

САХАЛИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**А. Б. Никитина
Чан Сун Нами**

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие
для студентов нематематических специальностей

Рекомендовано Дальневосточным региональным учебно-методическим центром
(ДВ РУМЦ) в качестве учебно-методического пособия для студентов
нематематических специальностей вузов региона

**Южно-Сахалинск
2010**

УДК 51(075.4)
ББК 22.1я73
Н 63

Н 63 Никитина, А. Б. Математика: учебно-методическое пособие для студентов нематематических специальностей. – 2-е изд., перераб. и доп. / А. Б. Никитина, Чан Сун Нами. – Южно-Сахалинск: СахГУ, 2010. – 76 с.

ISBN 978-5-88811-315-8

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов заочной и других форм обучения нематематических специальностей. В пособие включены решения типовых вариантов контрольных работ с пояснениями и необходимым теоретическим материалом, контрольные работы, вопросы для самоконтроля, тесты.

Рецензенты: *В. П. Мизинцев*, докт. пед. наук, профессор;
Б. С. Поздеев, канд. физ.-мат. наук, профессор филиала Тихоокеанского государственного экономического университета в г. Южно-Сахалинске.

УДК 51(075.4)
ББК 22.1я73

Учебное издание

Никитина Алла Борисовна, Чан Сун Нами

МАТЕМАТИКА

*Учебно-методическое пособие для студентов
нематематических специальностей*

Верстка: *Е. Ю. Иосько, Т. В. Филипенко. Корректоры:* *Н. И. Шишкина, М. Ф. Шатохина*

Подписано в печать 27.12.2010. Бумага «SvetoCopy». Гарнитура «Times New Roman». Формат 60х84¹/₈. Тираж 500 экз. Объем 9,5 усл. п. л. Заказ № 1151-10. Издательство Сахалинского государственного университета. 693008, г. Южно-Сахалинск, ул. Ленина, 290, каб. 32. Тел. (4242) 45-23-16. Факс (4242) 45-23-17. E-mail: polygraph@sakhgu.sakhalin.ru



© Сахалинский государственный университет, 2010
© Чан Сун Нами, 2010
© Никитина А. Б., 2010

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ.....	5
ПРОГРАММА КУРСА «МАТЕМАТИКА».....	5

РАЗДЕЛ 1. Элементы линейной, векторной алгебры и аналитической геометрии. Введение в математический анализ

1.1. Методические указания и решение типового варианта контрольной работы № 1.....	8
1.2. Методические указания и решение типового варианта контрольной работы № 2.....	14
1.3. Вопросы для контроля	24

РАЗДЕЛ 2. Математический анализ

2.1. Методические указания и решение типового варианта контрольной работы № 3.....	25
2.2. Методические указания и решение типового варианта контрольной работы № 4.....	30
2.3. Вопросы для контроля	37

РАЗДЕЛ 3. Теория вероятностей

3.1. Методические указания и решение типового варианта контрольной работы № 5.....	38
3.2. Вопросы для контроля	52

РАЗДЕЛ 4. Итоговые тесты

4.1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия	53
4.2. Введение в математический аналитический анализ	54
ГЛОССАРИЙ	56
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Контрольная работа № 1	59
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Контрольная работа № 2	61
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Контрольная работа № 3	64
ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Контрольная работа № 4	66
ПРИЛОЖЕНИЕ 5. Контрольная работа № 5	68
ПРИЛОЖЕНИЕ 6. Таблица «Значение функции Пуассона»	70
ПРИЛОЖЕНИЕ 7. Таблица значений функций Лапласа	73
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	75

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие по курсу математики для студентов содержит теоретический материал, который охватывает разделы математики: «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», «Дифференциальное исчисление функции одной и двух переменных», «Приложение производной к решению практических задач», «Экстремумы функций одной и двух переменных», «Ряды», «Дифференциальные уравнения», «Интегральное исчисление функции одной и двух переменных», «Элементы теории поля», «Численные методы», «Элементы теории вероятностей и математической статистики».

Методические рекомендации к контрольным работам помогут обучающимся решить и оформить решения задач. В пособии приведены подробные решения достаточного количества типовых задач, в конце каждого раздела имеются задачи для самостоятельного решения, список рекомендуемой литературы. Пособие может быть использовано студентами нематематических специальностей: физика, информатика, технология и предпринимательство, менеджмент организации и др.

Основная особенность методического пособия – сочетание необходимого теоретического материала с решениями задач на его применение.

Учебно-методическое пособие по математике для студентов написано в соответствии с требованиями государственного стандарта высшего профессионального образования. В настоящее время идет прогрессирующий процесс математизации всех наук, математика активно используется для развития навыков математического исследования. Поэтому почти все вузовские специальности в том или ином объеме содержат математику. Математический аппарат, изложенный в данном учебно-методическом пособии, призван помочь развить у студента естественнонаучные знания, логическое мышление, также он является средством для изучения других дисциплин. По каждому из разделов курса «Математика» предусмотрена контрольная работа.

Основные задачи дисциплины:

1. Изучить теоретические основы дисциплины.
2. Ознакомиться с основными вычислительными приемами.
3. Способствовать развитию логического и аналитического мышления студентов.

Требования к уровню освоения содержания курса

В процессе обучения студент должен:

1. Овладеть основными вычислительными навыками, необходимыми для решения задач не только изучаемого курса, но и других дисциплин учебного плана специальности.

2. Изучить основы линейной алгебры и аналитической геометрии и использовать эти знания при знакомстве с задачами линейного программирования; ознакомиться с такими элементами математического анализа, как: предел функции, непрерывность функции, производная, приложение производной к исследованию функций, экстремумы функций одной и двух переменных, ряды, дифференциальные уравнения и интегралы, кратные интегралы, элементы теории поля.

Студент должен уметь:

- решать практические задачи по всем разделам математики;
- применять математическую теорию в различных прикладных вопросах.

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Контрольную работу следует выполнять в тетради, чернилами любого цвета, кроме красного, оставляя поля для замечаний рецензента.

2. На обложке должны быть указаны ФИО, курс, специальность, номер (шифр), название дисциплины, дата отсылки, адрес. Внизу обложки указать дату выполнения и поставить свою подпись.

3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании строго по своему варианту. Номер Вашего варианта соответствует последней цифре шифра (цифра 0 соответствует 10-му варианту). Контрольная работа, содержащая не все задачи или задачи не своего варианта, не засчитывается.

4. Решения задач надо расположить в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.

5. Перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условие. В том случае, если несколько задач, из которых студент выбирает задачу своего варианта, имеют общую формулировку, следует, переписывая условия задачи, заменить общие данные конкретными из соответствующего номера.

6. При наличии замечаний рецензента необходимо выполнить заново конкретное задание с учетом замечаний в этой же тетради.

7. После выполнения контрольной работы студент допускается к ее защите.

ПРОГРАММА КУРСА «МАТЕМАТИКА»

РАЗДЕЛ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1. Определители второго порядка, их вычисление.
2. Определители третьего порядка, свойства и методы их вычисления.
3. Миноры, алгебраические дополнения.
4. Матрицы, действия над ними.
5. Обратная матрица и ее нахождение.
6. Системы линейных алгебраических уравнений, методы их решения.

РАЗДЕЛ 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

1. Понятие векторных и скалярных величин.
2. Геометрические действия над векторами.
3. Проекция вектора на ось и ее свойства.
4. Задание векторов в координатной форме.
5. Арифметические действия над векторами в координатной форме.
6. Скалярное произведение векторов и его свойства.
7. Условия ортогональности и коллинеарности двух векторов. Угол между векторами.
8. Векторное произведение векторов.
9. Смешанное произведение векторов.
10. Приложения и решение физических и геометрических задач.

РАЗДЕЛ 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

1. Расстояние между двумя точками и деление отрезка в заданном отношении.
2. Прямая на плоскости. Взаимное расположение двух прямых на плоскости.
3. Угол между двумя прямыми на плоскости, условия их пересечения, перпендикулярности и параллельности.
4. Кривые второго порядка – окружность, эллипс, гипербола, парабола и их свойства.

РАЗДЕЛ 4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Плоскость.
2. Взаимное расположение двух плоскостей.
3. Прямая в пространстве, способы ее задания.
4. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
5. Взаимное расположение прямой и плоскости.
6. Поверхности второго порядка.

РАЗДЕЛ 5. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1. Функция. Определение, область определения, множество значений. Способы задания. Основные элементарные функции, их графики. Основные классы функций.

2. Числовая последовательность. Предел последовательности. Предел функции в точке и на промежутке. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Эквивалентные бесконечно малые. Раскрытие неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right), (1^\infty)$. Первый и второй замечательные пределы.

3. Непрерывность функции в точке и на промежутке. Классификация точек разрыва. Связь непрерывности функции в точке с пределом функции в этой точке.

РАЗДЕЛ 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Производная функции. Геометрический смысл. Таблица производных. Правила нахождения производных функций.

2. Дифференциал. Приложения производных и решение задач. Основные теоремы дифференциального исчисления функции одной переменной: Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя. Исследование функции с помощью производной.

3. Функции нескольких переменных. Область определения, график. Предел функции двух переменных. Непрерывность функции двух переменных. Частные приращения и производные. Экстремумы функции двух переменных.

РАЗДЕЛ 7. ЭЛЕМЕНТЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1. Первообразная. Теорема о первообразных. Свойства неопределенных интегралов. Таблица интегралов.

2. Методы интегрирования. Интегрирование дробно-рациональных функций. Интегрирование простейших дробей, тригонометрических выражений, иррациональных функций.

3. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона – Лейбница. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле.

4. Несобственные интегралы.

5. Кратные интегралы.

РАЗДЕЛ 8. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ РЯДОВ

1. Числовые ряды. Свойства рядов. Геометрический и гармонический ряды. Необходимый признак сходимости числовых рядов. Признаки сходимости положительных рядов. Признак Лейбница.

2. Степенной ряд. Область сходимости и радиус сходимости. Теорема Абеля. Ряды Фурье.

РАЗДЕЛ 9. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения первого порядка: однородные, с разделяющимися переменными, линейные, уравнение Бернулли, методы решения уравнений.

2. Дифференциальные уравнения второго порядка: допускающие понижение порядка; с постоянными коэффициентами, однородные и неоднородные. Частное решение дифференциального уравнения.

3. Дифференциальные уравнения высших порядков. Системы дифференциальных уравнений. Приближенное решение дифференциального уравнения.

4. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений и методы их решения.

5. Численные методы.

РАЗДЕЛ 10. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1. Элементы теории поля. Поверхности и линии уровня. Производная по направлению. Градиент скалярного поля и его свойства.

2. Векторное поле. Поток. Циркуляция. Дивергенция. Ротор.

РАЗДЕЛ 11. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Теория вероятностей и математическая статистика. Основные теоремы теории вероятностей.

2. Случайные величины. Непрерывные и дискретные случайные величины. Законы распределения случайных величин.

3. Двумерная случайная величина. Доверительный интервал, проверка гипотезы. Критерий Пирсона.

РАЗДЕЛ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ, ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ.

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1.1. Методические указания и решение типового варианта контрольной работы № 1

ЗАДАЧА. Найти: а) $\vec{a} = \vec{CB} - \vec{AC}$, $\vec{b} = \vec{AB}$;
 б) модуль вектора $\vec{a}$;
 в) скалярное произведение $(\vec{a}; \vec{b})$, $\cos \varphi = \cos(\vec{a}; \vec{b})$;
 г) векторное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}$;
 д) смешанное произведение векторов $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$; $\vec{c} = \vec{BC}$.

Решение: Пусть даны две точки в пространстве А (x_1, y_1, z_1), В (x_2, y_2, z_2). Вектором в пространстве называется направленный отрезок. Обозначается $\vec{AB}$, координаты вектора находятся как разность соответствующих координат точек $\vec{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$. Длина вектора находится по формуле $|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$. Для двух векторов $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$, $\vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$, $\vec{a} + \vec{b} = (x_a + x_b, y_a + y_b, z_a + z_b)$, $\vec{a}\lambda = (x_a\lambda, y_a\lambda, z_a\lambda)$, $\hat{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos \varphi$, $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$, из последней формулы $\cos \varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$; $\vec{a} \times \vec{b} = x_a y_b - y_a x_b + z_a z_b - z_a z_b$.

Векторное произведение двух векторов вычисляется по формуле $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$,

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – ортонормированный базис.

Смешанное произведение находится как $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$, где $\vec{c} = (x_c, y_c, z_c)$.

ПРИМЕР. Найти: а) $\vec{a} = \vec{CB} - \vec{AC}$, $\vec{b} = \vec{AB}$;
 б) модуль вектора $\vec{a}$;
 в) скалярное произведение $(\vec{a}; \vec{b})$, $\cos \varphi = \cos(\vec{a}; \vec{b})$;
 г) векторное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}$;
 д) смешанное произведение векторов $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$; $\vec{c} = \vec{BC}$.

А (4, 2, 6), В (-1, 2, 1), С (1, 0, -1).

Решение:

- а) $\vec{CB} = (-2; 2; 2)$, $\vec{b} = \vec{AB} = (-5; 0; -5)$
 $\vec{AC} = (-3; -2; -7)$; $\vec{c} = \vec{BC} = (2; -2; -2)$
 $\vec{a} = \vec{CB} - \vec{AC} = (-2 + 3; 2 + 2; 2 + 7) = (1; 4; 9)$;
 б) $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 9^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$;
 в) $\vec{a}\vec{b} = (1; 4; 9)(-5; 0; -5) = -5 + 0 - 45 = -50$;

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2};$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-50}{7\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{-50}{7 \cdot 5 \cdot 2} = -\frac{5}{7};$$

$$\text{г) } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 9 \\ -5 & 0 & -5 \end{vmatrix} = (-20; -40; 20).$$

$$\text{д) } \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ -5 & 0 & -5 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -10 \cdot (-5 + 5) = 0,$$

где $\vec{c} = \vec{BC} = (2, -2, -2)$.

ЗАДАЧА. Доказать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Решение: Базисом в пространстве R_n называется совокупность n векторов, таких, что любой другой вектор этого пространства может быть представлен в виде разложения по данному базису. В трехмерном пространстве R_3 , если существуют числа α, β, γ , такие, что любой другой вектор $\vec{d}$ может быть представлен в виде линейной комбинации трех базисных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, т. е. $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$. В трехмерном пространстве базис могут образовывать любые три некопланарных вектора, если их смешанное произведение не равно нулю: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$.

ПРИМЕР. Доказать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе: $\vec{a} = (2, 2, 3)$, $\vec{b} = (3, 1, 2)$, $\vec{c} = (1, 3, 1)$, $\vec{d} = (4, 0, 1)$.

Решение: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис, если они некопланарные, т. е. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0, \text{ так как смешанное произведение отлично от нуля, то } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ об-}$$

разуют базис. В данном базисе любой другой вектор представлен в виде линейной комбинации данных векторов $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, α, β, γ – координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Последнее равенство равносильно системе:

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta + \gamma = 4 \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 1 \end{cases}, \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 12, \Delta = 12 \neq 0, \text{ то система имеет единственное решение.}$$

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -12, \alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta} = \frac{-12}{12} = -1,$$

$$\Delta_\beta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 24, \quad \beta = \frac{\Delta_\beta}{\Delta} = \frac{24}{12} = 2,$$

$$\Delta_\gamma = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \gamma = \frac{\Delta_\gamma}{\Delta} = \frac{0}{12} = 0.$$

Ответ: $\vec{d} = -\vec{a} + 2\vec{e}$.

ЗАДАЧА. Сила $\vec{F}$ приложена к точке А. Вычислить:

а) работу силы $\vec{F}$, если точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, переместилась в точку В;

б) модуль вращающего момента силы $\vec{F}$, приложенной к точке В.

Решение: Если некоторая сила $\vec{F}$ приложена к материальной точке А и при этом точка А прямолинейно переместилась в точку В, то работа А силы определяется по формуле $A = \vec{F}\vec{S}$, где $\vec{S} = \vec{AB}$. Понятие векторного произведения применяется при решении физических задач. Например, для нахождения вращающего момента силы $\vec{F}$ пользуемся формулой $\vec{M} = \vec{AB} \times \vec{F}$, где $\vec{F}$ – сила, приложенная к точке В, относительно точки А.

ПРИМЕР. Сила $\vec{F}$ приложена к точке А. Вычислить:

а) работу силы $\vec{F}$, если точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, переместилась в точку В;

б) модуль вращающего момента силы $\vec{F}$ относительно точки В.

Решение:

а) Известно $A = \vec{F}\vec{S}$, $\vec{F} = (3, 2, -1)$, А (1, 3, 1), В (3, 5, 0), где $\vec{S} = \vec{AB}$, так как точка А переместилась в точку В, то $\vec{AB} = (2, 2, -1)$; следовательно, $A = (3, 2, -1)(2, 2, -1) = 6 + 4 + 1 = 11$.

Ответ: $A = 11$;

б) $\vec{M} = \vec{BA} \times \vec{F}$, $\vec{F} = (3, 2, -1)$, $\vec{BA} = (-2, -2, 1)$

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot \vec{i} + 1\vec{j} + 2\vec{k} = (0; 1; 2).$$

$$|\vec{M}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Ответ: $|\vec{M}| = \sqrt{5}$.

ЗАДАЧА. Заданы три точки пространства А, В и С. Найти:

а) уравнение стороны АВ треугольника АВС;

б) периметр треугольника (до 0,01);

в) уравнение плоскости (АВС);

г) площадь треугольника (до 0,01).

Решение: Уравнение прямой, проходящей через две точки пространства А (x_1, y_1, z_1) и В (x_2, y_2, z_2), имеет вид

$$(AB): \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки пространства, имеет вид

$$(ABC): \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0, \text{ где } C(x_3, y_3, z_3) \text{ некоторая точка пространства, отличная от } A \text{ и } B.$$

Площадь треугольника, построенного на двух векторах, находится по формуле $S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$.

ПРИМЕР. Заданы три точки пространства А, В и С (координаты точек взять из задания 1.1. Найти:

- а) уравнение стороны АВ треугольника ABC;
 - б) периметр треугольника (до 0,01);
 - в) уравнение плоскости (ABC);
 - г) площадь треугольника (до 0,01).
- А (4, 2, 0), В (-1, 2, 1), С (1, 0, -1).

Решение:

а) Уравнение прямой, проходящей через две точки А (4, 2, 0) и В (-1, 2, 1), имеет вид

$$(AB): \frac{x-4}{-1-4} = \frac{y-2}{2-2} = \frac{z}{1} \Rightarrow \frac{x-4}{-5} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{1} \quad \text{или}$$

$$\frac{x-4}{-5} = \frac{z}{1} \text{ и } y = 2;$$

$$\text{б) } P_{ABC} = |\vec{AB}| + |\vec{BC}| + |\vec{AC}|$$

$$\vec{AB} = (-5, 0, 1), \vec{BC} = (2, -2, -2), \vec{AC} = (-3, -2, -1)$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{26}, |\vec{BC}| = 2\sqrt{3}, |\vec{AC}| = \sqrt{14}$$

$$P_{ABC} = |\vec{AB}| + |\vec{BC}| + |\vec{AC}|$$

$$P_{ABC} = \sqrt{26} + 2\sqrt{3} + \sqrt{14} \approx 5,09 + 3,46 + 3,74 = 12,29;$$

$$\text{в) } (ABC): \begin{vmatrix} x-4 & y-2 & z \\ -1-4 & 0 & 1 \\ 1-4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$2(x-4) - 8(y-2) + 10z = 0$$

$$2x - 8y + 10z + 8 = 0$$

$$x - 4y + 5z + 4 = 0.$$

$$\text{Ответ: } x - 4y + 5z + 4 = 0;$$

$$\text{г) } S_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{BC}|$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (2; -8; 10)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{4 + 64 + 100} = \frac{1}{2} \times \sqrt{168} \approx \frac{1}{2} \times 12,96 = 6,48 \text{ кв. ед.}$$

$$\text{Ответ: } S = 6,48 \text{ кв. ед.}$$

ЗАДАЧА. Проверить совместность системы линейных алгебраических уравнений и решить ее:

- а) методом Крамера;
- б) методом Гаусса;
- в) матричным методом.

Решение: Система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет единственное решение, если определитель, составленный из коэффициентов, при неизвестных отличен от нуля.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots + \dots + \dots = \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Рассмотрим три метода решения систем линейных алгебраических уравнений:

а) *Правило Крамера* ($m = n$)

Система (1) имеет единственное решение, если $\Delta \neq 0$, которое находится из формулы

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

где Δ_i – определитель, полученный из определителя Δ путем замены i -того столбца столбцом свободных членов системы.

б) *Метод Гаусса*

Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными с помощью элементарных преобразований приводится к виду:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1m}x_m = d_1 \\ \quad \quad \quad x_2 + \dots + c_{2m}x_m = d_2 \\ \dots + \dots + \dots = \dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad x_m = d_m \end{cases} \quad (2)$$

Из последнего уравнения определяется x_m , из предпоследнего уравнения находится x_{m-1} и т. д.

