + \frac{4t}{n\pi}, \quad 0 = B_n + 0 + 0, \Rightarrow B_n = 0;$$

$$V_n(t) = -n B_n \sin n\pi t + n A_n \cos n\pi t + \frac{4}{n\pi} = x, \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x; a_n = 2 \int_0^1 x \sin n\pi x dx = -\frac{1}{n\pi} (-1)^n \end{aligned} \right\};$$

$$-\frac{1}{n\pi} (-1)^n = n\pi A_n + \frac{4}{n\pi}; \Rightarrow A_n = -\frac{4}{(n\pi)^2} \left[\frac{1}{4} (-1)^n + 1 \right].$$

Подставляя полученные коэффициенты в формулу, получим

$$V_n(t) = -\frac{4}{(n\pi)^2} \left[\frac{1}{4} (-1)^n + 1 \right] \sin n\pi t + \frac{4t}{n\pi}.$$

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \left[-\frac{1}{4} (-1)^n + 1 \right] \sin n\pi x \sin n\pi t$$

Затем, подставляя (7.13) в решение (7.7), получим и, используя равенство (7.4) окончательно получим решение исходной задачи:

$$u(x, t) = xt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \left[-\frac{1}{4} (-1)^n + 1 \right] \sin n\pi x \sin n\pi t. \blacktriangle$$

Перечень вопросов к промежуточной аттестации

1. Краевые условия и краевые задачи.
2. Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных 2-го порядка. Приведение уравнений к каноническому виду.
3. Уравнение характеристик. Классификация уравнений в частных производных 2-го порядка.
4. Уравнения гиперболического, параболического и эллиптического типа и их канонические формы.
5. Уравнения гиперболического типа. Колебания неограниченной струны и волновое уравнение.
6. Волновое уравнение. Формула Даламбера для однородного волнового уравнения.
7. Волновое уравнение. Формула Даламбера для неоднородного волнового уравнения.
8. Волновое уравнение. Колебания струны с закрепленными концами.
9. Понятие об обобщенных решениях.
10. Краевые задачи для однородного волнового уравнения. Метод Фурье.
11. Краевые задачи для однородного волнового уравнения. Задача Штурма-Лиувилля.
12. Краевые задачи для неоднородного волнового уравнения. Метод Фурье.
13. Волновое уравнение для электромагнитных волн.
14. Уравнения параболического типа. Постановка краевых задач.
15. Уравнения параболического типа. Решение краевой задачи методом Фурье для однородного уравнения.
16. Задача о влиянии мгновенного сосредоточенного источника.
17. Неоднородное уравнение теплопроводности. Функция Грина.
18. Уравнения эллиптического типа. Уравнение Лапласа и его фундаментальное решение в пространстве и на плоскости.
19. Гармонические функции и их свойства.
20. Постановка краевых задач для уравнения Лапласа.
21. Метод функции Грина для решения задачи Дирихле.
22. Задача Дирихле уравнения Лапласа для полупространства.
23. Решение краевых задач уравнения Лапласа методом разделения переменных.
24. Задача Дирихле уравнения Лапласа для круга.
25. Уравнение Римана. Уравнения ударной волны. Уравнение Брюггера.