в) *Матричный метод*

Систему (1) можно записать в виде

$$AX = B, \quad (3)$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – квадратная матрица, причем $\det A \neq 0$.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Умножив обе части равенства (3) на A^{-1} , получим

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \text{ или } X = A^{-1}B. \quad (4)$$

A^{-1} – обратная матрица.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^T, A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

A_{ij} – алгебраические дополнения к соответствующим элементам a_{ij} . $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. M_{ij} – минор элемента a_{ij} . Минор M_{ij} – это определитель $(n-1)$ -го порядка, полученный из определителя Δ n -го порядка путем вычеркивания i -той строки и j -того столбца.

ЗАДАЧА. Проверить совместность системы линейных алгебраических уравнений и решить ее: а) методом Крамера, б) методом Гаусса, в) матричным методом.

Решение: Система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет единственное решение, если определитель, составленный из коэффициентов, при неизвестных отличен от нуля

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}.$$

а) Метод Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -60$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 11 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & -1 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -180, \quad x_1 = \frac{-180}{-60} = 3$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 11 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = -60, \quad x_2 = \frac{-60}{-60} = 1$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 11 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = -60, \quad x_3 = \frac{-60}{-60} = 1.$$

Ответ: (3, 1, 1).

б) Метод Гаусса

Выпишем расширенную матрицу системы и преобразуем ее

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & | & 11 \\ 2 & -1 & -1 & | & 4 \\ 3 & -2 & 4 & | & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma_1 - \gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & | & 7 \\ 2 & -1 & -1 & | & 4 \\ 3 & -2 & 4 & | & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma_2 - 2\gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & | & 7 \\ 0 & -11 & 1 & | & -10 \\ 3 & -2 & 4 & | & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma_3 - \gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & | & 7 \\ 0 & -11 & 1 & | & -10 \\ 0 & -6 & 6 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma_2 \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & | & 7 \\ 0 & 11 & -1 & | & 10 \\ 0 & -6 & 6 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma_3 + 6\gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & | & 7 \\ 0 & 11 & -1 & | & 10 \\ 0 & 0 & -60 & | & -60 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma_3 \times \left(\frac{-1}{60}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & | & 7 \\ 0 & 11 & -1 & | & 10 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

Последней матрице соответствует система уравнений, эквивалентная исходной.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 7 \\ x_2 - 11x_3 = -10 \\ x_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}.$$

Ответ: (3, 1, 1).

в) *Матричный метод*

Систему (1) можно записать в виде

$$AX = B,$$

тогда $X = A^{-1}B$ $\det = -60$

$$X = -\frac{1}{60} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -12; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -6;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -11; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 18; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 18; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11.$$

$$X = -\frac{1}{60} \begin{pmatrix} -66 & -48 & -66 \\ -121 & 72 & -11 \\ -11 & 72 & -121 \end{pmatrix} = -\frac{1}{60} \begin{pmatrix} -180 \\ -60 \\ -60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: (3, 1, 1).

1.2. Методические указания и решение типового варианта контрольной работы № 2

Предел функции в точке

Определение: Последовательностью называется функция натурального аргумента $x_n = f(n)$, $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_{n'}, \dots$. Причем если $n' > n$, то $x_{n'}$ следует за x_n , независимо от того, больше он его или меньше.

Последовательность чисел называется сходящейся к числу a , если для любого положительного, сколь угодно малого числа ε (эпсилон) найдется такой номер N_ε , что для всех номеров $n > N_\varepsilon$ будет выполняться неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Геометрический смысл предела последовательности состоит в том, что за пределами ε – окрестности точки « a » находится лишь конечное число членов последовательности x_n , а внутри этой окрестности находится бесконечное множество членов последовательности и при $n \rightarrow \infty$ число « a » будет сгустком точек, соответствующих членам последовательности.

Определение: Число b называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 , если для любого ($\forall$) сколь угодно малого положительного числа ε найдется ($\exists$) положительное число

δ_ε (дельта), что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполнится неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Пишут $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$.

Теоремы о пределах функций: если существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$, то

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x);$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x);$$

$$4) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)} \text{ при } \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \neq 0.$$

При вычислении пределов используются два замечательных предела:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ (первый замечательный предел);}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e \text{ (второй замечательный предел).}$$

Определение: Функция $f(x)$ называется бесконечно малой в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Определение: Функция $f(x)$ называется бесконечно большой в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty (\pm \infty)$.

Теорема: Если $f(x)$ – бесконечно большая функция, то $\frac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая функция. Если $f(x)$ – бесконечно малая и $\varphi(x)$ – бесконечно малая функция в точке x_0 и $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1$, то $f(x)$ и $\varphi(x)$ эквивалентны. Пишут $f(x) \sim \varphi(x)$.

ПРИМЕРЫ. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталья:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x + 1}{\sqrt{2x^4 + 3}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right). \text{ Разделим числитель и знаменатель на высшую степень } x, \text{ т. е.}$$

$$\text{на } x^2, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{2 + \frac{3}{x^4}}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow +1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \left(\frac{0}{0}\right). \text{ Выделим в знаменателе дроби критический множитель } (\sqrt{x} - 1):$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2};$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 12x}{3x^2} &= |1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 6x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\sin 6x}{x}\right)^2 = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 6x \cdot 6}{6x}\right)^2 = \\ &= \frac{36 \cdot 2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 6x}{6x}\right)^2 = \left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} = 1 \right| = 24; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x-2} \right)^{3x} &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x-2} + \frac{1}{x-2} \right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-2} \right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left[1 + \frac{1}{x-2} \right]^{\frac{x-2}{1}} \right)^{\frac{1}{x-2} \cdot 3x} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x-2}} = e^3. \end{aligned}$$

Определение: Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если существует предел функции в точке x_0 , равный значению функции в точке x_0 , т. е. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Иными словами, функция непрерывна в точке x_0 , если выполняются равенства:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \quad (*)$$

Односторонние пределы функции в точке x_0 равны значению функции в точке x_0 .

Определение: Точка x_0 называется точкой разрыва первого рода, если существуют конечные, но неравные односторонние пределы функции в точке x_0 . Разность между правым и левым пределами называется скачком.

Определение: Точка x_0 называется точкой разрыва второго рода, если хотя бы один из односторонних пределов равен ∞ или не существует.

Определение: Точка x_0 называется точкой разрыва устранимого, если существует предел функции в этой точке, не равный значению функции в точке x_0 .

ПРИМЕР. Исследовать функцию на непрерывность и построить график:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{при } 0 < x \leq 2 \\ -x & \text{при } x > 2 \end{cases}.$$

Решение: Функция $f(x)$ является непрерывной на каждом из промежутков, поэтому подозрительными на разрыв являются точки $x = 0$ и $x = 2$. Исследуем каждую точку.

1) $x = 0$. Найдем левосторонний и правосторонний пределы функции $f(x)$ при $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0 - 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0 - 0} \cos x = \cos 0 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0 + 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0 + 0} (x^2 + 1) = 1, \end{aligned}$$

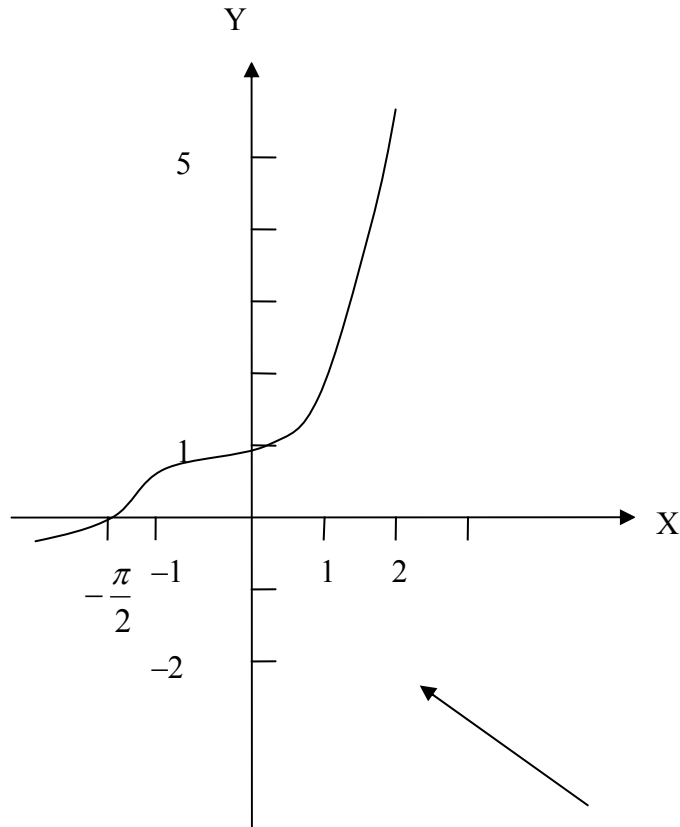
значение функции в точке $x = 0$ равно: $f(0) = \cos 0 = 1$. Следовательно, в точке $x = 0$ функция является непрерывной, так как $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

2) $x = 2$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2 - 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2 - 0} (x^2 + 1) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2 + 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2 + 0} -x = -2. \end{aligned}$$

Так как односторонние пределы конечны, но не равны, то точка $x = 2$ является точкой разрыва первого рода.

Скачок равен $-2 - 5 = -7$.



Определение: Пусть функция $y = f(x)$ задана на некотором множестве X . Зафиксируем значение аргумента $x_0 \in X$ и придадим ему приращение Δx , не выводящее значение аргумента за пределы множества X , т. е. $x_0 + \Delta x \in X$. Тогда соответствующее приращение Δy получит и сама функция, которое равно разности нового и старого значений функции: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Если существует конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента при $\Delta x \rightarrow 0 (x \rightarrow x_0)$, то он называется производной функции в точке x_0 . Пишут $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$, или $y'(x_0)$, $\frac{dy}{dx}(x_0)$. (6)

Если y' существует во всех точках множества X , то y' является функцией от x .

Таблица производных основных элементарных функций

Если $U = U(x)$ является дифференцируемой, то выполняются равенства:

1. $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$, где $\alpha = \text{const}$
2. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, где $a = \text{const}$
3. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
4. $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$
5. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

$$8. (tgu)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$9. (ctgu)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$$

$$10. (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$11. (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$12. (\arctg u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$13. (\text{arcctg} u)' = \frac{-u'}{1+u^2}$$

$$14. (chu)' = shu \cdot u'$$

$$15. (shu)' = chu \cdot u'$$

$$16. (thu)' = \frac{u'}{ch^2 u}$$

$$17. (cthu)' = -\frac{u'}{sh^2 u}.$$

Основные правила дифференцирования:

$$1. (c)' = 0$$

$$2. (x)' = 1$$

$$3. (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$4. (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$5. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$6. (cu)' = c \cdot u'$$

7. Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, т. е. $y = f(\varphi(x))$, то $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, где u и φ – дифференцируемы.

8. Если для функции $y = f(x)$ существует обратная дифференцируемая функция $x = g(y)$ и $g'(y) \neq 0$, то $f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$.

ЗАДАЧА. Найти производную функции

$$1) y = tg(\cos 3x);$$

$$2) y = e^{\cos x} \cdot (3^x - 2);$$

$$3) y = \arctg \frac{x}{2};$$

$$4) y = \frac{\arcsin x}{e^x}.$$

Решение:

$$1) y = tg(\cos 3x)$$

$y' = [tgu]'$, где $u = \cos 3x$, поэтому по формуле (8) (см. таблицу производных)

$$y' = \frac{1}{\cos^2 \cos 3x} \cdot (\cos 3x)' = \frac{-3 \sin 3x}{\cos^2 \cos 3x}.$$

$$2) y = e^{\cos x} \cdot (3^x - 2)$$

$$y' = [e^{\cos x} \cdot (3^x - 2)]' = \left| (u \cdot v)' = u'v + uv' \right| = (e^{\cos x})' \cdot (3^x - 2) + e^{\cos x} \cdot (3^x - 2)' =$$

$$= \left| \begin{aligned} (e^u)' &= e^u \cdot u' \\ (a^u)' &= a^u \cdot \ln a \cdot u' \end{aligned} \right| = -\sin x \cdot e^{\cos x} \cdot (3^x - 2) + e^{\cos x} \cdot 3^x \cdot \ln 3.$$

$$3) y = \arctg \frac{x}{2}$$

$$y' = \left(\arctg \frac{x}{2} \right)' = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2} \right)^2} \cdot \left(\frac{x}{2} \right)' = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{x^2}{4} \right)} = \frac{2}{4 + x^2}.$$

$$4) y = \frac{\arcsin x}{e^x}$$

$$y' = \left(\frac{\arcsin x}{e^x} \right)' = \left| \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \right| = \frac{(\arcsin x)' e^x - \arcsin x (e^x)'}{e^{2x}} =$$

$$= \frac{\frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} - e^x \arcsin x}{e^{2x}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x}{e^x}.$$

Определение: Производной второго порядка функции $y = f(x)$ называется производная от первой производной, т. е. $(y')'$. Обозначают $y'', f''(x), \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d(y')}{dx}$.

Определение: Производной n -го порядка функции $y = f(x)$ называют производную от производной $(n-1)$ -го порядка данной функции. Обозначают $y^{(n)}, \frac{d(y^{(n-1)})}{dx}$.

Дифференциал функции в точке

Определение: Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется главная линейная часть приращения этой функции, зависящая линейно от приращения Δx .

Дифференциал функции равен $dy = f'(x_0) \Delta x$. Дифференциал функции отличается от приращения функции на бесконечно малую более высокого порядка по сравнению с величиной dx , поэтому это обстоятельство используют для приближенных вычислений $\Delta y \approx dy$, откуда $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема Ролля: Если функция $y = f(x)$

- 1) непрерывна на отрезке $[a; b]$,
- 2) дифференцируема внутри этого отрезка,
- 3) имеет равные значения на концах отрезка, т. е. $f(a) = f(b)$, то существует хотя бы одна точка $x = c$ ($a < c < b$) такая, что $f'(c) = 0$.

Теорема Лагранжа: Если функция $y = f(x)$

1) непрерывна на отрезке $[a; b]$,

2) дифференцируема на (a, b) , то существует хотя бы одна точка $x = c$ ($a < c < b$), для которой выполняется равенство: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Теорема Коши: Если две функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$

1) непрерывны на отрезке $[a; b]$,

2) дифференцируемы на (a, b) , причем $g'(x) \neq 0$, то найдется такая точка $x = c$ ($a < c < b$), для которой выполняется равенство $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ или $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$, то при вычислении

предела отношения этих функций будем получать неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Для

раскрытия этих неопределенностей используют правило Лопиталя. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ удовлетворяют условиям теоремы Коши, в окрестности точки x_0 существует

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, и эти пределы равны $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Методы исследования функций и поведения их графиков.

Признаки возрастания функции (убывания функции)

- Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на некотором отрезке $[a; b]$, то производная на этом отрезке неотрицательна (неположительна), т. е. $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

- Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема и имеет положительную (отрицательную) производную на отрезке $[a; b]$, то она возрастает (убывает) на этом отрезке.

Определение: Точки, в которых производная первого порядка обращается в нуль или терпит разрыв, называются критическими.

Теорема (необходимый признак локального экстремума): Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, то $f'(x_0) = 0$ либо $f'(x_0)$ не существует.

Теорема (первый достаточный признак локального экстремума): Пусть $y = f(x)$ является непрерывной на $(a; b)$, причем x_0 – критическая точка, функция является дифференцируемой во всех точках $(a; b)$ (кроме, может быть, самой x_0), тогда: если $f'(x) > 0$ для всех $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ для всех $x > x_0$, то в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет максимум. Если $f'(x) < 0$ для всех $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ для всех $x > x_0$, то в точке x_0 функция имеет минимум.

Теорема (второй достаточный признак экстремума): Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема и x_0 – критическая точка, тогда если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума; если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума функции.

Теорема (достаточное условие выпуклости графика функции): Если во всех точках интервала $(a; b)$ производная второго порядка функции $y = f(x)$ отрицательна (положительна), т. е. $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$), то кривая выпукла вверх (вниз) на этом интервале.

Теорема (достаточный признак точки перегиба): Если в точке x_0 $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует и при переходе через эту точку производная $f''(x)$ меняет знак, то x_0 является точкой перегиба.

Определение: Прямая называется асимптотой данной кривой $y = f(x)$, если расстояние от точки М кривой до прямой, при удалении точки М в бесконечность, стремится к нулю.

Если $\lim_{x \rightarrow x_1 \pm} f(x) \rightarrow \pm\infty$, то $x = x_1$ – вертикальная асимптота.

Если существуют пределы: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ и $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$, то прямая $y = kx + b$ – наклонная асимптота графика функции. Если $k = 0$, $y = b$ – горизонтальная асимптота.

Примерная схема исследования функций

Для исследования функции и построения графика надо:

1. Найти область определения функции.
2. Найти точки пересечения графика с осями координат, вертикальные асимптоты.
3. Исследовать функцию на четность, периодичность.
4. Исследовать на монотонность и найти экстремумы.
5. Найти интервалы выпуклости, точки перегиба.
6. Найти асимптоты графика.
7. Построить график функции.

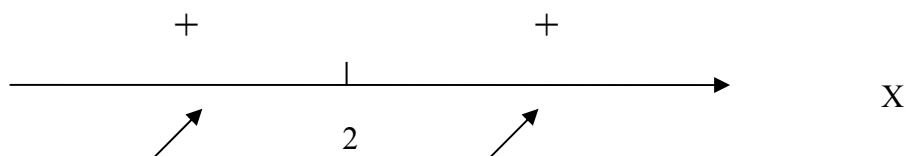
ЗАДАЧА. Исследовать функцию $y = 3^{\frac{1}{2-x}}$ и построить график.

Решение: Областью определения функции является множество всех действительных чисел, кроме $x = 2$; прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой графика функции, так как

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} 3^{\frac{1}{2-x}} = 3^{+\infty} = \infty.$$

1) Функция принимает все положительные значения, кроме $y = 1$, так как $\frac{1}{2-x} \neq 0 \Rightarrow y \neq 1$, при $x = 0$ $y = \sqrt{3}$.

$$2) \quad y' = \left(3^{\frac{1}{2-x}} \right)' = 3^{\frac{1}{2-x}} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{(2-x)^2}; y' \neq 0, \text{ но } x = 2 - \text{точка разрыва.}$$



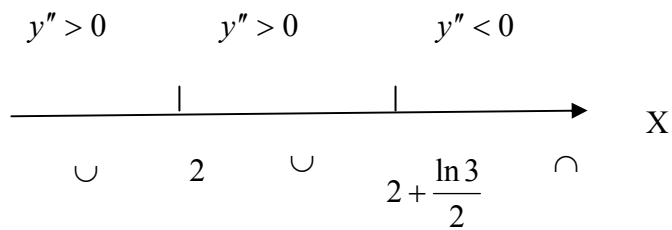
3) Функция экстремумов не имеет и возрастает на каждом из промежутков.

4) Промежутки выпуклости функции:

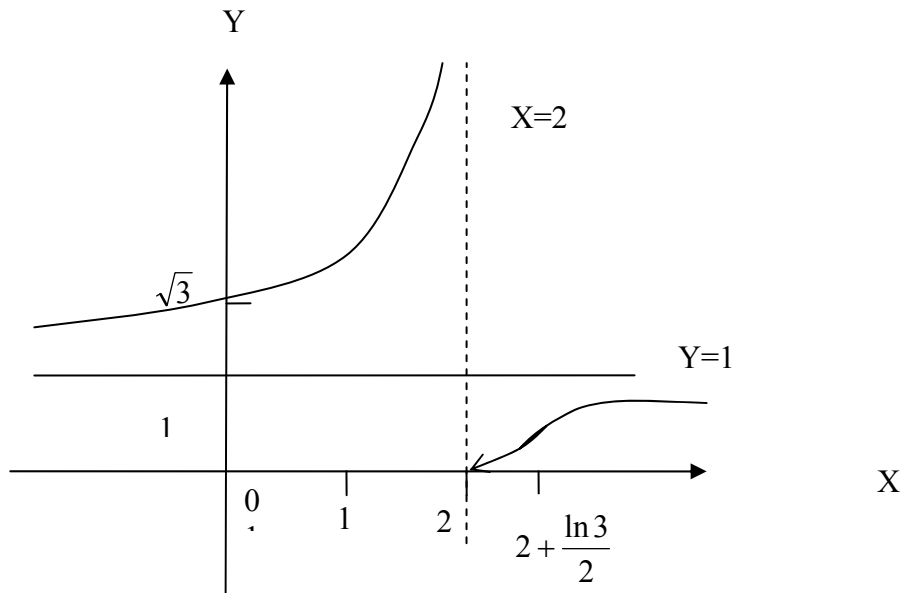
$$y'' = \ln^2 3 \cdot \frac{1}{(2-x)^4} \cdot 3^{\frac{1}{2-x}} + \ln 3 \cdot 3^{\frac{1}{2-x}} \cdot \frac{2}{(2-x)^3} = \ln 3 \cdot 3^{\frac{1}{2-x}} \cdot \frac{2}{(2-x)^2} \cdot \left[\frac{\ln 3}{(2-x)^2} + \frac{2}{2-x} \right];$$

$$y'' = 0 \text{ при } \frac{\ln 3}{(2-x)^2} + \frac{2}{2-x} = 0 \text{ и } x_0 = 2 + \frac{\ln 3}{2} - \text{точка перегиба.}$$

5) Так как $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 3^{\frac{1}{2-x}} = 1$, то $y = 1$ – горизонтальная асимптота графика функции, $x = 2 + \frac{\ln 3}{2}$ – точка перегиба.



На основании проведенного исследования можно построить график.



Функция двух переменных

Если каждой упорядоченной паре чисел (x, y) из некоторой области $D(x, y)$ соответствует единственное число Z , то Z называют функцией двух переменных x и y , x и y – независимые переменные или аргументы, D – область определения функции Z , пишут $Z = f(x, y)$.

Определение: Число B называют пределом функции $Z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что при всех x и y , удовлетворяющих условиям $|x - x_0| < \delta$ и $|y - y_0| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x, y) - B| < \varepsilon$. Пишут $B = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \lim_{M \rightarrow M_0} f(x, y)$.

Определение: Частной производной по переменной x функции $Z = f(x, y)$ называют предел отношения: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x Z}{\Delta x} = \frac{\partial Z}{\partial x}$, а по переменной y – $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y Z}{\Delta y} = \frac{\partial Z}{\partial y}$; где

$$\Delta_x Z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

$$\Delta_y Z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0). \text{ Обозначают } Z'_x, Z'_y, f'_x(x, y), f'_y(x, y).$$

ЗАДАЧА. Для функции $z = \ln(3x^2 + y^4)$ найти частные производные функции.

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = [\ln(3x^2 + y^4)]'_x = \frac{1}{3x^2 + y^4} \cdot (3x^2 + y^4)'_x = \frac{6x}{3x^2 + y^4};$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = [\ln(3x^2 + y^4)]'_y = \frac{1}{3x^2 + y^4} \cdot (3x^2 + y^4)'_y = \frac{4y^3}{3x^2 + y^4}.$$

Частные производные второго порядка функции $Z = f(x, y)$ имеют вид:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right) = f''_{xx};$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right) = f''_{xy};$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y \cdot \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right) = f''_{yx};$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right) = f''_{yy}.$$

ЗАДАЧА. Найти частные производные второго порядка функции $Z = 4x^3y - 2xy^2$.

Решение: $\frac{\partial Z}{\partial x} = 12x^2y - 2y^2$.

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = 4x^3 - 4xy$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = 24xy$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \cdot \partial y} = 12x^2 - 4y$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y \cdot \partial x} = 12x^2 - 4y$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = -4x,$$

очевидно, что $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2 Z}{\partial y \cdot \partial x}$.

Теорема (необходимое условие экстремума): Если точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой экстремума функции $Z = f(x, y)$, то $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ или хотя бы одна из них не существует. Точки, для которых это условие выполняется, называются стационарными.

Теорема (достаточное условие экстремума): Пусть $Z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка в области, содержащей стационарную точку $M_0(x_0, y_0)$. Тогда:

1) если $\Delta > 0$, то M_0 – является точкой экстремума, причем если $A < 0$ ($C < 0$), то M_0 – точка максимума, если $A > 0$ ($C > 0$), то M_0 – точка минимума;

2) если $\Delta < 0$, то в точке M_0 нет экстремума;

3) если $\Delta = 0$, то экстремум может быть, а может и не быть. Необходимо дополнительно исследовать функцию.

Где $\Delta = AC - B^2$, $A = f''_{xx}$, $B = f''_{xy}$, $C = f''_{yy}$ в точке (x_0, y_0) .

ЗАДАЧА. Исследовать функцию $Z = x^3 + y^3 - 3xy$ на экстремум.

1) Найдем стационарные точки $\frac{\partial Z}{\partial x} = 3x^2 - 3y$, $\frac{\partial Z}{\partial y} = 3y^2 - 3x$. Пользуясь необходимыми условиями экстремума, найдем стационарные точки:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases},$$

откуда $M_1(0,0), M_2(1,1)$.

2) Исследуем точки M_1 и M_2 , для этого составим Δ

$A = f''_{xx} = 6x$, $B = f''_{xy} = -3$, $C = f''_{yy} = 6y$, $\Delta = AC - B^2 = 36xy - 9$. $\Delta(M_1) = -9$, так как $\Delta < 0$, то в точке M_1 нет экстремума. $\Delta(M_2) = 36 \cdot 1 \cdot 1 - 9 = 27$, так как $\Delta > 0$ и $A > 0$, то точка M_2 – точка минимума. $Z_{\min}(M_2) = Z_{\min}(1,1) = -1$, ($A = 6 > 0$).

1.3. Вопросы для контроля

1. Определители второго и третьего порядка.
2. Правила вычисления определителя третьего порядка: разложение по строке (по столбцу), Саррюса, треугольника.
3. Решение систем трех линейных уравнений методом Крамера.
4. Матрицы и действия над ними. Ранг матрицы.
5. Обратная матрица. Решение систем трех линейных уравнений с тремя неизвестными матричным способом.
6. Теорема Кронекера – Капелли. Решение произвольной системы линейных уравнений.
7. Скалярные и векторные величины. Задание вектора в координатной форме. Модуль вектора.
8. Скалярное произведение векторов. Его свойства.
9. Угол между векторами. Условия ортогональности и коллинеарности двух векторов.
10. Векторное произведение векторов и его свойства.
11. Смешанное произведение векторов.
12. Прямая на плоскости. Ее различные уравнения.
13. Взаимное расположение двух прямых на плоскости.
14. Кривые второго порядка: эллипс – вывод канонического уравнения.
15. Гипербола. Вывод канонического уравнения.
16. Парабола. Вывод канонического уравнения.
17. Плоскость в пространстве.
18. Взаимное расположение двух плоскостей.
19. Прямая в пространстве, способы задания прямой.
20. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
21. Взаимное расположение прямой и плоскости.
22. Поверхности второго порядка: сфера, цилиндрические поверхности, конические уравнения поверхностей второго порядка.
23. Функция. Определение, область определения, множество значений.
24. Способы задания. Основные элементарные функции, их графики.
25. Основные классы функций.
26. Числовая последовательность. Предел последовательности.
27. Предел функции в точке и на промежутке.
28. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Эквивалентные бесконечно малые.
29. Раскрытие неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right), (1^\infty)$.
30. Первый и второй замечательные пределы.
31. Непрерывность функции в точке и на промежутке.
32. Классификация точек разрыва.
33. Связь предела функции в этой точке с непрерывностью функции.

34. Производная функции. Геометрический смысл.
35. Таблица производных. Правила нахождения производных функций.
36. Дифференциал. Правила дифференцирования.
37. Приложения производных и решение задач. Уравнения касательной и нормали к кривой в точке.
38. Основные теоремы дифференциального исчисления функции одной переменной: Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши.
39. Правило Лопиталя.
40. Исследование функции с помощью производной.
41. Функции нескольких переменных. Область определения, график.
42. Предел функции двух переменных. Непрерывность функции двух переменных.
43. Частные приращения и производные.
44. Экстремумы функции двух переменных.

РАЗДЕЛ 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

2.1. Методические указания и решение типового варианта контрольной работы № 3

ЗАДАЧА. Найти область сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{x^4}{n^2 + 1}}.$$

Решение: Воспользуемся признаком Даламбера для нахождения области сходимости степенного ряда.

$$U_n = \sqrt{\frac{x^n}{n^2 + 1}}; \quad U_{n+1} = \sqrt{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2 + 1}};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt{x^{n+1}} \sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{(n+1)^2 + 1} \sqrt{x^n}} \right| = \sqrt{x} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^2 + 1}{(n+1)^2 + 1}} = \sqrt{x}.$$

Интервал сходимости будет определяться неравенством $\sqrt{x} < 1$, следовательно, $0 < x < 1$.

Исследуем граничные точки.

При $x = 0$ получим числовой ряд, члены которого равны нулю, поэтому он сходится и $x = 0$ входит в область сходимости.

При $x = 1$ получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2 + 1}}$. Исследуем его на сходимость по предельному признаку сравнения, а для сравнения выберем гармонический ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} : \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = 1.$$

Так как предел отношения общих членов отличен от нуля, то оба ряда одновременно сходятся или расходятся, но так как гармонический ряд является расходящимся, то и исходный

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2+1}}$ расходится, следовательно, $x = 1$ не входит в область сходимости степенного ряда.

Ответ: $[0; 1)$.

ЗАДАЧА. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Используем разложение функции e^{-x^2} в степенной ряд по степеням x . Это возможно, так как ряд сходится к функции на промежутке $(-\infty; +\infty)$, получим:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$$

Проинтегрируем обе части равенства на промежутке $\left[0; \frac{1}{4}\right]$:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots\right) dx;$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx = \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots\right) \Big|_0^{\frac{1}{4}};$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{1!3 \cdot 4^3} + \frac{1}{2!5 \cdot 4^5} - \frac{1}{3!7 \cdot 4^7} + \dots$$

Правая часть равенства представляет собой ряд лейбницевского типа.

Так как $\frac{1}{1!3 \cdot 4^3} \approx 0,0052$, что больше 0,001, а $\frac{1}{2!5 \cdot 4^5} = \frac{1}{10240} \approx 0,000098$, что меньше 0,001, то для вычисления с заданной точностью достаточно взять два слагаемых, итак,

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{192} = 0,245.$$

Ответ: 0,245.

Формула трапеций

$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right)$, где $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$); $h = \frac{b-a}{n}$ шаг деления отрезка $[a, b]$ на n равных отрезков точками $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$.

Остаточный член имеет вид $R = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi)$, $a < \xi < b$.

Формула трапеций дает точное значение, если $f(x)$ – линейная функция, так как $f''(x) = 0$.

ЗАДАЧА. Вычислить приближенно по формуле трапеций интеграл $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ при $n = 10$ и оценить погрешность вычислений.

Решение: Оценить остаточный член $y' = (e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2}$;

$$y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}.$$

На отрезке $[0,1]$ $\max|y''(x)| = 2$ при $x = 0$; $b - a = 1$, $h = 0,1$.

$$|R| \leq \frac{\max|y''(x)|}{12} |b-a| h^2 = \frac{2(0,1)^2}{12} \cdot 1 < 0,002, \text{ следующие вычисления надо производить с}$$

четырьмя знаками после запятой.

Составим таблицу значений функции $y = e^{-x^2}$.

i	x_i	x_i^2	y_i
0	0	0	1,0000
1	0,1	0,01	0,9900
2	0,2	0,04	0,9608
3	0,3	0,09	0,9139
4	0,4	0,16	0,8521
5	0,5	0,25	0,7788

i	x_i	x_i^2	y_i
6	0,6	0,36	1,6977
7	0,7	0,49	0,6126
8	0,8	0,64	0,5273
9	0,9	0,81	0,4449
10	1,0	1	0,3679

$$\frac{y_0 + y_{10}}{2} = \frac{1 + 0,3679}{2} = 0,6840.$$

$$\sum_{i=1}^9 y_i = 6,7781, \text{ следовательно, } \int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0,1 \cdot (0,6840 + 6,7781) = 0,7462.$$

После округления окончательно получаем $\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0,746$.

Формула Симпсона (формула парабол) (n-четное)

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1})), \text{ где } h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}.$$

Остаточный член имеет вид $R = -\frac{mh^5}{90} f^{(4)}(\xi)$, где $a < \xi < b$.

ЗАДАЧА. Вычислить интеграл $\int_0^1 e^{x^2} dx$ по формуле Симпсона при $n = 10$ и оценить остаточный член.

Решение: Оценим остаточный член.

$$y = e^{x^2}, y' = 2xe^{x^2}, y'' = 2e^{x^2} + 4x^2 \cdot e^{x^2}, y''' = 4xe^{x^2} + 8x \cdot e^{x^2} + 8x^3 e^{x^2} = 12xe^{x^2} + 8x^3 e^{x^2},$$

$$y^{(4)} = 12e^{x^2} + 24x^2 e^{x^2} + 24x^2 e^{x^2} + 16x^4 e^{x^2} = 4(4x^4 + 12x^2 + 3)e^{x^2}.$$

$y^{(4)}(x)$ имеет наибольшее значение на $[0,1]$ при $x = 1$, $m = 5$, $e \approx 2,718$

$$|R| \leq \frac{5 \cdot (0,1)^5}{90} \cdot 76 \cdot 2,718 \approx 0,000115.$$

Составим таблицу значений, запишем ординаты с четными и нечетными номерами в разные столбцы:

i	x_i	x_i^2	$y_i, i=0, 10$	y_{2m}	y_{2m-1}
0	0,0	0,00	1,000		1,0101
1	0,1	0,01			
2	0,2	0,04		1,0407	1,0942
3	0,3	0,09			

i	x_i	x_i^2	$y_i, i=0, 10$	y_{2m}	y_{2m-1}
4	0,4	0,16		1,1735	1,2840
5	0,5	0,25			
6	0,6	0,36		1,4333	1,6323
7	0,7	0,49			
8	0,8	0,64		1,8965	
9	0,9	0,81			2,2479
10	1,0	1,0	2,7188		

Суммы: $y_0 + y_{10} = 3,7188$,
 $\sum y_{2m} = 5,44$,
 $\sum y_{2m-1} = 7,2685$.

По формуле Симпсона получаем: $\int_0^1 e^{x^2} dx \approx \frac{1}{30} \cdot (3,7198 + 4 \cdot 7,2685 + 2 \cdot 5,3441) = 1,46272$;

округляем до четырех знаков, окончательно получим $\int_0^1 e^{x^2} dx \approx 1,4627$.

ЗАДАЧА. Решить систему дифференциальных уравнений с помощью составления характеристического уравнения

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + y \end{cases}$$

Решение: Фундаментальную систему решений будем отыскивать в виде $x = \alpha \cdot e^{kt}$; $y = \beta \cdot e^{kt}$, тогда $x' = \alpha \cdot k \cdot e^{kt}$, $y' = \beta \cdot k \cdot e^{kt}$. Подставим полученные значения в систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha \cdot k e^{kt} = \alpha e^{kt} - \beta e^{kt} \\ \beta k e^{kt} = -4\alpha e^{kt} + \beta e^{kt} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \cdot k = \alpha - \beta \\ \beta k = -4\alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-k)\alpha - \beta = 0 \\ -4\alpha + (1-k)\beta = 0 \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ -4 & 1-k \end{vmatrix} = 0$ или

$$(1-k)^2 - 4 = 0 \Rightarrow 1-k = \pm 2, \text{ откуда } 1-k = -2, k = 3 \text{ или } 1-k = 2, k = -1.$$

При $k = -1$ получим систему уравнений $\begin{cases} 2\alpha - \beta = 0 \\ -4\alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2\alpha = \beta$. Пусть $\alpha = 1$, тогда $\beta = 2$, откуда $x^{(1)} = e^{-t}$, $y^{(1)} = 2 \cdot e^{-t}$ – фундаментальная система решений.

При $k = 3$ получим систему уравнений: $\begin{cases} -2\alpha - \beta = 0 \\ -4\alpha - 2\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2\alpha = -\beta$. Пусть $\alpha = 1$, тогда $\beta = -2$, откуда $x^{(2)} = e^{3t}$, $y^{(2)} = -2 \cdot e^{3t}$.

Общее решение системы уравнений запишется в виде:

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}; \\ y &= 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t}. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА. Разложить в степенной ряд по степеням x решение дифференциального уравнения $y' = e^{\sin x} + x$, записать первые три, отличных от нуля, члена разложения.

Решение: $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$

Продифференцируем исходное уравнение не менее двух раз.

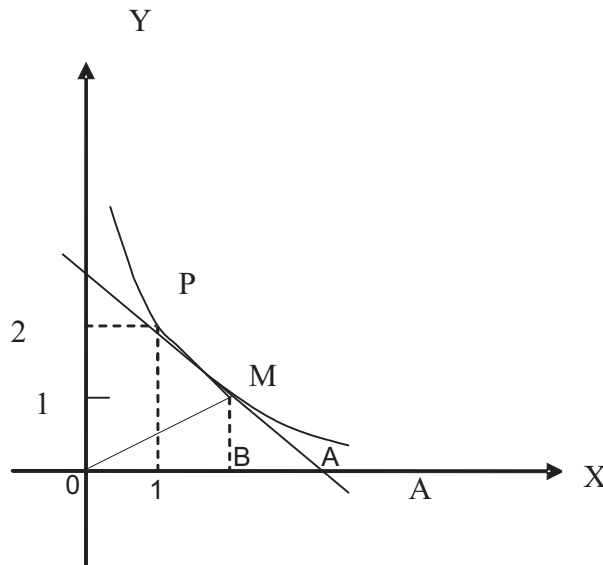
$$y' = e^{\sin x} + x,$$

$$y'' = e^{\sin x} \cos x + 1,$$

$$y''' = e^{\sin x} \cos^2 x + e^{\sin x} (-\sin x).$$

Имеем: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$, $y'''(0) = 1$, подставим полученные значения в степенной ряд: $y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots$, получим приближенное решение дифференциального уравнения $y = x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots$.

ЗАДАЧА. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $P(1, 2)$, для которой площадь треугольника, образованного радиус-вектором любой точки кривой, касательной в этой точке, и осью абсцисс, равна 2.



$M(x, y)$ – произвольная точка кривой. OM – радиус-вектор. MA – касательная к кривой. Известно, что $S_{\triangle OMA} = 2$. Найти уравнение кривой.

Решение:

$|OA| = |OB| + |BA|$, так как $|OB| = x$, то $|OA| = x + |BA|$. Из $\triangle BMA$ имеем: $\frac{BA}{y} = \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha \Rightarrow |BA| = -y \operatorname{ctg} \alpha$ или $|BA| = -\frac{y}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{y dx}{dy}$, тогда $|OA| = x - \frac{y dx}{dy}$.

Площадь треугольника OMA равна $\frac{1}{2} y(x - \frac{y dx}{dy})$, и, так как по условию задачи $S_{\triangle OMA} = 2$, получим уравнение $\frac{1}{2} y(x - \frac{y dx}{dy}) = 2$. Решим это уравнение, выполнив некоторые преобразования

$yx - y^2 \frac{dx}{dy} = 4$, $y^2 \frac{dx}{dy} = xy - 4$, $\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = -\frac{4}{y^2}$, последнее уравнение – линейное, первого порядка относительно $x = x(y)$, поэтому используем подстановку $x = uv$;

$$u'v + uv' - \frac{uv}{y} = -\frac{u}{y^2}; \quad u'v + u(v' - \frac{v}{y}) = -\frac{u}{y^2}; \quad \frac{dv}{dy} - \frac{v}{y} = 0; \quad \frac{dv}{dy} = \frac{v}{y}; \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dy}{y};$$

$$\ln|v| = \ln|y|, v = y, \quad \frac{du}{dy} y = -\frac{4}{y^2}; \quad y du = -\frac{4dy}{y^2}; \quad du = -\frac{4dy}{y^3}; \quad u = -\frac{2}{y^2} + C.$$

$$\text{Итак, } x = (\frac{2}{y^2} + C)y = Cy + \frac{2}{y}.$$

По условию задачи кривая проходит через точку Р (1, 2), поэтому $C = 0$, так как $1 = 2C + 1$; следовательно, искомая кривая имеет вид $x = \frac{2}{y}$ или $xy = 2$ – гипербола.

2.2. Методические указания и решение типового варианта контрольной работы № 4

Элементы теории поля

Основными понятиями являются: градиент, поток, потенциал, дивергенция, ротор, циркуляция.

Определение: Полем называется область некоторого пространства, в каждой точке которой определено значение некоторой величины.

Определение: Если каждой точке М области V соответствует определенное число $\varphi = \varphi(M)$, то говорят, что в области V задано скалярное поле.

Определение: Если каждой точке М из области V соответствует некоторый вектор $\vec{a} = \vec{a}(M)$, то говорят, что задано векторное поле.

Если функция $\varphi(M)$ ($\vec{a}(M)$) не зависит от времени, то скалярное (векторное) поле называется стационарным, а поле, которое меняется с течением времени, называется нестационарным.

В трехмерном пространстве каждой точке М области можно поставить в соответствие либо ее координаты (x, y, z), либо радиус-вектор $\vec{r}$. Следовательно, скалярное поле φ можно задать как функцию трех переменных $\varphi(x, y, z)$ или как функцию одной переменной $\varphi(\vec{r})$.

Определение: Множество точек поля, в которых скаляр φ имеет одно и то же значение, называется поверхностью уровня поля $\varphi(x, y, z) = C$, где $C = \text{const}$.

Так как функция поля однозначна, то через каждую точку поля М (x₁, y₁, z₁) проходит единственная поверхность уровня $\varphi(x, y, z) = \varphi(x_1, y_1, z_1)$.

Пусть М – произвольная точка пространства, где задано поле $\varphi = \varphi(x, y, z)$. Производной функции φ в точке М в направлении любого вектора $\vec{r}$ называется предел отношения приращения $\Delta\varphi = \varphi(M_1) - \varphi(M)$ к Δr , при $\Delta r \rightarrow 0$ ($M_1 \rightarrow M$), т. е.

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta r} = \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{\varphi(M_1) - \varphi(M)}{|MM_1|}, \text{ обозначают } \frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$

Производная характеризует скорость изменения функции (поля) в заданной точке М в направлении вектора $\vec{r}$.

Если $\frac{\partial\varphi}{\partial r} > 0$, то функция φ возрастает в направлении вектора $\vec{r}$, если $\frac{\partial\varphi}{\partial r} < 0$, то функция φ убывает в направлении вектора $\vec{r}$.

$$\left| \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right| - \text{есть мгновенная скорость функции } \varphi \text{ в направлении вектора } \vec{r}.$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos \gamma, \text{ где } \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma - \text{ направляющие косинусы}$$

вектора $\vec{r}$.

Определение: Градиентом функции $\varphi(x, y, z)$ обозначают $\text{grad} \varphi$, называют вектор, координатами которого являются значения частных производных функции $\varphi(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$:

$$\text{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}, \text{ где } \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} - \text{ единичные векторы, или } \text{grad} \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right).$$

Направление градиента совпадает с направлением наибыстрейшего роста функции (поля), следовательно, наибольшая скорость изменения поля φ в точке M равна

$$|\text{grad} \varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2}.$$

Перечислим свойства градиента.

Теорема: Градиент направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через данную точку.

- 1) $\text{grad}(u + v) = \text{grad} u + \text{grad} v$,
- 2) $\text{grad}(cu) = c \text{grad} u$, $c = \text{const}$,
- 3) $\text{grad}(uv) = u \text{grad} v + v \text{grad} u$,
- 4) $\text{grad} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \text{grad} u - u \text{grad} v}{v^2}$,
- 5) $\text{grad} F(u) = \frac{\partial F}{\partial u} \text{grad} u$.

Векторное поле

Определение: Векторной линией поля $\vec{a}$ называется линия, касательная к которой в каждой ее точке M имеет направление соответствующего ей вектора поля. Совокупность всех векторных линий поля, проходящих через некоторую замкнутую кривую, называется векторной трубкой.

Векторная линия $\vec{a} = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$ описывается системой

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} + \frac{dy}{Q(x, y, z)} + \frac{dz}{R(x, y, z)} = 0.$$

Пусть векторное поле образовано вектором $\vec{a} = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$. К понятию векторного поля приводит физическая задача, изучающая поля скоростей текущей жидкости. Некоторая поверхность z находится в этом потоке и пропускает жидкость. Найдем количество жидкости, протекающей через поверхность z . Разобьем эту поверхность на n частичных областей произвольным образом $S_1, S_2, \dots, S_n$ и выберем в каждой части области некоторую точку M_i , в которой построим единичный вектор нормали $\vec{n}_i$. За единицу времени через S_i протекает количество жидкости, приближенно равное $Q_i = H_i \Delta S_i$, где H_i – высота i -того цилиндра, а ΔS_i – площадь i -той площади. Но H_i является проекцией вектора $\vec{a}(M_i)$ на нормаль $\vec{n}_i$: $H_i = n \vec{p}_{n_i} \vec{a}(M_i) = \vec{a}(M_i) \vec{n}_i$, следовательно, общий объем жидкости, протекающий через поверхность S за единицу времени, равен приближенно: $Q \cong \sum_{i=1}^n \vec{a}(M_i) \vec{n}_i \Delta S_i$. Точное значение этой величины получим, перейдя к пределу при неограниченном увеличении числа частичных площадок. Если λ_i – диаметр площади, то

$$Q \cong \lim_{\substack{\max \lambda_i \rightarrow 0 \\ (n_i \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^n \vec{a}(M_i) n_i \Delta S_i = \iint_S \vec{a}(M) \vec{n} dS.$$

Определение: Предел суммы элементарных потоков через частичные области, на которые разбивается область S , когда число частичных областей неограниченно растет при условии, что наибольший из диаметров площади неограниченно убывает, называется потоком векторного поля $\vec{a}$ через поверхность S .

Определение: Потоком вектора $\vec{a}$ через поверхность S называется интеграл по поверхности от скалярного произведения вектора поля на единичный вектор нормали к поверхности

$$Q = \iint_S \vec{a} \vec{n} dS \text{ или } Q = \iint_S P dydz + Q dx dz + R dx dy.$$

Замечание. Поток вектора $\vec{a}$ есть величина скалярная, равная объему жидкости, протекающей через поверхность S за единицу времени.

Если поверхность замкнута и ограничивает некоторый объем, то $Q = \oiint_S \vec{a} \vec{n} dS$, в этом случае за направление вектора $\vec{n}$ берут направление внешней нормали и говорят о потоке изнутри. Так как $\vec{a} \vec{n} = |\vec{n}| n p_{\vec{n}} \vec{a} = a_n$, то $Q = \iint_S a_n dS$.

Дивергенция векторного поля

Определение: Дивергенцией векторного поля $\vec{a}(M) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$ в точке M называется скаляр вектора вида $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ и обозначают $\operatorname{div} \vec{a}$

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Свойства дивергенции:

- 1) $\operatorname{div} \vec{a} = 0$, если $\vec{a}$ – постоянный вектор,
- 2) $\operatorname{div} c\vec{a} = c \operatorname{div} \vec{a}$, где $c = \text{const}$,
- 3) $\operatorname{div} (\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{div} \vec{b}$,
- 4) $\operatorname{div} (\varphi \vec{a}) = \varphi \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \operatorname{div} \varphi$, если φ – скалярная функция.

Замечание. Формула Остроградского – Гаусса, с использованием понятий потока и дивергенции векторного поля, запишется так:

$$Q = \iint_S P dydz + Q dx dz + R dx dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV.$$

Формула Остроградского – Гаусса показывает, что поток векторного поля через замкнутую поверхность S (в направлении векторной нормали) равен тройному интегралу от дивергенции этого поля по объему V , ограниченного данной поверхностью.

$\oiint_S a_n dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV$, по теореме о среднем для тройного интеграла имеем:

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV = V \operatorname{div} \vec{a}(M_0) \Rightarrow V \operatorname{div} \vec{a}(M_0) = \frac{1}{V} \oiint_S a_n dS, \quad \text{при } V \rightarrow 0, M_0 \rightarrow M \quad \text{получим}$$

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oiint_S a_n dS.$$

Определение: Дивергенцией векторного поля в точке M называется предел отношения потока поля через поверхность S , окружающую точку M , к объему тела, ограниченного этой поверхностью, при условии, что поверхность стягивается в точку M .

Циркуляция и вихрь векторного поля

Рассмотрим в поле $\vec{a}$ линию L и выберем на ней направление. Для произвольной точки M кривой запишем радиус-вектор $r = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, вектор $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ будет направлен по касательной к кривой в направлении ее обхода $|d\vec{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$.

Определение: Циркуляцией вектора $\vec{a}$ вдоль кривой L называется криволинейный интеграл по замкнутому контуру L от скалярного произведения вектора $\vec{a}$ на $d\vec{r}$ (касательный к L)

$$C = \oint_L \vec{a} d\vec{r},$$

или, учитывая, что $\vec{a} d\vec{r} = |d\vec{r}| \text{np}_{d\vec{r}} \vec{a} = a_\tau dl = Pdx + Qdy + Rdz$, получим $C = \int_L Pdx + Qdy + Rdz$,

где a_τ – проекция вектора $\vec{a}$ на касательную τ , проведенную в направлении обхода.

Физический смысл циркуляции состоит в том, что если кривая L расположена в силовом поле, то циркуляция – это работа силы $\vec{a}(M)$ поля при перемещении материальной точки вдоль L.

Замечание. Циркуляция отлична от нуля вдоль замкнутой линии, так как в каждой точке векторной линии $\vec{a} d\vec{r}$ сохраняет значение: положительное, если направление $\vec{a}$ совпадает с направлением обхода линии; отрицательное – в противоположном случае.

Определение: Вихревым вектором или ротором векторного поля $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ называется вектор, определяемый равенством $\text{rot} \vec{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$.

$$\text{Или } \text{rot} \vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Свойства ротора:

- 1) $\text{rot} \vec{a} = 0$, если $\vec{a}$ – постоянный вектор,
- 2) $\text{rot} c\vec{a} = c \text{rot} \vec{a}$, где $c = \text{const}$,
- 3) $\text{rot}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{rot} \vec{a} + \text{rot} \vec{b}$,
- 4) $\text{rot}(\varphi \vec{a}) = \varphi \text{rot} \vec{a} + \text{grad} \varphi \times \vec{a}$, где φ – скалярная функция.

Формула Стокса примет вид:

$$\oint_L a_\tau dl = \iint_S \text{rot}_n \vec{a} dS \text{ – это векторная форма формулы, которая показывает, что циркуляция}$$

вектора $\vec{a}$ вдоль замкнутого контура L равна потоку ротора этого вектора $\vec{a}$ через поверхность S, лежащую в поле вектора $\vec{a}$ и ограниченную контуром L.

$$\text{Так как } \iint_L \text{rot}_n \vec{a} dS = \text{rot}_n \vec{a}(M_0) S \text{ по теореме о среднем, то } \text{rot}_n \vec{a}(M_0) = \frac{1}{S} \oint_L a_\tau dl.$$

$$\text{Если контур L стягивается в точку M, то } M_0 \rightarrow M, \text{ а } S \rightarrow 0 \text{ и } \text{rot}_n \vec{a}(M_0) = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_L a_\tau dl.$$

Замечание. Направление ротора – это направление, вокруг которого циркуляция имеет наибольшее значение (плотность) по сравнению с циркуляцией вокруг любого направления, не совпадающего с нормалью к площадке S. Поэтому связь между ротором и циркуляцией аналогична связи между градиентом и производной по направлению.

Оператор Гамильтона

Определение: Векторными операциями первого порядка называется взятие градиента, дивергенции и ротора.

Оператор Гамильтона (символический вектор) имеет вид:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (\nabla - \text{набла}).$$

С помощью оператора Гамильтона основные дифференциальные операции можно записать так:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \varphi &= \nabla \varphi, \\ \operatorname{div} \vec{a} &= \nabla \varphi, \\ \operatorname{rot} \vec{a} &= \nabla \vec{a}, \\ \nabla \varphi &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \varphi = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} = \operatorname{grad} \varphi, \\ \nabla \vec{a} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{a}. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА. Вычислить координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями: $y = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + z^2}$ и $y = 2$.

Решение: Данное тело симметрично относительно оси ОУ, поэтому $x_c = z_c = 0$ (т. е. центр симметрии находится на оси ОУ). Ордината центра масс найдется по формуле:

$$y_c = \frac{\iiint_V y dx dy dz}{\iiint_V dx dy dz}.$$

Перейдем к цилиндрическим координатам: $x = \rho \cos \varphi$, $z = \rho \sin \varphi$, $y = y$, тогда

1) $\iiint_V y dx dy dz = \iiint_V y \rho d\varphi \rho d\rho dy$. Для нахождения пределов интегрирования найдем проекцию области на плоскость ОХЗ, получим $x^2 + z^2 \leq 16$, следовательно, $0 \leq \rho \leq 4$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $\frac{\rho}{2} \leq y \leq 2$. Получим кратный интеграл

$$\iiint_V y \rho d\varphi \rho d\rho dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \rho \left(4 - \frac{1}{4} \rho^2 \right) d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(2\rho^2 - \frac{\rho^4}{16} \right) \Big|_0^4 d\varphi = \frac{1}{2} 164 \int_0^{2\pi} = 16\pi;$$

$$\begin{aligned} 2) \iiint_V dx dy dz &= \iiint_V \rho d\varphi \rho d\rho dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \rho d\rho \int_{\frac{\rho}{2}}^2 dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \rho \left(2 - \frac{\rho}{2} \right) d\rho = \int_0^{2\pi} \left(\rho^2 - \frac{\rho^3}{6} \right) \Big|_0^4 d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(16 - \frac{64}{6} \right) d\varphi = \frac{16}{3} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{32\pi}{3}; \end{aligned}$$

$$3) y_c = \frac{16\pi 3}{32\pi} = \frac{3}{2}.$$

Итак, центр масс С $(0; \frac{3}{2}; 0)$.

ЗАДАЧА. Вычислить производную функции $Z = \operatorname{arctg}(xy)$ в точке $M_0(1,1)$ вдоль кривой $y = x^2$, в положительном направлении оси ОХ.

Решение: Если функция $u = f(x, y, z)$ определена в окрестности точки $M(x_0, y_0, z_0)$, то производная функции по направлению вектора $\vec{S}$ определяется по формуле:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{S}} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \cos \gamma,$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – направляющие косинусы вектора $\vec{S}$.

Производной вдоль кривой L называют производную по направлению ориентированной касательной к кривой, вычисленную в точке касания.

За направление параболы $y = x^2$ в точке $M_0(1, 1)$ возьмем направление касательной к параболе в этой точке, задаваемой углом α , который касательная образует с осью OX . Тогда

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}; \text{ так как } y' = 2x \text{ и } y'(M_0) = 2, \text{ то}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}; \sin \alpha = \frac{tg \alpha}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Найдем частные производные функции, $U = \arctg(xy)$, в точке $M(1, 1)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{1 + x^2 y^2} \Big|_{M(1,1)} = \frac{1}{2}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{1 + x^2 y^2} \Big|_{M(1,1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \vec{S}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}.$$

Поверхностный интеграл первого рода определяется равенством

$$\iint_S f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta S_i, \text{ при условии существования предела, где } S_i - \text{эле-}$$

мент поверхности S' , ΔS_i – диаметр частичных поверхностей, ΔS_i – площади частичных поверхностей. Для вычисления поверхностного интеграла применим формулу:

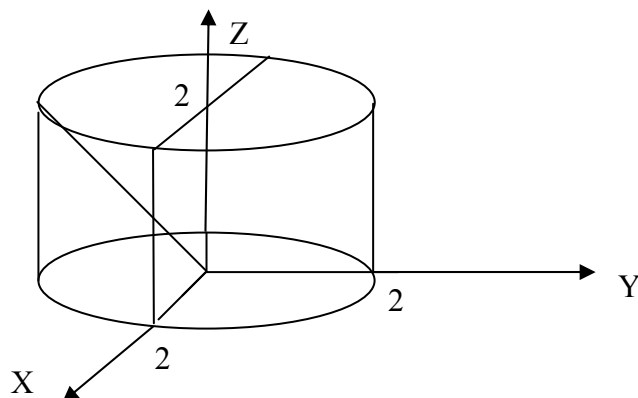
$$\iint_S f(x, y, z) ds = \iint_D f(x, y, F(x, y)) \cdot \sqrt{1 + (F'_x)^2 + (F'_y)^2} dx dy, \text{ где } D - \text{проекция поверхности } S \text{ на}$$

плоскости OXY является однозначной, тогда $F(x, y) = Z$ – уравнение поверхности.

ЗАДАЧА. Вычислить $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} ds$, где S – часть конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$, расположенной между плоскостями $Z = 0$ и $Z = 2$.

Решение: Из уравнения поверхности находим $Z = \sqrt{x^2 + y^2}$, при $0 \leq Z \leq 2$; проекцией этой поверхности на плоскость OXY является круг $x^2 + y^2 \leq 4$.

$$F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad F'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad F'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$



$$\begin{aligned}\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} ds &= \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} dxdy = \\ &= \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} dxdy = \sqrt{2} \cdot \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dxdy.\end{aligned}$$

Перейдем к полярным координатам $x = \rho \cos \varphi, 0 \leq \rho \leq 2, y = \rho \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi$, получим:

$$I = \sqrt{2} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^2 \cdot d\rho = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left. \frac{\rho^3}{3} \right|_0^2 \cdot d\varphi = \frac{8\sqrt{2}}{3} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{8\sqrt{2}}{3} \cdot 2\pi = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}.$$

Если S – гладкая замкнутая поверхность, ограничивающая V и $P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z)$ – непрерывные функции вместе со своими частными производными первого порядка, то имеет место формула Остроградского – Гаусса:

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$$

или

$$\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz \quad (*)$$

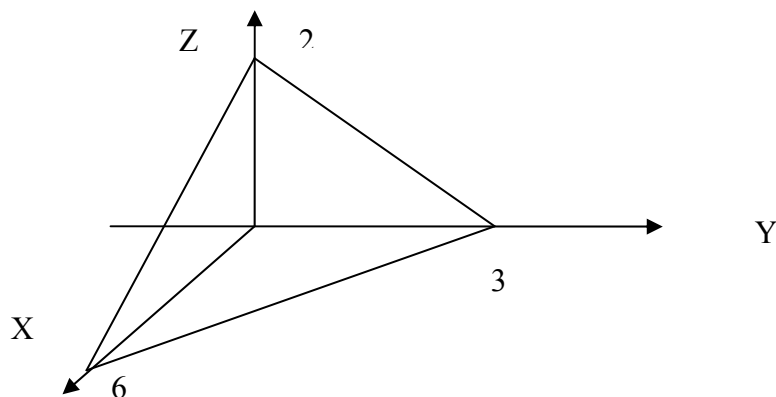
ЗАДАЧА. Вычислить: $\iint_S (x+y)dydz + (y+z)dzdx + (z+x)dxdy$, если S – поверхность, ограниченная плоскостями $x=0, y=0, z=0, x+2y+3z=6$.

По формуле Остроградского – Гаусса имеем: $I = \iiint_V (1+1+1)dxdydz$, так как $P(x, y, z) = x+y$

и $\frac{\partial P}{\partial x} = 1$, $Q(x, y, z) = y+z$ и $\frac{\partial Q}{\partial y} = 1$, $R(x, y, z) = z+x$ и $\frac{\partial R}{\partial z} = 1$, следовательно,

$I = 3 \iiint_V dxdydz = 18$, геометрически последний интеграл выражает объем области V (тетраэдра), ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $x+2y+3z=6$, или в от-

резках уравнение плоскости имеет вид: $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$.



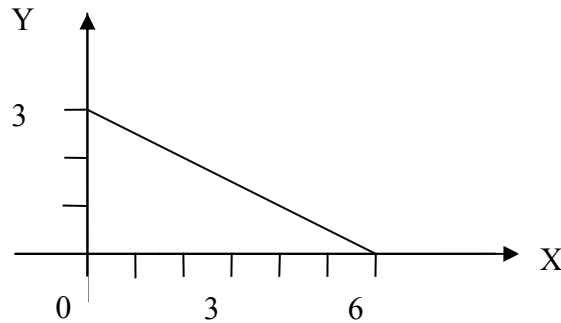
ЗАДАЧА. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$ через верхнюю часть плоскости $x+2y+3z-6=0$, расположенной в первом октанте.

Решение: Выразим Z из уравнения плоскости: $Z = 2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y$, тогда $\vec{n} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$.

Вычислим поток, пользуясь формулой $\Pi = \iint_S \vec{a}\vec{n}^0 ds = \iint_{D_z} \vec{a}(x, y, z)\vec{n}(x, y, z) dx dy$,

$$\Pi = \iint_{D_z} \frac{1}{3}(x - 4y + 3z) dx dy = \frac{1}{3} \iint_{D_z} (6 - 6y) dx dy = \left| \text{так как } z = 2 - \frac{x}{3} - \frac{2}{3}y \right| = 2 \iint_{D_z} (1 - y) dx dy.$$

Так как проекцией плоскости $x + 2y + 3z - 6 = 0$ на плоскости OXY является треугольник, ограниченный прямыми $y = 0$, $x = 0$ и $x + 2y = 6$, то $0 \leq x \leq 6 - 2y$ (см. рисунок), то



$$\Pi = 2 \int_0^3 dy \int_0^{6-2y} (1 - y) dx = 2 \int_0^3 (1 - y)(6 - 2y) dy = 2 \int_0^3 (2y^2 - 8y + 6) dy = 36.$$

ЗАДАЧА. Вычислить дивергенцию векторного поля

$$\vec{a}(M) = (x^2 + y)\vec{i} + (y^2 + z)\vec{j} + (z^2 + x)\vec{k} \text{ в точке } M_0(1, -2, 3).$$

Решение:

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) = 2x + 2y + 2z$$

$$\operatorname{div} \vec{a}(M_0) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 = 4.$$

Так как $\operatorname{div} \vec{a}(M_0) > 0$, то точка M_0 является источником поля.

2.3. Вопросы для контроля

1. Первообразная. Теорема о первообразных.
2. Свойства неопределенных интегралов. Таблица интегралов.
3. Методы интегрирования (по частям, замена переменной).
4. Интегрирование дробно-рациональных функций.
5. Интегрирование простейших дробей.
6. Интегрирование тригонометрических выражений.
7. Интегрирование иррациональных функций.
8. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.
9. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона – Лейбница.
10. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле.
11. Несобственный интеграл.
12. Числовые ряды. Свойства рядов. Кратные интегралы.

13. Геометрический и гармонический ряды. Необходимый признак сходимости.
14. Признаки сходимости положительных рядов.
15. Степенной ряд. Область сходимости и радиус сходимости.
16. Теорема Абеля.
17. Ряды Фурье.
18. Дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения первого порядка: однородные, с разделяющимися переменными, линейные.
19. Уравнение Бернулли и методы его решения.
20. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение.
21. Дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
22. Дифференциальные уравнения однородные и неоднородные.
23. Частное решение дифференциального уравнения.
24. Дифференциальные уравнения высших порядков.
25. Системы дифференциальных уравнений. Приближенное решение дифференциального уравнения.
26. Элементы теории поля. Поверхности и линии уровня.
27. Производная по направлению. Градиент скалярного поля и его свойства.
28. Векторное поле.
29. Поток векторного поля.
30. Дивергенция.
31. Ротор.

РАЗДЕЛ 3. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

3.1. Методические указания и решение типового варианта контрольной работы № 5

Случайные события

Одним из основных понятий теории вероятностей является случайное событие. Случайным событием называется событие, которое должно либо произойти, либо не произойти при выполнении некоторого комплекса условий. В дальнейшем вместо: «выполнение некоторого комплекса условий» и «случайное событие» – будем употреблять выражения «произведено испытание», «событие» и «результат испытания».

Случайные события обычно обозначаются заглавными буквами латинского алфавита: А, В, С... Зафиксируем некоторое испытание, т. е. комплекс условий, и будем рассматривать некоторую систему событий А, В, С. Если в результате испытания при каждом появлении события А наступает событие В, то говорят, что А является частным случаем В, и записывают этот факт в виде АВ.

Если выполняется АВ и ВА, то $A = B$. События А и В называются равносильными, если при каждом испытании они оба наступают либо не наступают.

Произведением событий А и В называется такое событие АВ, которое заключается в совместном наступлении этих событий.

Суммой событий А и В называется такое событие $A + B$, которое заключается в наступлении по крайней мере одного из этих событий.

Событие U называется достоверным, если оно с необходимостью должно произойти при каждом испытании. Событие V называется невозможным, если оно не происходит ни при

каком испытании. Все достоверные события равносильны, то же самое относится и к невозможным событиям.

Событие A называется противоположным событию $\bar{A}$ (и наоборот), если для них одновременно выполняются неравенства:

$$A + \bar{A} = U; \quad V = A \cdot \bar{A}.$$

События A и B называются несовместными, если их совместное наступление неосуществимо, т. е. если $B = V$.

События $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу попарно несовместных событий, если события A_i и A_j при $i \neq j$ несовместимы и хотя бы одно из событий непременно должно произойти. Иными словами, полная группа попарно несовместных событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ удовлетворяет двум условиям:

- 1) $A_1 + A_2 + \dots + A_n = U$ (полная группа),
- 2) $A_i \cdot A_j = V$, $i \neq j$ (попарная несовместимость).

Операции над событиями удовлетворяют следующим правилам:

- а) $A + B = B + A$; $A + V = A$; $A + U = U$; $A + A = A$;
- б) $AB = BA$; $AU = A$; $AV = V$; $AA = A$;
- в) $(A + B)C = AC + BC$.

Классическое определение вероятности

Назовем событие E_i ($i = 1, 2, \dots, N$) возможным случаем. Пусть событие A является некоторым событием системы, тогда A представляется в виде суммы некоторых возможных случаев E_i . Слагаемые E_i , входящие в разложение A , назовем случаями, благоприятствующими событию A , а их число обозначим буквой M .

Определение: Вероятность $P(A)$ события A называется число, равное отношению числа возможных случаев M , благоприятствующих событию A , к числу всех возможных случаев N , т. е. $P(A) = \frac{M}{N}$.

Из определения вероятности следует, что для вычисления $P(A)$ требуется прежде всего выяснить, какие события в условиях данной задачи являются возможными случаями, затем подсчитать число возможных случаев, благоприятствующих событию A , число всех возможных случаев и найти отношение числа благоприятствующих случаев к числу всех возможных.

Свойства вероятностей, вытекающие из классического определения:

- 1) вероятность достоверного события равна единице. Достоверное событие U обязательно происходит при испытании, поэтому все возможные случаи являются для него благоприятствующими и $P(A) = 1$;
- 2) вероятность невозможного события равна нулю. Число благоприятствующих случаев для невозможного события равно нулю, следовательно, $P(A) = 0$;
- 3) вероятность события есть число, заключенное между нулем и единицей.

В силу того что дробь $\frac{M}{N}$ не может быть числом отрицательным и большим единицы,

справедливо неравенство: $0 < P(A) < 1$.

Статистическое определение вероятности

Следует отметить, что классическое определение вероятности имеет существенный недостаток, заключающийся в том, что в практических задачах не всегда можно найти разумный способ выделения «равносильных случаев». Например, затруднительно определить вероятность того, что ребенок, который должен родиться, окажется мальчиком, или опреде-

лить вероятность брака в партии деталей. Из-за указанного недостатка наряду с классическим пользуются статистическим определением вероятности, опирающимся на понятие частоты (или частоты).

Если классическое определение вероятности исходит из соображений равновозможности событий при некоторых испытаниях, то статистически вероятность определяется из опыта, наблюдения результатов испытания.

Число m появления события A при n испытаниях называют частотой, а отношение m/n – относительной частотой события.

Относительные частоты незначительно уклоняются от вероятности, вычисленной на основе классического определения вероятности.

Тот факт, что при большем числе испытаний относительная частота событий остается почти постоянной, приводит к предположению о наличии объективных закономерностей, характеризующих это событие и не зависящих от испытателя.

Вероятностью случайного события A можно назвать некоторую постоянную, являющуюся числовой характеристикой, мерой объективной возможности этого события, около которой колеблется относительная частота.

Статистическое определение вероятности заключается в том, что за вероятность события A принимается относительная частота или число, близкое к ней. При этом требуется, чтобы в неизменных условиях было проведено достаточно большое число испытаний, независимых друг от друга, в каждом из которых может произойти или не произойти событие A .

К недостаткам статистического определения вероятности следует отнести то, что оно носит описательный, а не формально-математический характер; кроме того, такое определение не показывает реальных условий, при которых наблюдается устойчивость частот.

Теорема сложения вероятностей для несовместных событий

Если событие A является суммой несовместных событий B и C , входящих в поле событий, то вероятность суммы этих событий равна сумме их вероятностей:

$$P(A) = P(B) + P(C).$$

Следствие. Вероятность события $\bar{A}$, противоположного событию A , равна единице без вероятности события A :

$$1 - P(A) = P(\bar{A}).$$

ЗАДАЧА. Каждое из трех несовместимых событий A , B и C происходит соответственно с вероятностями 0,01; 0,02 и 0,03. Найти вероятность того, что в результате опыта не произойдет ни одного события.

Решение: Найдем вероятность того, что в результате опыта произойдет хотя бы одно из событий A , B и C , т. е. найдем вероятность суммы событий $D = A + B + C$. Так как по условию события A , B и C несовместимы, $P(D) = P(A) + P(B) + P(C) = 0,01 + 0,02 + 0,03 = 0,06$.

Событие, вероятность которого требуется найти в задаче, является противоположным событию D . Следовательно, искомая вероятность равна: $1 - 0,06 = 0,94$.

Теорема сложения вероятностей для совместных событий

Если событие A является суммой совместных событий B и C , входящих в поле событий, то вероятность суммы этих событий равна сумме их вероятностей минус вероятность их совмещения:

$$P(A) = P(B) + P(C) - P(AB).$$

Определение: Два события A и B называются зависимыми, если вероятность одного из них зависит от наступления или ненаступления другого. В случае зависимых событий вводится понятие условной вероятности события.

Определение: Условной вероятностью $P(A/B)$ события A называется вероятность события A , вычисленная при условии, что событие B произошло. Аналогично через $P(B/A)$ обозначается условная вероятность события B при условии, что A наступило.

Безусловная вероятность события A отличается от условной вероятности этого события.

Например, пусть брошены две монеты и требуется определить вероятность того, что появится два «орла» (событие A), если известно, что на первой монете появится «орел» (событие B). Все возможные случаи следующие: («орел», «решка»), («орел», «орел»), («решка», «орел»), («решка», «решка»), в скобках на первом месте указана сторона первой монеты, на втором месте – второй монеты.

Если речь идет о безусловной вероятности событий A , то $N = 4$, $M = 1$ и $P(A) = 0,25$. Если же событие B произошло, то число благоприятствующих A случаев остается тем же самым $M = 1$, а число возможных случаев $N = 2$: («орел», «орел»), («орел», «решка»). Следовательно, условная вероятность A при условии, что B наступило, есть $P(A/B) = 0,5$.

Теорема умножения вероятностей зависимых событий

Вероятность совместного наступления двух зависимых событий равна вероятности одного события, умноженной на условную вероятность другого события при условии, что первое произошло:

$$P(AB) = P(A)P(B/A).$$

Говорят, что событие A независимо от события B , если имеет место равенство $P(A/B) = P(A)$.

Следствие 1. Вероятность совместного наступления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий (теорема умножения для независимых событий):

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Следствие 2. Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности совместного их наступления (теорема сложения для любых событий), т. е. если A и B – любые события, совместимые или несовместимые, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

ЗАДАЧА. Вероятность попадания стрелка в мишень при каждом выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что после двух выстрелов мишень окажется пораженной.

Решение: Обозначим через A_1 событие, заключающееся в попадании в мишень при первом выстреле, а через A_2 – при втором выстреле. Тогда $A_1 \cdot A_2$ является событием, означающим попадание в мишень при обоих выстрелах.

Событие A , вероятность которого требуется найти в задаче, является суммой события A_1 и A_2 . Применяя теоремы сложения и умножения вероятностей для совместимых независимых событий A_1 и A_2 , получим

$$P(A) = 0,8 + 0,8 - 0,64 = 1,6 - 0,64 = 0,96.$$

ЗАДАЧА. Вероятность выхода изделия из строя при эксплуатации сроком до 1 года равна 0,13, а при эксплуатации сроком до 3 лет – 0,36. Найти вероятность выхода изделия из строя при эксплуатации сроком от 1 до 3 лет.

Решение: Пусть A , B , C – выход из строя изделий эксплуатации сроком соответственно до 1 года, от 1 года до 3 лет, свыше 3 лет, причем по условию $P(A) = 0,13$, $P(C) = 0,36$. Очевидно, что $C = A + B$, где A и B – несовместные события. По теореме сложения $P(C) = P(A) + P(B)$, откуда

$$P(B) = P(C) - P(A) = 0,36 - 0,13 = 0,23.$$

ЗАДАЧА. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,7, для третьего – 0,9. Каждый из стрелков делает по одному выстрелу. Какова вероятность того, что в мишени 3 пробоины?

Решение: A – попадание в цель n -го стрелка ($n = 1, 2, 3$); B – в мишени 3 пробоины.

Очевидно, что $B = A_1 A_2 A_3$, причем события A_1, A_2, A_3 – независимы. Тогда по теореме умножения для независимых событий

$$P(B) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,504.$$

ЗАДАЧА. На 100 лотерейных билетов приходится 5 выигрышных. Какова вероятность выигрыша хотя бы по одному билету, если приобретено: а) 2 билета; б) 4 билета?

Решение:

а) По формуле $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ вероятность выигрыша хотя бы по одному из двух билетов

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = \frac{5}{100} + \frac{5}{100} - \frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} = 0,098;$$

$$\text{б) По формуле } P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = 1 - P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot \bar{A}_4) = 1 - \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{93}{98} \cdot \frac{92}{97} = 0,188.$$

Формулы полной вероятности и вероятности гипотез

Рассмотрим полную группу n попарно несовместимых событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ и некоторое событие B . Возьмем произведение события U на событие B , где U – достоверное событие.

Вероятность $P(B)$ события B , которое может произойти только совместно с одним из событий, образующих полную группу попарно несовместимых событий, определяется последней формулой, носящей название формулы полной вероятности

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P_{A_i}(B).$$

ЗАДАЧА. В магазин поступила новая продукция с трех предприятий. Процентный состав этой продукции следующий: 20 % – продукция первого предприятия, 30 % – продукция второго предприятия, 50 % – продукция третьего предприятия; далее, 10 % продукции первого предприятия высшего сорта, на втором предприятии – 5 % и на третьем – 20 % продукции высшего сорта. Найти вероятность того, что случайно купленная новая продукция окажется высшего сорта.

Решение: Обозначим через B событие, заключающееся в том, что будет куплена продукция высшего сорта, через A_1, A_2 и A_3 обозначим события, заключающиеся в покупке продукции, принадлежащей соответственно первому, второму и третьему предприятиям. Очевидно,

$$\begin{aligned} P(A_1) &= 0,2, & P(B/A_1) &= 0,1, \\ P(A_2) &= 0,3, & P(B/A_2) &= 0,05, \\ P(A_3) &= 0,5, & P(B/A_3) &= 0,2. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в формулу полной вероятности, получим искомую вероятность

$$P(B) = 0,2 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,05 + 0,5 \cdot 0,2 = 0,02 + 0,015 + 0,10 = 0,135.$$

Пусть, как и при выводе формулы полной вероятности, событие В может наступить в различных условиях, относительно существования которых можно сделать n предположений, гипотез: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. Вероятности $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)$ этих гипотез известны до испытания, и, кроме того, известна вероятность $P(B/A_i)$, сообщаемая событию В гипотезой A_i . Пусть после проведенного испытания событие В наступило. Требуется при этом условии найти вероятность гипотезы A_i . В этом случае применяют формулу:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B / A_i)}{P(B)}.$$

Полученная формула носит название формулы вероятности гипотез, или формулы Байеса.

Повторение испытаний. Формула Бернулли

При решении вероятностных задач часто приходится сталкиваться с ситуациями, в которых одно и то же испытание (опыт) повторяется многократно.

Поставим задачу в общем виде. Пусть в результате испытания возможны два исхода: либо появится событие А, либо противоположное ему событие $\bar{A}$. Проведем n испытаний, все n испытаний независимы; вероятность появления события А в каждом отдельно взятом или единичном испытании постоянна и от испытания к испытанию не изменяется. Обозначим $P(A) = p$, а вероятность $P(\bar{A})$ – буквой q , т. е.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - p = q.$$

Найдем вероятность $P_n(m)$ наступления события А ровно m раз в n испытаниях

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}.$$

ЗАДАЧА. Монету бросают 6 раз. Какова вероятность того, что 4 раза выпадет «орел»?

Решение: Обозначим: количество испытаний $n = 6$; число поступлений события «выпадет «орел» $m = 4$; вероятность наступления события «выпадет «орел» $p = 0,5$; тогда $q = 1 - p = 0,5$.

По формуле Бернулли получаем

$$P_6(4) = C_6^4 \cdot p^4 \cdot q^{6-4} = 15 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} = 0,234.$$

ЗАДАЧА. Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,8. Найти вероятности возможного числа появления бракованных деталей среди 5 отобранных. Построить полигон распределения вероятностей.

Решение: Вероятность изготовления бракованной детали $p = 1 - 0,8 = 0,2$. Искомые вероятности находим по формуле Бернулли:

$$P_5(0) = C_5^0 0,2^0 0,8^5 = 0,32768$$

$$P_5(2) = C_5^4 0,2^2 0,8^3 = 0,2048$$

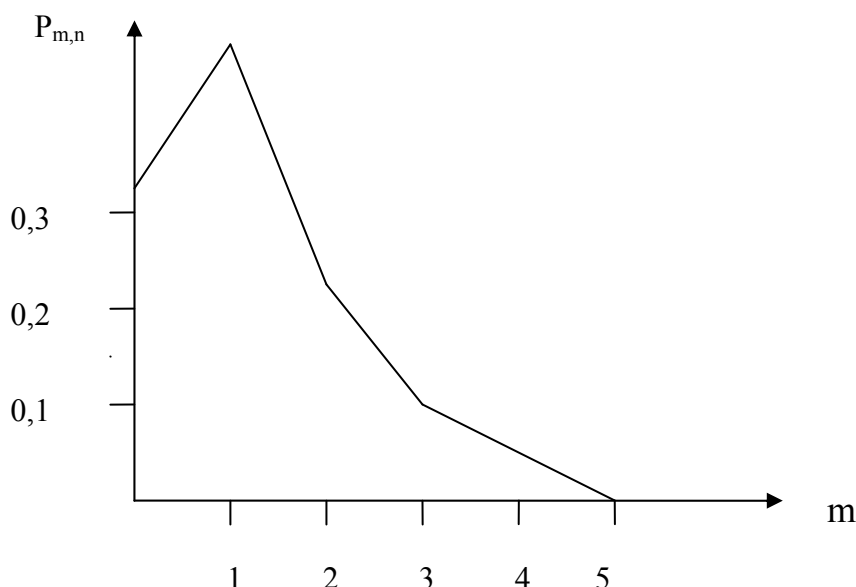
$$P_5(4) = C_5^4 0,2^4 0,8^1 = 0,0064$$

$$P_5(1) = C_5^1 0,2^1 0,8^4 = 0,4096$$

$$P_5(3) = C_5^3 0,2^3 0,8^2 = 0,0512$$

$$P_5(5) = C_5^5 0,2^5 0,8^0 = 0,00032.$$

Полученные вероятности изобразим графически точками с координатами $(m, P_{m,n})$. Соединяя эти точки, получим многоугольник, или полигон, распределения вероятностей.



Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Пусть производится n одинаковых независимых испытаний с вероятностью появления события в каждом испытании, равной p . Тогда вероятность частоты m наступления события A определяется, как было показано ранее по формуле Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}.$$

Вычисление по этой формуле трудно практически осуществить при $n > 20$.

В таких случаях применяют асимптотическую формулу, позволяющую найти указанную вероятность. Теорема, выражающая эту формулу, носит название локальной теоремы Муавра – Лапласа.

Теорема. Если производится n одинаковых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события равна p , то вероятность того, что данное событие появится m раз, определяется по формуле

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \quad \text{где} \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}; \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Эта теорема дает приближение биномиального закона распределения к нормальному при p , значительно отличающемся от нуля и единицы.

ЗАДАЧА. Для мастера определенной квалификации вероятность изготовить деталь отличного качества равна 0,75. За смену он изготовил 400 деталей. Найти вероятность того, что в их числе 250 деталей отличного качества.

Решение: По условию $n = 400$, $p = 0,75$, $q = 0,25$ и $m = 280$, откуда $npq = 75$, $x = -2,3095$.

По таблицам $\varphi(t)$ найдем $\varphi(-2,31) = \varphi(2,31) = 0,0277$. Искомая вероятность равна $P = 0,0032$.

Интегральная теорема Лапласа

Для вычисления вероятности того, что частота m , подчиненная биномиальному закону распределения, заключена между данными значениями m_1 и m_2 , применяют интегральную

теорему Лапласа, выраженную асимптотической формулой. Формулу, выражающую интегральную теорему Лапласа, можно получить из закона нормального распределения.

Теорема. Пусть вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и $0 < p < 1$. Тогда вероятность того, что событие A появится в n испытаниях от m_1 до m_2 раз, приближенно равна определенному интегралу

$$P_n(m_1, m_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-z^2/2} dz = P_n(m_1, m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$ и $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-z^2/2} \cdot dz$.

При больших значениях n наиболее вероятная частота совпадает с математическим ожиданием частоты. Поэтому для нахождения вероятности того, что абсолютная величина отклонения частоты от наиболее вероятной частоты не превосходит заданного числа $\varepsilon > 0$, используют приближенное равенство:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \cong 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Формула Пуассона

Если вероятность события p (или q) в отдельном испытании близка к нулю, то даже при большом числе испытаний n , но небольшой величине произведения np (меньше 10), применяют асимптотическую формулу Пуассона

$$P_n(m) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^m}{m!},$$

где $\lambda = np$.

ЗАДАЧА. Некоторое электронное устройство выходит из строя, если откажет определенная микросхема. Вероятность ее отказа в течение 1 ч работы устройства равна 0,004. Какова вероятность того, что за 1000 ч работы устройства придется пять раз менять микросхему?

Решение: По условию, $n = 1000$, $p = 0,004$, а $\lambda = np = 1000 \cdot 0,004 = 4 < 10$. Для нахождения вероятности $P_{1000}(5)$ воспользуемся формулой Пуассона, так как условия ее применения выполнены. Имеем

$$P_{1000}(5) = \frac{e^{-4} \cdot 4^5}{5!} = 0,1582.$$

ЗАДАЧА. На факультете насчитывается 1825 студентов. Какова вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно четырех студентов факультета?

Решение: Вероятность того, что день рождения студента 1 сентября, равна $p = 1/365$. Так как $p = 1/365$ – мала, $n = 1825$ – велико и $\lambda = n \cdot p = 1825 \cdot (1/365) = 5 \leq 10$, то применяем формулу Пуассона:

$$P_{4,1825} = P_4(5) = 0,1755.$$

Случайные величины и их числовые характеристики.

Случайная величина и закон ее распределения

Случайная величина является одним из основных понятий теории вероятностей. Рассмотрим некоторые примеры, разъясняющие смысл случайной величины.

При последовательном бросании монеты несколько раз число появлений «орла» является переменной величиной, принимающей значения 0, 1, 2, ... в зависимости от случайных обстоятельств.

Интервал времени между двумя последовательными появлениями автобуса на данной остановке также является переменной величиной, подверженной различным колебаниям в зависимости от многих причин, учесть которые мы не в состоянии.

Рассматриваемая в этих примерах переменная величина обладает характерной особенностью. Хотя мы можем указать область ее возможных значений, однако мы не можем заранее знать, какое конкретное значение примет эта переменная величина, так как оно зависит от случая и меняется от испытания к испытанию.

Определение: Переменную величину, которая в результате испытания может принять лишь одно возможное значение, заранее не известное и зависящее от случайных причин, называют случайной величиной.

Для изучения случайной величины необходимо указать не только область ее возможных значений, но и то, как часто принимается этой величиной определенное значение, т. е. вероятность этих значений.

Определение: Соответствие между областью возможных значений случайной величины и множеством вероятностей этих значений носит название закона распределения случайной величины.

В зависимости от характера области возможных значений можно выделить два вида случайных величин: дискретные и непрерывные. Функцию, устанавливающую соответствие между областью возможных значений и множеством вероятностей для каждого вида случайных величин, можно задать разными способами.

Будем обозначать случайные величины большими латинскими буквами $X, Y, T, \dots$, а соответствующие значения, которые они принимают, малыми буквами $x, y, t, \dots$.

Определение: Случайная величина называется дискретной, если она принимает конечное или счетное число значений.

Дискретная случайная величина задается с помощью ряда распределения – функции, ставящей в соответствие каждому возможному значению случайной величины определенную вероятность. Таким образом, ряд распределения – это конечное или счетное множество пар элементов:

$$\{x_i, p_i\}, i = 1, 2, \dots; \quad p_i = P(X = x_i).$$

Так как случайная величина X примет обязательно какое-нибудь из своих возможных значений x_i , сумма вероятностей p_i всех возможных значений равна единице.

Ряд распределения удобно изображать в виде таблицы:

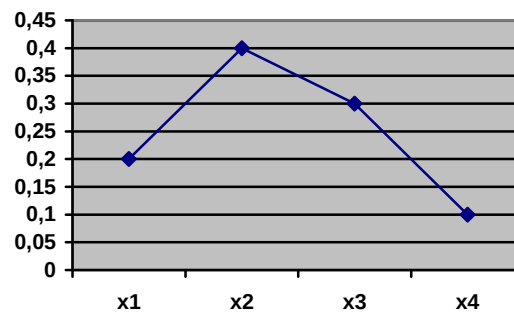
X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

В первой строке указаны возможные значения x_i дискретной случайной величины X , а во второй – соответственно вероятности того, что X примет значение x_i .

Пусть дискретная случайная величина задана законом распределения в виде таблицы

X	x_1	x_2	x_3	x_4
P	0,2	0,4	0,3	0,1

Графическое изображение ряда распределения называется многоугольником распределения. Для его построения возможные значения x_i случайной величины откладываются по оси абсцисс, а вероятности – по оси ординат; точки с координатами (x_i, p_i) соединяются отрезками



ЗАДАЧА. Найти ряд распределения случайной величины, являющейся частотой выпадения «орла» при трех бросаниях монеты. Построить полигон распределения вероятностей.

Решение: Возможные значения частоты X выпадения «орла» следующие: 0, 1, 2, 3. Соответствующие вероятности нетрудно подсчитать путем учета благоприятствующих каждому значению частоты случаев при числе всех возможных случаев, равных 8:

$$P(X = 0) = 0,125,$$

$$P(X = 1) = 0,375,$$

$$P(X = 2) = 0,375,$$

$$P(X = 3) = 0,125; \text{ контроль: } 0,125 + 0,375 + 0,375 + 0,125 = 1.$$

Таким образом, получим закон распределения в виде:

X	0	1	2	3
P	0,125	0,375	0,375	0,125

Непрерывная случайная величина принимает возможные значения, заполняющие сплошь заданный интервал.

Определение: Плотностью вероятности $f(x)$ непрерывной случайной величины X называется производная ее функции распределения $f(x) = F'(x)$.

ЗАДАЧА. Функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{x}{2} & \text{при } 0 < x \leq 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

Найти плотность вероятности непрерывной случайной величины X .

Заметим, что для удобства изучения непрерывных случайных величин плотность распределения определяют не на конечном интервале возможных значений случайной величины, а на всей действительной числовой прямой, полагая $p(x)$ тождественно равной нулю для x , лежащих вне интервала возможных значений случайной величины.

Наиболее общим способом задания различных по своей природе случайных величин является функция распределения случайной величины (интегральный закон распределения).

Функция распределения

Функцией распределения $F(x)$ случайной величины X , принимающей любое действительное значение x , называется вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем x , т. е.

$$F(x) = P(X < x), \text{ причем } 0 \leq F(x) \leq 1.$$

Теорема. Функция распределения обладает следующими свойствами:

1. $(x_1 < x_2) \Rightarrow (F(x_1) \leq F(x_2))$, монотонное неубывание;
2. $\lim_{x \rightarrow c} F(x) = F(c), (x < c)$, непрерывность слева;
3. $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$

Для дискретной случайной величины $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ функция распределения $F(x)$ может быть записана в виде:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{k: x_k < x} p_k.$$

Для непрерывной случайной величины интегральный закон выражается формулой:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) \cdot dt,$$

где функция $f(t)$ является плотностью распределения, удовлетворяющей двум условиям:

- 1) $f(t) \geq 0$;
- 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = 1$. Неотрицательность и нормированность.

$$\text{Вероятность } P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x) \cdot dx.$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины

Для практического применения не всегда необходимо иметь полное представление о случайной величине, достаточно знать некоторые ее числовые характеристики, дающие суммарное представление о случайной величине. К таким характеристикам прежде всего относятся математическое ожидание и дисперсия.

Математическое ожидание MX (среднее значение) дискретной случайной величины X определяется по формуле

$$MX = \sum_k x_i \cdot p_i.$$

Если случайная величина X непрерывна и $f(x)$ – ее плотность распределения, то математическим ожиданием случайной величины называется интеграл

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx.$$

Дисперсия $D(x)$ случайной величины X характеризует средний разброс, рассеяние значений случайной величины около математического ожидания.

Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от математического ожидания, т. е.

$$DX = M[X - MX]^2 .$$

Пусть имеется дискретная случайная величина X , заданная рядом распределения:

$$DX = MX^2 - [MX]^2 .$$

Для непрерывной случайной величины дисперсия определяется по формуле

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx \right)^2 .$$

Среднее квадратическое отклонение равно арифметическому корню из дисперсии:

$$\sigma X = \sqrt{DX} .$$

Основные свойства математического ожидания и дисперсии

Свойство 1. Математическое ожидание постоянной равно этой постоянной:

$$MC = C .$$

Доказательство. Постоянную C можно рассматривать как дискретную случайную величину, принимающую единственное значение с вероятностью единица, поэтому $MC = C \cdot 1 = C$.

Свойство 2. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X + Y) = MX + MY .$$

Следствие. Математическое ожидание суммы конечного числа случайных величин равно сумме их математических ожиданий.

Свойство 3. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин X и Y равно произведению математических ожиданий этих величин. Пусть случайные величины X и Y заданы рядами распределения. Ряд распределения для произведения случайных величин выглядит следующим образом:

$$MXY = MX \cdot MY .$$

Причем в силу независимости случайных величин X и Y события независимы.

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(cX) = cMX .$$

Доказательство. Постоянную c можно рассматривать как случайную величину, причем c и X – независимые случайные величины, поэтому

$$M(cX) = McMX = CMX .$$

Свойство 4. Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$D(C) = 0.$$

Доказательство. Согласно свойству 1,

$$DC = MC^2 - (MC)^2 = C^2 - C^2 = 0.$$

Свойство 5. Постоянную величину можно вынести за знак дисперсии, предварительно возведя ее в квадрат, т. е.

$$D(cX) = c^2 D(X).$$

Свойство 6. Дисперсия суммы (разности) независимых случайных величин X и Y равна сумме их дисперсий:

$$\begin{aligned} D(X + Y) &= D(X) + D(Y), \\ D(X - Y) &= D(X) + D(Y). \end{aligned}$$

ЗАДАЧА. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X , заданной законом распределения:

X	-5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Решение: Можно вычислить дисперсию, исходя из определения дисперсии, однако мы воспользуемся формулой $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$. Найдем математическое ожидание X :

$$M(X) = -5 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,2 = -0,3.$$

Напишем закон распределения X^2 :

X^2	25	4	9	16
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Найдем математическое ожидание X^2 :

$$M(X^2) = 25 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,1 + 16 \cdot 0,2 = 15,3.$$

Найдем искомую дисперсию:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 15,3 - (-0,3)^2 = 15,21.$$

Моменты случайной величины

1. $\alpha_r = MX^r = \sum_k x_k^r \cdot p_k$ – начальный момент,

2. $\alpha_r = M[(X - MX)^r] = \sum_k (x_k - a_1)^r \cdot p_k$ – центральный момент,

3. $b_r = M|X|^r = \sum_k |x_k|^r \cdot p_k$ – абсолютный,

4. $\beta_r = M|X - MX|^r = \sum_k |x_k - a_1|^r \cdot p_k$ – абсолютный центральный.

Первые моменты играют важную роль в статистике при нахождении параметров функции распределения.

Если кривая распределения $f(x)$ непрерывной случайной величины X симметрично расположена относительно оси, проходящей через $M(X)$, то все центральные моменты нечетного порядка равны нулю. То же самое заключение можно сделать по поводу дискретной случайной величины X , если ее полигон симметричен относительно оси, проходящей через среднее значение случайной величины.

Некоторые законы распределений и их числовые характеристики

Биномиальное распределение представляет собой распределение вероятностей появления события A при n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может осуществиться с одной и той же вероятностью $P(A) = p$. Кроме события A , может произойти также противоположное событие $\bar{A}$, вероятность которого $P(\bar{A}) = 1 - p = q$.

Случайная величина X распределена по биномиальному закону, если ее возможные значения есть $0, 1, 2, \dots, n$ и вероятности этих значений определяются по формуле Бернулли:

$$P(X = m) = P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}.$$

Вероятности любого числа событий соответствуют членам разложения бинома Ньютона в степени, равной числу испытаний.

Числовые характеристики биномиального распределения:

$M(m) = np$ – математическое ожидание частоты появлений события A при n независимых испытаниях;

$D(m) = npq$ – дисперсия частоты появления события A ;

$\sigma_X = \sqrt{DX}$ – среднее квадратическое отклонение частоты.

Когда число испытаний n велико, то для вычисления вероятности комбинаций используется локальная теорема Лапласа:

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x).$$

Равномерное распределение

Непрерывная случайная величина распределена равномерно на интервале (a, b) , если на этом интервале ее функция плотности имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}; \quad M(X) = \frac{b-a}{2}; \quad D(x) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Нормальное распределение

Главная особенность нормального распределения состоит в том, что оно является предельным, к которому приближаются другие распределения.

Нормальным называется распределение, функция плотности вероятности которого имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a – математическое ожидание,

σ – среднее квадратическое отклонение, $a = M(X)$, $\sigma^2 = D(X)$, $\sigma = \sqrt{D(X)}$.

3.2. Вопросы для контроля

1. Множество событий. Классическое определение вероятности события.
2. Основные теоремы теории вероятностей. Формула Бейеса.
3. Случайные величины. Непрерывные и дискретные случайные величины.
4. Законы распределения случайных величин.
5. Двумерная случайная величина. Доверительный интервал, проверка гипотезы. Критерий Пирсона.
6. Основные понятия комбинаторики: размещения, перестановки, сочетания. Бином Ньютона.
7. Определение случайного события. Операции над случайными событиями. Несовместные события. Полная группа событий.
8. Определения вероятности (классическое, статистическое, геометрическое). Свойства вероятности.
9. Условная вероятность. Независимые и зависимые события. Формулы умножения вероятностей. Вероятность наступления хотя бы одного события.
10. Формула полной вероятности. Вероятность гипотез (формула Бейеса).
11. Схема независимых испытаний: постановка задачи, формула Бернулли, формула Пуассона.
12. Схема независимых испытаний: локальная и интегральная формулы Муавра – Лапласа. Функция Лапласа, ее свойства. Следствие из интегральной формулы Муавра – Лапласа (отклонение относительной частоты появления события от его вероятности).
13. Определение случайной величины, классификация случайных величин. Понятие закона распределения вероятностей дискретных случайных величин. Независимые случайные величины. Функции одного и двух случайных аргументов.
14. Математическое ожидание дискретной случайной величины, его свойства.
15. Дисперсия, среднее квадратическое отклонение, мода дискретной случайной величины, их свойства. Начальные и центральные моменты, асимметрия и эксцесс.
16. Функция распределения случайной величины, ее свойства. Построение графика функции распределения дискретной случайной величины.
17. Задание системы двух дискретных случайных величин, построение законов распределения ее составляющих. Числовые характеристики системы двух дискретных случайных величин: ковариационный момент, коэффициент корреляции.
18. Определение непрерывной случайной величины. Функция и плотность распределения, их свойства. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал. Числовые характеристики непрерывных случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, медиана.
19. Равномерный и показательный законы распределения, их числовые характеристики.
20. Нормальный закон распределения, его числовые характеристики. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал.
21. Случайные величины общего вида, их числовые характеристики.
22. Цепи Маркова, способы их представления. Вычисление вероятностей переходов за два и более шага, а также предельного распределения вероятностей.
23. Простейший (пуассоновский) поток событий, его свойства, закон распределения случайного времени между наступлениями двух событий потока.
24. Марковские случайные процессы: определение, правила составления систем дифференциальных и алгебраических уравнений относительно вероятностей состояний.
25. Системы массового обслуживания с отказами, их основные характеристики.
26. Системы массового обслуживания с ожиданием, их основные характеристики.
27. Выборочная совокупность и вариационный ряд. Вычисление объема выборки и относительных частот. Графическое представление рядов распределения: полигон или гистограмма, график эмпирической функции распределения.
28. Статистические оценки параметров распределения: понятия состоятельной и несмещенной оценки, выборочные среднее, средний квадрат, исправленные выборочные дисперсия и среднее квадратическое отклонение, интервальные оценки для математического ожида-

ния и среднеквадратического отклонения нормального закона. Привести демонстрационные примеры расчета точечных оценок.

29. Статистическая гипотеза. Виды гипотез. Ошибки первого и второго рода. Понятия уровня значимости, критерия, критической области, виды критических областей.

30. Правила проверки гипотез о равенствах генеральной дисперсии и генерального среднего (математического ожидания) нормального закона заданным значениям.

31. Правило проверки гипотезы о подчинении эмпирической выборки равномерному закону распределения с помощью критерия Пирсона.

32. Корреляционная зависимость между переменными. Выборочный коэффициент корреляции и линейное уравнение регрессии. Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции.

33. Выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена, его свойства, проверка гипотезы о его значимости.

34. Выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла, его свойства, проверка гипотезы о его значимости.

35. Однофакторный дисперсионный анализ. Факторная таблица. Общее и групповые средние. Проверка гипотезы о равенстве групповых средних по критерию Фишера.

36. Понятие псевдослучайной последовательности. Генерация псевдослучайных последовательностей в различных прикладных программах.

37. Генерация дискретного закона распределения, заданного в виде таблицы, с помощью псевдослучайных чисел.

38. Генерация равномерного, показательного и нормального законов распределения с помощью псевдослучайных чисел.

39. Метод Монте-Карло, его применение к вычислению определенных интегралов. Оценка наименьшего числа испытаний.

РАЗДЕЛ 4. ИТОГОВЫЕ ТЕСТЫ

4.1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Вариант 1

1. Значение определителя $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ равно:

а) 16; б) 24; в) 36; г) -36.

2. Какое из произведений матриц A и B существует:

а) $A_{2 \times 2} B_{3 \times 2}$;

б) $A_{3 \times 3} B_{3 \times 1}$;

в) $A_{3 \times 2} B_{3 \times 2}$;

г) $A_{1 \times 2} B_{1 \times 3}$.

3. Решением системы уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$ является:

а) (1, 2, 3); б) (3, -1, 2); в) (2, 1, 1); г) (3, -2, 1).

4. Сила $F = (-3, 1, -9)$, приложенная к точке $A(6, -3, 5)$, переместила ее в точку $B(9, 5, -7)$, двигаясь прямолинейно. Работа, совершенная при этом, равна: а) 102; б) 97; в) 107; г) 105.

5. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = (-1, 3, 2)$, $\vec{b} = (2, 8, 1)$, $\vec{c} = (1, 1, 2)$, равен: а) 18; б) 36; в) 26; г) 48.

6. Уравнение высоты AD $\triangle ABC$, где $A(3, 2)$, $B(-2, 5)$, $C(6, -2)$, имеет вид:

а) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$; б) $y = -\frac{7}{8}x + \frac{15}{8}$; в) $y = \frac{8}{7}x + \frac{38}{7}$; г) $y = 3x - \frac{15}{7}$.

7. Кривая второго порядка $9x^2 + 5y^2 + 18x - 30y + 9 = 0$ имеет центр симметрии в точке:

а) $(-1, 3)$; б) $(1, 3)$; в) $(-1, -3)$; г) $(3, 1)$.

8. Прямые $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{n} = \frac{z}{1}$ и $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y-5z-8=0 \end{cases}$ параллельны

при n равном: а) 4; б) 2; в) -2; г) 6.

9. Внешний угол $\triangle ABC$, $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$, $C(3, -2, 1)$, при вершине B равен:

а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{3\pi}{4}$; г) $\frac{3\pi}{2}$.

10. Точки K и L являются серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Если $\vec{AK} = \vec{a}$, $\vec{AL} = \vec{b}$, то вектор $\vec{KD}$ равен:

а) $\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{5}{3}\vec{b}$; б) $\frac{4}{3}\vec{b} - \frac{5}{3}\vec{a}$; в) $\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a}$; г) $\frac{4}{3}\vec{a} - \frac{5}{3}\vec{b}$.

4.2. Введение в математический анализ

Вариант 1

1. Областью определения функции

$$y = \frac{\ln(1+x)}{x-1}$$

является промежуток

а) $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$; б) $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$; в) $(1, +\infty)$; г) $(-\infty, -1)$.

2. Какая из функций является четной

а) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$; б) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$; в) $f(x) = |x| - x$; г) $f(x) = x - 5e^{x^2}$.

3. Сколько членов последовательности

$$\left\{ \frac{2n-1}{n+2} \right\}$$

находится вне интервала $(1,99; 2,01)$:

а) 498; б) 502; в) 503; г) 200.

4. Предел функции равен:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 5x + 6}$$

а) 5; б) 4; в) 7; г) 6.

5. Предел функции равен:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}$$

а) 5; б) 6; в) 8; г) 7.

6. Предел функции равен:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{1+2x} \right)^{-5x}$$

- а) e^5 ; б) e^2 ; в) $e^{\frac{3}{2}}$; г) $e^{\frac{5}{2}}$.

7. Является ли функция непрерывной

$$f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1 \\ x^2+2, & x \geq -1 \end{cases}$$

- а) да; б) нет.

8. Будет ли функция

$$f(x) = x^5 - 3x + 1 \quad [1; 2]$$

в какой-либо точке отрезка принимать значение, равное нулю:

- а) да; б) нет.

9. Данная функция является композицией нескольких функций

$$f(x) = \sqrt[5]{\lg(\sin x^2)}$$

- а) четырех; б) трех; в) пяти; г) двух.

10. Записать утверждение в предельной форме

$$(\forall N > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) : (|x-1| < \delta \Rightarrow |f(x)-N| < N)$$

- а) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = N$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$; г) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = N$.

ОТВЕТЫ НА ВОПРОСЫ ТЕСТА 1

Задания	Вариант1
1	г
2	б
3	б
4	в
5	б
6	в
7	а
8	в
9	в
10	б

ОТВЕТЫ НА ВОПРОСЫ ТЕСТА 2

Задание	Вариант 1
1	б
2	б
3	а
4	в
5	г
6	г
7	а
8	а
9	а
10	в

ГЛОССАРИЙ

Определение: Последовательностью называется функция натурального аргумента $x_n = f(n)$, $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_{n'}, \dots$.

Определение: Число b называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 , если для любого $(\forall)$ сколь угодно малого положительного числа ε найдется $(\exists)$ положительное число δ_ε (дельта), что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполнится неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Пишут $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$.

Определение: Функция $f(x)$ называется бесконечно малой в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Определение: Функция $f(x)$ называется бесконечно большой в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Теорема: Если $f(x)$ – бесконечно большая функция, то $\frac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая функция. Если $f(x)$ – бесконечно малая и $\varphi(x)$ – бесконечно малая функция в точке x_0 и $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1$, то $f(x)$ и $\varphi(x)$ эквивалентны. Пишут $f(x) \sim \varphi(x)$.

Определение: Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если существует предел функции в точке x_0 , равный значению функции в точке x_0 , т. е. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение: Точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$ первого рода, если существуют конечные, но неравные односторонние пределы функции в точке x_0 . Разность между правым и левым пределами называется скачком.

Определение: Точка x_0 называется точкой разрыва второго рода, если хотя бы один из односторонних пределов равен ∞ или не существует.

Определение: Точка x_0 называется точкой устранимого разрыва, если существует предел функции в этой точке, не равный значению функции в точке x_0 .

Определение: Пусть функция $y = f(x)$ задана на некотором множестве X . $x_0 \in X$ и $x_0 + \Delta x \in X$. Тогда соответствующее приращение Δy функции равно разности нового и старого значений: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Если существует конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента при $\Delta x \rightarrow 0 (x \rightarrow x_0)$, то он называется производной функции в точке x_0 . Пишут $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$, или

$$y'(x_0), \quad \frac{dy}{dx}(x_0).$$

Определение: Производной второго порядка функции $y = f(x)$ в точке называется производная от первой производной, т. е. $(y')'$, если она существует. Обозначают

$$y'', f''(x), \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d(y')}{dx}.$$

Определение: Производной n -го порядка функции $y = f(x)$ называют производную от производной $(n - 1)$ -го порядка данной функции. Обозначают $y^{(n)}, \frac{d(y^{(n-1)})}{dx}$.

Определение: Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется главная линейная часть приращения этой функции, зависящая линейно от приращения Δx : $dy = f'(x)\Delta x$ ($dy = f'(x)dx$).

Определение: Точки, в которых производная первого порядка обращается в нуль или терпит разрыв, называются критическими.

Определение: Прямая называется асимптотой данной кривой $y = f(x)$, если расстояние от точки M кривой до прямой, при удалении точки M в бесконечность, стремится к нулю.

Если $\lim_{x \rightarrow x_1 \pm} f(x) \rightarrow \pm\infty$, то $x = x_1$ – вертикальная асимптота.

Если существуют пределы: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ и $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$, то прямая $y = kx + b$ – наклонная асимптота графика функции. Если $k = 0$, $y = b$ – горизонтальная асимптота.

Определение: Число B называют пределом функции $Z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что при всех x и y , удовлетворяющих условиям $|x - x_0| < \delta$ и $|y - y_0| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x, y) - B| < \varepsilon$. Пишут $B = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \lim_{M \rightarrow M_0} f(x, y)$.

Определение: Частной производной функции $Z = f(x, y)$ по переменной x называют предел отношения $\frac{\Delta_x Z}{\Delta x}$, а по переменной y – $\frac{\Delta_y Z}{\Delta y}$, если они существуют, тогда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x Z}{\Delta x} = \frac{\partial Z}{\partial x}$, а $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y Z}{\Delta y} = \frac{\partial Z}{\partial y}$, где $\Delta_x Z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$, $\Delta_y Z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$. Обозначают $Z'_x, Z'_y, f'_x(x, y), f'_y(x, y)$.

Определение: Полем называется область некоторого пространства, в каждой точке которой определено значение некоторой величины.

Определение: Если в каждой точке M этой области V соответствует определенное число $\varphi = \varphi(M)$, то говорят, что в области V задано скалярное поле.

Определение: Если каждой точке M из области V соответствует некоторый вектор $\vec{a} = \vec{a}(M)$, то говорят, что задано векторное поле.

Определение: Множество точек поля, в которых скаляр φ имеет одно и то же значение, называется поверхностью уровня поля.

Определение: Градиентом функции $\varphi(x, y, z)$ обозначают $\text{grad} \varphi$, называют вектор, координатами которого являются значения частных производных функции $\varphi(x, y, z)$ в точке M

(x, y, z) : $\text{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы, или

$$\text{grad} \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right).$$

Определение: Векторной линией поля $\vec{a}$ называется линия, касательная к которой в каждой ее точке M имеет направление соответствующего ей вектора поля. Совокупность всех векторных линий поля, проходящих через некоторую замкнутую кривую, называется векторной трубкой.

Определение: Предел суммы элементарных потоков через частичные области, на которые разбивается область S , когда число частичных областей неограниченно растет при условии, что наибольший из диаметров площади неограниченно убывает, называется потоком векторного поля $\vec{a}$ через поверхность S .

Определение: Поток вектора $\vec{a}$ через поверхность S называется интеграл по поверхности от скалярного произведения вектора поля на единичный вектор нормали к поверхности

$$Q = \iint_S \vec{a} \vec{n} dS \text{ или } Q = \iint_S P dydz + Q dx dz + R dx dy.$$

Определение: Дивергенцией векторного поля $\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ в точке M называется скаляр вектора вида $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ и обозначают $\operatorname{div} \vec{a}$

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Определение: Дивергенцией векторного поля в точке M называется предел отношения потока поля через поверхность S, окружающую точку M, к объему тела, ограниченного этой поверхностью, при условии, что поверхность стягивается в точку M.

Определение: Циркуляцией вектора $\vec{a}$ вдоль кривой L называется криволинейный интеграл по замкнутому контуру L от скалярного произведения вектора $\vec{a}$ на $d\vec{r}$ (касательный к L)

$$C = \oint_L \vec{a} d\vec{r},$$

или, учитывая, что $\vec{a} d\vec{r} = |\vec{a}| n_{d\vec{r}} d\vec{r} = a_\tau dl = P dx + Q dy + R dz$, получим $C = \int_L P dx + Q dy + R dz$,

где a_τ – проекция вектора $\vec{a}$ на касательную τ , проведенную в направлении обхода.

Определение: Вихревым вектором или вектором поля $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ называется вектор, определенный равенством

$$\operatorname{rot} \vec{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

или

$$\operatorname{rot} \vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Определение: Векторными операциями первого порядка называется взятие градиента, дивергенции и ротора.

Оператор Гамильтона (символический вектор) имеет вид:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (\nabla - \text{набла}).$$

Определение: Отображение, которое каждому числу $t \in T \in R$ ставит в соответствие, по некоторому правилу, единственный вектор $\vec{r}$, называется векторной функцией скалярного аргумента t. $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad (R^3)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, t – параметр.

Определение: Если вектор $\vec{r}$ откладывать из одной точки M при различных значениях t, то конец вектора опишет в пространстве кривую, называемую годографом векторной функции $\vec{r}(t)$. Сама точка M называется полюсом годографа.

Определение: Если $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0$, $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0$, $\lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = z_0$, то $\vec{r}_0 = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k}$ называется пределом вектор-функции $\vec{r}(t)$ в точке $t = t_0$, пишут $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$.

Определение: Если существует предел $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$, то он называется производной вектор-функции $\vec{r}(t)$ в точке t и обозначается $\vec{r}'(t)$; $\frac{d\vec{r}}{dt}$.

Определение: Вектор $(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}) = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$ называется градиентом дифференцируемой функции $u = f(x, y, z)$ в точке M и обозначается $\text{grad } u$.

Определение: Дивергенцией векторного поля $\vec{a}(M)$ в точке M обозначается $\text{div } \vec{a}(M)$, называется величина, равная сумме частных производных, вычисленных в точке M .

$$\text{div} \vec{a}(M) = (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}).$$

Определение: Ротором или вихрем векторного поля $\vec{a}(M) = (P, Q, R)$ называется вектор $\text{rot} \vec{a}(M) = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}) \vec{i} + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}) \vec{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) \vec{k}$.

Определение: Циркуляция векторного поля $\vec{a}(M)$ вдоль замкнутого контура Γ равна потоку ротора этого поля через любую гладкую поверхность S , ограниченную контуром Γ . Обозначается: $C = \iint_S \text{rot} \vec{a} \cdot \vec{n}^0 ds$ – формула Стокса.

Определение: Плотностью циркуляции векторного поля $\vec{a}(M)$ в точке M называется число, равное $C(M) = n p_{n^0} \text{rot} \vec{a}(M)$.

Определение: Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если существует предел функции в точке x_0 , равный значению функции в точке x_0 , т. е. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение: Точка x_0 называется точкой разрыва первого рода, если существуют конечные, но неравные односторонние пределы функции в точке x_0 . Разность между правым и левым пределами называется скачком.

Определение: Точка x_0 называется точкой разрыва второго рода, если хотя бы один из односторонних пределов равен ∞ или не существует.

Определение: Точка x_0 называется точкой разрыва устранимого, если существует предел функции в этой точке, не равный значению функции в точке x_0 .

Определение: Пусть функция $y = f(x)$ задана на некотором множестве X . Зафиксируем значение аргумента $x_0 \in X$ и придадим ему приращение Δx , не выводящее значение аргумента за пределы множества X , т. е. $x_0 + \Delta x \in X$. Тогда соответствующее приращение Δy получит и сама функция, которое равно разности нового и старого значений функции.

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Если существует предел отношения приращения функции к приращению аргумента, при $\Delta x \rightarrow 0 (x \rightarrow x_0)$, то он называется производной функции в точке x_0 . Пишут $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$, или $y'(x_0)$, $\frac{dy}{dx}(x_0)$.

Определение: Производной второго порядка функции $y = f(x)$ называется производная от первой производной, т. е. $(y')'$. Обозначают $y'', f''(x), \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d(y')}{dx}$.

Определение: Производной n -го порядка функции $y = f(x)$ называют производную от производной $(n - 1)$ -го порядка данной функции. Обозначают $y^{(n)}, \frac{d(y^{(n-1)})}{dx}$.

Контрольная работа № 1 по теме:
«Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии»

- ЗАДАНИЕ № 1.1.** Найти: а) $\vec{a} = \vec{CB} - \vec{AC}$, $\vec{v} = \vec{AB}$;
 б) модуль вектора $\vec{a}$;
 в) скалярное произведение $((\vec{a}; \vec{v}), \varphi = (\vec{a}; \vec{v}))$;
 г) векторное произведение векторов;
 д) смешанное произведение векторов $(\vec{a}\vec{v}\vec{c})$; $\vec{c} = \vec{BC}$.

	A	B	C
1.10	(3,1-2)	(-1,6,1)	(-1,1,6)
1.11	(3,1,4)	(-1,0,1)	(1,7,3)
1.12	(3,5,4)	(5,8,3)	(1,2,-2)
1.13	(2,4,3)	(1,1,5)	(4,9,3)
1.14	(9,5,5)	(-3,7,1)	(5,7,8)
1.15	(0,7,1)	(2, -1,5)	(1,6,3)
1.16	(1,1,2)	(1, -1, -1)	(3,5,1)
1.17	(6,6,1)	(4,6,6)	(4,2,0)
1.18	(7,5,3)	(9,4,4)	(4,5,7)
1.19	(6,8,2)	(5,4,7)	(2,4,7)

ЗАДАНИЕ № 1.2. Доказать, что векторы $\vec{a}, \vec{v}, \vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

	$\vec{a}$	$\vec{v}$	$\vec{c}$	$\vec{d}$
1.20	(2,2,3)	(1,3,2)	(3,1,1)	(7,1,6)
1.21	(3,1,5)	(-1,2,1)	(1,4,2)	(12,6,3)
1.22	(2,1,4)	(-1,1,1)	(2,2,4)	(3,-4,-3)
1.23	(2,1,1)	(-1,3,2)	(3,-1,2)	(-4,11,7)
1.24	(3,3,2)	(-2,4,-1)	(4,-2,-1)	(12,6,-9)
1.25	(8,1,4)	(3,1,1)	(-6,-1,-3)	(-4,2,-5)
1.26	(4,1,8)	(1,1,3)	(-3,-1,-6)	(9,-2,12)
1.27	(2,7,4)	(3,-5,0)	(4,0,11)	(33,24,39)
1.28	(2,7,4)	(3,-5,0)	(4,1,1)	(12,-33,-7)
1.29	(1,0,3)	(4,5,-2)	(-1,4,5)	(6,-20,-22)

ЗАДАНИЕ № 1.3. Сила $\vec{F}$ приложена к точке А. Вычислить:

- а) работу силы $\vec{F}$, если точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, переместилась в точку В;
 б) модуль вращающего момента силы $\vec{F}$, точки В.

	$\vec{F}$	A	B
1.30	(1,3,4)	(2,0,-1)	(-3,-1,-2)
1.31	(1,0,3)	(-2,0,3)	(-2,-1,0)
1.32	(3,2,1)	(2,3,5)	(-1,0,-3)
1.33	(2,1,1)	(-1,3,2)	(3,-1,2)
1.34	(-1,3,5)	(-2,-5,9)	(-1,-6,5)

	$\vec{F}$	A	B
1.35	$(-1, 2, 1)$	$(2, -1, 4)$	$(4, -2, 0)$
1.36	$(1, -5, 0)$	$(-3, 0, 7)$	$(-4, 3, 4)$
1.37	$(2, 3, 1)$	$(4, 0, 2)$	$(5, -4, 1)$
1.38	$(0, -1, 3)$	$(2, 4, 6)$	$(5, 5, 0)$
1.39	$(3, 1, -2)$	$(0, 1, 4)$	$(-3, 2, 5)$

ЗАДАНИЕ № 1.4. Заданы три точки пространства А, В и С (координаты точек взять из задания 1.1). Найти:

- уравнение стороны АВ треугольника ABC;
- периметр треугольника (до 0,01);
- уравнение плоскости (ABC);
- площадь треугольника (до 0,01).

ЗАДАНИЕ № 1.5. Проверить совместность системы линейных алгебраических уравнений и решить ее:

- методом Крамера;
- методом Гаусса;
- матричным методом.

$$\begin{array}{ll}
 1.50 \left\{ \begin{array}{l} 7x + 4y - z = 13 \\ 3x + 2y + 3z = 3 \\ 2x - 3y + z = -10 \end{array} \right. & 1.51 \left\{ \begin{array}{l} x + 4y - z = -9 \\ 4x - y + 5z = -2 \\ 3y - 7z = -6 \end{array} \right. \\
 1.52 \left\{ \begin{array}{l} 5x + 2y - 4z = -16 \\ x + 3z = -6 \\ 2x - 3y + z = 9 \end{array} \right. & 1.53 \left\{ \begin{array}{l} 4x - y = -6 \\ 3x + 2y + 5z = -14 \\ x - 3y + 4z = -19 \end{array} \right. \\
 1.54 \left\{ \begin{array}{l} x + 5y - 6z = -15 \\ 3x + y + 4z = 13 \\ 2x - 3y + z = 9 \end{array} \right. & 1.55 \left\{ \begin{array}{l} 3x + 4y - 2z = 11 \\ 2x - y - z = 4 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{array} \right. \\
 1.56 \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 3z = 14 \\ 2x + 3y - 4z = -16 \\ 3x - 2y - 5z = -8 \end{array} \right. & 1.57 \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y + z = 12 \\ 2x + y + 3z = 16 \\ 3x + 2y + z = 8 \end{array} \right. \\
 1.58 \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y + z = 4 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{array} \right. & 1.59 \left\{ \begin{array}{l} 3x - y + z = 9 \\ 5x + y + 2z = 11 \\ x + 2y + 4z = 19 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Контрольная работа № 2

ЗАДАНИЕ № 2.1. Найти пределы функций:

№	а	б	в	г
1.1	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{2\sqrt{x^3} + 3}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x}{\sqrt{x} - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{5x^2}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+2} \right)^{4x}$
1.2	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^5} - x + 4}{2x^2(\sqrt{x} + 1)}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x} - x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\sin 5x}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{2x}$
1.3	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3\sqrt{x} + 3x - 1}{5x(\sqrt[3]{x} + 1)}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin 5x}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x+1} \right)^{x+1}$
1.4	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2\sqrt{5x} - 2x + 1}{x^2(2 + \sqrt{x})}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{x - \sqrt{x}}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x}{1 - \cos 4x}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x} \right)^{x-1}$
1.5	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + 2x + \sqrt{x^5}}{x^2(2\sqrt{2x} + \sqrt{3})}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x^2 - 5x + 4}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{1 - \cos 5x}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x+4} \right)^{x+2}$
1.6	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(1 + x\sqrt{2x})}{5\sqrt{x^3} + 3}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^4 + x}{\sqrt{x} - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \operatorname{tg} 2x}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+3} \right)^{3x-1}$
1.7	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sqrt{x^3} + 3x + 1)}{4 + 6\sqrt{x^5}}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{x - x^4}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{1 - \cos 3x}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-1}{5x+2} \right)^{2x-1}$
1.8	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(\sqrt{x} + 3)}{\sqrt{x^5} + \sqrt{x^3} + \sqrt{x}}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x^4}{\sqrt{x} - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 7x}{\sin 2x \sin 3x}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x} \right)^{3x+1}$
1.9	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}(x\sqrt{3} + 7)}{6x + \sqrt{x} + 2}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^3 - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \sin 3x}{1 - \cos 5x}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-7}{4x+1} \right)^{3x}$
1.10	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}(5x - \sqrt{x} + 1)}{3 + \sqrt{x^3} + x}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x^2 + 2x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x \sin 3x}{1 - \cos 6x}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{7x}$

ЗАДАНИЕ № 2.2. Исследовать функцию на непрерывность и построить график.

$$2.1 \quad f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2, & x \leq -1 \\ x^2 + 1, & -1 < x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

$$2.6 \quad f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq -1 \\ x^2 - 1, & -1 < x \leq 1 \\ -x + 3, & x > 1 \end{cases}$$

$$2.2 \quad f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi \\ x - \pi, & x > \pi \end{cases}$$

$$2.7 \quad f(x) = \begin{cases} x + 4, & x < -1 \\ x^2 + 2, & -1 \leq x < 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$2.3 \quad f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 2 \\ x + 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$2.8 \quad f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

$$2.4 \quad f(x) = \begin{cases} \cos x, x \leq 0 \\ x^2 + 1, 0 < x \leq 1 \\ x, x > 1 \end{cases}$$

$$2.9 \quad f(x) = \begin{cases} -2x, x \leq 0 \\ x^2 + 1, 0 < x \leq 1 \\ 2 - x, x > 1 \end{cases}$$

$$2.5 \quad f(x) = \begin{cases} x + 2, x \leq 0 \\ -(x - 1)^2, 0 < x < 2 \\ x - 3, x \geq 2 \end{cases}$$

$$2.10 \quad f(x) = \begin{cases} -2x, x \leq 0 \\ x^2 + 1, 0 < x \leq 4 \\ 1 - x, x > 4 \end{cases}$$

ЗАДАНИЕ № 2.3. Найти производные функций:

$$3.1 \text{ а) } y = \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} - 3x}{\sqrt[5]{x^3}};$$

$$\text{в) } y = \sqrt{x^3} \operatorname{tg}^2 7x;$$

$$\text{б) } y = \ln^2(\cos 7x);$$

$$\text{г) } y = \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{2^x};$$

$$3.2 \text{ а) } y = \frac{\sqrt[6]{x^5} - 4\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt{x}};$$

$$\text{в) } y = \sqrt[7]{x^2} \sin^5\left(\frac{x}{4}\right);$$

$$\text{б) } y = \cos^2(\sin 7x);$$

$$\text{г) } y = \frac{\sqrt{\cos x}}{e^{3x}};$$

$$3.3 \text{ а) } y = \frac{\sqrt[7]{x^4} - 3\sqrt{x} + 4}{x^3};$$

$$\text{в) } y = \sqrt[5]{x^3} \cos^7(3x);$$

$$\text{б) } y = \sin^3(\ln x);$$

$$\text{г) } y = \frac{\sqrt[3]{2^x}}{\ln^2 x};$$

$$3.4 \text{ а) } y = \frac{\sqrt[5]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} - 5}{\sqrt[6]{x^5}};$$

$$\text{в) } y = 4^x \ln\left(\frac{x}{4}\right);$$

$$\text{б) } y = \operatorname{tg}^2(\sin 4x);$$

$$\text{г) } y = \frac{\sqrt[3]{\cos^2 x}}{\sqrt[3]{x}};$$

$$3.5 \text{ а) } y = \frac{\sqrt[4]{x^3} - 7\sqrt{x} + 1}{\sqrt[5]{x}};$$

$$\text{в) } y = e^{-2x}(\sqrt{x} + x);$$

$$\text{б) } y = \ln^4(\cos 5x);$$

$$\text{г) } y = \frac{3\sqrt{x^2 + 1}}{\sin 2x};$$

$$3.6 \text{ а) } y = \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[4]{x^3} - 1}{\sqrt[5]{x}};$$

$$\text{в) } y = \sqrt[3]{x^2} - 3\operatorname{ctg}^3 x;$$

$$\text{б) } y = \arcsin^3(\cos x);$$

$$\text{г) } y = \frac{\sin 6x}{3^{-x}};$$

$$3.7 \text{ а) } y = \frac{\sqrt[5]{x^3} - 7\sqrt[6]{x} + 4}{\sqrt[5]{x}};$$

$$\text{в) } y = \operatorname{tg}^5(2x)\sqrt[3]{2x + 4};$$

$$\text{б) } y = \operatorname{arctg}^4(\sqrt{x});$$

$$\text{г) } y = \frac{\sqrt{3x}}{\cos 2x};$$

$$3.8 \text{ а) } y = \frac{\sqrt[4]{x^3} + 2\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x}};$$

$$\text{б) } y = ctg^3(\ln 7x);$$

$$3.9 \text{ а) } y = \frac{\sqrt[6]{x^5} + 7\sqrt[3]{x^2} + 3}{\sqrt[5]{x}};$$

$$\text{б) } y = arctg^4(\sqrt{x});$$

$$3.10 \text{ а) } y = \frac{\sqrt[4]{x^3} + 6\sqrt{x} + 3}{\sqrt[3]{x^2}};$$

$$\text{б) } y = \sin^4(tg 5x);$$

$$\text{в) } y = \sqrt[4]{x^3} + 1tg^2\left(\frac{x}{2}\right);$$

$$\text{г) } y = \frac{\sqrt[3]{\cos^2 x}}{7^x};$$

$$\text{в) } y = \cos^7(3x)\sqrt[5]{1+2x^3};$$

$$\text{г) } y = \frac{\sqrt[5]{\ln 2x}}{4^x};$$

$$\text{в) } y = tg^3 x \left(\sqrt[5]{x^3 + 2x} \right);$$

$$\text{г) } y = \frac{arctg 2x}{5^{-x}}.$$

ЗАДАНИЕ № 2.4. Исследовать функцию и построить график.

$$4.1 \quad f(x) = 9^{\frac{1}{2-x}};$$

$$4.2 \quad f(x) = 4^{\frac{1}{3-x}};$$

$$4.3 \quad f(x) = 12^{\frac{1}{x}};$$

$$4.4 \quad f(x) = 3^{\frac{1}{4-x}};$$

$$4.5 \quad f(x) = 8^{\frac{1}{5-x}};$$

$$4.6 \quad f(x) = 10^{\frac{1}{7-x}};$$

$$4.7 \quad f(x) = 14^{\frac{1}{6-x}};$$

$$4.8 \quad f(x) = 15^{\frac{1}{8-x}};$$

$$4.9 \quad f(x) = 11^{\frac{1}{4+x}};$$

$$4.10 \quad f(x) = 13^{\frac{1}{5+x}}.$$

ЗАДАНИЕ № 2.5. Найти экстремум функции двух переменных.

$$5.1 \quad z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y;$$

$$5.2 \quad z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5;$$

$$5.3 \quad z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2;$$

$$5.4 \quad z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2;$$

$$5.5 \quad z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20;$$

$$5.6 \quad z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5;$$

$$5.7 \quad z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10;$$

$$5.8 \quad z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1;$$

$$5.9 \quad z = 4(x - y) - x^2 - y^2;$$

$$5.10 \quad z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2.$$

Задание № 2.6. Вычислить приближенно значение выражения с точностью до 0,001.

$$6.1 \quad \sqrt{2,98^2 + 3,95^2};$$

$$6.2 \quad \sqrt{5,04^2 - 2,96^2};$$

$$6.3 \quad \sqrt{4,96^2 - 4,03^2};$$

$$6.4 \quad \sqrt{4,98^2 - 3,95^2};$$

$$6.5 \quad \sqrt{3,06^2 + 3,98^2};$$

$$6.6 \quad \sqrt{2,97^2 + 4,04^2};$$

$$6.7 \quad \sqrt{4,99^2 - 2,94^2};$$

$$6.8 \quad \sqrt{3,02^2 + 3,92^2};$$

$$6.9 \quad \sqrt{2,85^2 + 4,12^2};$$

$$6.10 \quad \sqrt{4,97^2 - 3,06^2}.$$

Контрольная работа № 3

ЗАДАНИЕ № 3.1. Вычислить приближенно по формуле трапеций (1–5) и по формуле Симпсона (6–10) следующие интегралы:

1. $\int_0^1 (3x^2 - 4x) dx, n = 10;$

6. $\int_0^1 \sin x^2 dx, n = 10;$

2. $\int_1^5 \frac{dx}{x}, n = 4;$

7. $\int_0^1 \cos x^2 dx, n = 10;$

3. $\int_1^9 \sqrt{6x - 5} dx, n = 4;$

8. $\int_0^{5.2} \ln x dx, n = 6;$

4. $\int_0^1 \ln(1 + x^2) dx, n = 6;$

9. $\int_0^1 \frac{dx}{1 + x}, n = 10;$

5. $\int_1^3 \frac{dx}{1 + x}, n = 4;$

10. $\int_1^3 \frac{dx}{1 + x}, n = 6.$

ЗАДАНИЕ № 3.2. Разложить в степенной ряд решение дифференциального уравнения и найти первые три члена разложения.

1. $y' = x \ln y, y(0) = 1.$

2. $y' = e^y + x^2, y(1) = 0.$

3. $y' = \cos(x + y), y(0) = 0.$

4. $y' = x \ln y, y(1) = 1.$

5. $y'' + y \cos x = 0, y(0) = a, y'(0) = 0.$

6. $y'' + xy' = e^{-x^2}, y(0) = 1, y'(0) = 0.$

7. $y'' + 0,2(y')^2 - 2xy = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0.$

8. $y'' - 0,5y' - 3xy = 0, y(0) = 2, y'(0) = 1.$

9. $y'' + 4y' - 0,7x^2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0.$

10. $y'' - 0,4(y')^2 - x^2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1.$

ЗАДАНИЕ № 3.3. Найти область сходимости степенного ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^n}{n^2};$

6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln^3(n+1)}}{n+1} (x+1)^n;$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)};$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n};$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n}\sqrt{n^2+1}};$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{2n};$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \ln(n+1)};$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n4^n};$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+5)^{n^2}}{(n+1)^n};$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}.$

ЗАДАНИЕ № 3.4. Вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.

$$1. \int_0^{0,5} \ln(1+x^3) dx;$$

$$6. \int_0^{0,5} x^2 \cos x dx ;$$

$$2. \int_0^1 x^2 \sin x dx ;$$

$$7. \int_0^1 \sin x^2 dx ;$$

$$3. \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx;$$

$$8. \int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx ;$$

$$4. \int_0^{0,1} \frac{e^x - 1}{x} dx ;$$

$$9. \int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^5} ;$$

$$5. \int_0^{0,5} \ln(1+x^2) dx ;$$

$$10. \int_0^{0,8} \frac{1 - \cos x}{x} dx .$$

ЗАДАНИЕ № 3.5. Решить систему дифференциальных уравнений с помощью характеристического уравнения.

$$1. \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x + 8y \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x' = -2x - 3y \\ y' = -x \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -6x - 3y \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x' = 7x + 3y \\ y' = x + 5y \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x' = 4x + 2y \\ y' = 4x + 6y \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x' = 6x - y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x' = 8x - 3y \\ y' = 2x + y \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x' = 2x + 8y \\ y' = x + 4y \end{cases}$$

ЗАДАНИЕ № 3.6. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения, записать первые три, отличных от нуля, члена разложения.

$$1. y' = e^{3x} + 2xy^2, y(0) = 1;$$

$$2. y' = x + e^y, y(0) = 0;$$

$$3. y' = x^2 + 2y^2, y(0) = 0,2;$$

$$4. y' = x^2 + xy + y^2, y(0) = 0,5;$$

$$5. y' = 2\cos x - xy^2, y(0) = 1;$$

$$6. y' = x + x^2 + y^2, y(0) = 1;$$

$$7. y' = x^2 y^2 + y \cdot \sin x, y(0) = 1/2;$$

$$8. y' = xy - y^2, y(0) = 0,2;$$

$$9. y' = x \cdot e^x + 2y^2, y(0) = 0;$$

$$10. y' = xy + e^x, y(0) = 0.$$

ЗАДАНИЕ № 3.7. Решить задачу путем составления дифференциального уравнения.

1. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(2, 4)$ и обладающей следующим свойством: длина отрезка, отсекаемого на оси абсцисс касательной, проведенной в любой точке кривой, равна кубу абсциссы точки касания.

2. Записать уравнение кривой, проходящей через точку А (1, 5) и обладающей свойством: длина отрезка, отсекаемого на оси ординат любой касательной, равна утроенной абсциссе точки касания.

3. Записать уравнения кривых, для которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, равную $\frac{2}{3}$ абсциссы точки касания.

4. Записать уравнения кривых, для которых расстояние от любой касательной до начала координат равно абсциссе точки касания.

5. Записать уравнения кривых, для которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, вдвое меньшую абсциссы точки касания.

6. Записать уравнение кривой, проходящей через точку А (0, -2), если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке равен утроенной ординате этой точки.

7. Записать уравнения кривых, для которых отрезок касательной к кривой, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.

8. Записать уравнение кривой, проходящей через точку А (1, 2), если известно, что произведение углового коэффициента касательной в любой ее точке и суммы координат точки касания равно удвоенной ординате этой точки.

9. Записать уравнения кривых, для которых длина отрезка, отсекаемого касательной на оси ОУ, равна квадрату абсциссы точки касания.

10. Записать уравнение кривой, каждая касательная к которой пересекает прямую $y = 1$ в точке с абсциссой, равной удвоенной абсциссе точки касания.

Приложение 4

Контрольная работа № 4

ЗАДАНИЕ № 4.1. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область V, ограниченную указанными поверхностями.

1. $V : x = 6(x^2 + z^2); \quad y^2 + z^2 = 3, \quad x = 0.$

2. $V : z = 2\sqrt{x^2 + y^2}; \quad z = 8.$

3. $V : z = 9\sqrt{x^2 + y^2}; \quad z = 36.$

4. $V : z = 3(x^2 + z^2); \quad x^2 + y^2 = 9, \quad z = 0.$

5. $V : x^2 + z^2 = 4y; \quad y = 9.$

6. $V : x = 5\sqrt{y^2 + z^2}; \quad x = 20.$

7. $V : y = \sqrt{x^2 + z^2}; \quad y = 4.$

8. $V : y^2 + z^2 = 3x; \quad x = 9.$

9. $V : x = y^2 + z^2; \quad y^2 + z^2 = 9, \quad x = 0.$

10. $V : x^2 + y^2 = 2z; \quad z = 3.$

ЗАДАНИЕ № 4.2. Вычислить: 1) производную по направлению вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) найти величину и направление наибыстрейшего изменения функции в точке M_1 .

1. $u = x^2y + y^2z + z^2x, \quad M_1(1, -1, 2), M_2(3, 4, -1).$

2. $u = 5xy^3z^2, \quad M_1(2, 1, -2), M_2(4, -3, 0).$

3. $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2), \quad M_1(-1, 2, 1), M_2(3, 1, -1).$

4. $u = ze^{x^2+y^2+z^2}, \quad M_1(0, 0, 0), M_2(3, -4, 2).$

$$5. u = \ln(xy + yz + xz), \quad M_1(-2, 3, -1), M_2(2, 1, -3).$$

$$6. u = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}, \quad M_1(1, 1, 1), M_2(2, -1, 3).$$

$$7. u = xe^y + ye^x - z^2, \quad M_1(3, 0, 2), M_2(4, 1, 3).$$

$$8. u = x^y - 3xyz, \quad M_1(2, 2, -4), M_2(1, 0, -3).$$

$$9. u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad M_1(1, 2, 2), M_2(-3, 2, -1).$$

$$10. u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x}, \quad M_1(-1, 1, 1), M_2(2, 3, 4).$$

ЗАДАНИЕ № 4.3. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемой плоскостью α и координатными плоскостями: а) по определению; б) с помощью формулы Остроградского – Гаусса.

$$1. \vec{a}(M) = (3x - y)\vec{i} + (2y + z)\vec{j} + (2z - x)\vec{k}, \quad \alpha : 2x - 3y + z = 6.$$

$$2. \vec{a}(M) = (2y + z)\vec{i} + (x - y)\vec{j} + 2z\vec{k}, \quad \alpha : x - y + z = 2.$$

$$3. \vec{a}(M) = (x + 2z)\vec{i} + (y - 3z)\vec{j} + z\vec{k}, \quad \alpha : 3x + 2y + 2z = 6.$$

$$4. \vec{a}(M) = (x + y)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (2z + 2x)\vec{k}, \quad \alpha : 3x - 2y + 2z = 6.$$

$$5. \vec{a}(M) = (x + y + z)\vec{i} + 2z\vec{j} + (y - 7z)\vec{k}, \quad \alpha : 2x + 3y + z = 6.$$

$$6. \vec{a}(M) = (3x + y)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + y\vec{k}, \quad \alpha : x + 2y + z = 2.$$

$$7. \vec{a}(M) = (y + z)\vec{i} + (2x - z)\vec{j} + (y + 3z)\vec{k}, \quad \alpha : 2x + y + 3z = 6.$$

$$8. \vec{a}(M) = (2y - z)\vec{i} + (x + 2y)\vec{j} + y\vec{k}, \quad \alpha : x + 3y + 2z = 6.$$

$$9. \vec{a}(M) = (x + z)\vec{i} + z\vec{j} + (2x - y)\vec{k}, \quad \alpha : 3x + 2y + z = 6.$$

$$10. \vec{a}(M) = (x + y)\vec{i} + 3y\vec{j} + (y - z)\vec{k}, \quad \alpha : 2x - y - 2z = -2.$$

ЗАДАНИЕ № 4.4. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости α с координатными при положительном направлении обхода относительно нормали плоскости α , с помощью формулы Стокса.

$$1. \vec{a}(M) = (y + z)\vec{i} + x\vec{j} + (y - 2z)\vec{k}, \quad \alpha : 2x + 2y + z = 2.$$

$$2. \vec{a}(M) = (y + z)\vec{i} + (2x - z)\vec{j} + (y + 3z)\vec{k}, \quad \alpha : 2x + y + 3z = 6.$$

$$3. \vec{a}(M) = (x + z)\vec{i} + (x + 3y)\vec{j} + y\vec{k}, \quad \alpha : x + y + 2z = 2.$$

$$4. \vec{a}(M) = (2z - x)\vec{i} + (x - y)\vec{j} + (3x + z)\vec{k}, \quad \alpha : x + y + 2z = 2.$$

$$5. \vec{a}(M) = (x + y + z)\vec{i} + 2z\vec{j} + (y - 7z)\vec{k}, \quad \alpha : 2x + 3y + z = 6.$$

$$6. \vec{a}(M) = (2z - x)\vec{i} + (x - y)\vec{j} + (3x + z)\vec{k}, \quad \alpha : x + y + 2z = 2.$$

$$7. \vec{a}(M) = (2z - x)\vec{i} + (x + 2y)\vec{j} + 3z\vec{k}, \quad \alpha : x + 4y + 2z = 8.$$

$$8. \vec{a}(M) = 4x\vec{i} + (x - y - z)\vec{j} + (3y + 2z)\vec{k}, \quad \alpha : 2x + y + z = 4.$$

$$9. \vec{a}(M) = (y - z)\vec{i} + (2x + y)\vec{j} + z\vec{k}, \quad \alpha : 2x + y + z = 2.$$

$$10. \vec{a}(M) = (x + z)\vec{i} + 2y\vec{j} + (x + y - z)\vec{k}, \quad \alpha : x + 2y + z = 2.$$

Контрольная работа № 5

№ варианта	Номера заданий
1	25, 6, 18, 13
2	1, 20, 14, 25
3	24, 7, 17, 14
4	2, 19, 13, 24
5	23, 8, 18, 11
6	3, 18, 12, 21
7	22, 9, 17, 14
8	4, 17, 15, 23
9	21, 10, 1, 18
10	5, 16, 11, 20

№ 1. Из колоды карт (36 листов) наугад достают одну карту. Пусть событие A состоит в том, что этой картой окажется какая-то из четырех дам. B – событие, состоящее в том, что извлеченная из колоды карта окажется черной масти. Найдите $P(A+B)$.

№ 2. Чему равна вероятность того, что число, взятое наугад из всех трехзначных чисел, делится хотя бы на одно из чисел 4 и 6.

№ 3. Вычислите вероятность того, что число, взятое наугад из всех трехзначных чисел, делится хотя бы на одно из чисел 4, 6 и 15.

№ 4. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна – 0,9; второй – 0,9; третий – 0,8. Найти вероятность того, что студентом будут сданы: а) только второй экзамен; б) только один экзамен; в) три экзамена; г) по крайней мере два экзамена; д) хотя бы один экзамен.

№ 5. Причиной разрыва электрической цепи служит выход из строя элемента K_1 или одновременный выход из строя двух элементов – K_1, K_3 . Элементы могут выйти из строя независимо друг от друга с вероятностями, равными соответственно 0,1; 0,2; 0,3. Какова вероятность разрыва электрической цепи?

№ 6. Какова вероятность того, что при бросании десяти монет выпадет семь «гербов» и три «решки»?

№ 7. Бросают пять игральных костей. Чему равна вероятность того, что из пяти выпавших цифр одна – четная, а остальные – нечетные?

№ 8. Какова вероятность того, что при бросании семи игральных костей шестерка выпадет трижды?

№ 9. В лифт 9-этажного дома на 1-м этаже вошли 5 человек. Вычислите вероятность того, что на 6-м этаже не выйдет ни один из них.

№ 10. В лифт 9-этажного дома на 1-м этаже вошли 5 человек. Вычислите вероятность того, что на 6-м этаже выйдет один из них.

№ 11. В лифт 9-этажного дома на 1-м этаже вошли 5 человек. Вычислите вероятность того, что на 6-м этаже выйдут трое из них.

№ 12. В четырех опытах, проводимых по схеме Бернулли, вероятность хотя бы одного успеха равна 0,5904. Что более вероятно в этих четырех опытах: достижение ровно двух успехов или ровно трех успехов?

№ 13. Книга в 500 страниц содержит 400 опечаток. Предположим, что каждая из них независимо от остальных опечаток может с одинаковыми вероятностями оказаться на любой странице книги. Оценить вероятность того, что на 13-й странице будет не менее двух опечаток.

№ 14. Книга из 600 страниц содержит в среднем по одной опечатке на страницу. Оцените вероятность того, что на 13-й странице:

- а) нет ни одной опечатки;
- б) ровно две опечатки;
- в) не более двух опечаток.

№ 15. Завод отправил на базу 10000 стандартных изделий. Среднее число изделий, поврежденных при транспортировке, составляет 0,02 %. Найти вероятность того, что из 10000

изделий: 1) будет повреждено: а) 3; б) по крайней мере 3; 2) не будет повреждено: а) 9997; б) хотя бы 9997.

№ 16. На сборку поступают детали из трех автоматов. Первый дает в среднем 0,2 % брака, второй – 0,1 % брака; продукция, поступающая с третьего автомата, не содержит бракованных изделий. На сборку поступило 2000 деталей с первого автомата, 3000 деталей со второго автомата и 5000 деталей с третьего автомата.

1) Найдите вероятность того, что деталь, выбранная наугад из всех деталей, будет бракованной.

2) Какова вероятность того, что деталь, выбранная наугад из данных деталей, поступила с первого автомата, если известно, что она является бракованной?

№ 17. В специализированную клинику поступают больные с одним из заболеваний А, В, С: в среднем 50 % больных с заболеванием А, 30 % с заболеванием В и 20 % с заболеванием С. Вероятности полного излечения этих болезней равны 0,95, 0,90 и 0,85 соответственно.

1) Какова вероятность того, что выбранный наугад пациент клиники будет вылечен полностью? 2) Больной, поступивший в клинику, был полностью вылечен. Какова вероятность того, что он страдал заболеванием В?

№ 18. Из первой урны, содержащей 8 белых и 4 черных шара, наугад переложили один шар во вторую урну, содержащую 2 белых и 3 черных шара. Затем из второй урны наугад извлекли один шар.

1) Какова вероятность того, что извлеченный из второй урны шар оказался белым?

2) Шар, извлеченный из второй урны, оказался белым. Вычислите вероятность того, что из первой урны во вторую был переложен белый шар.

№ 19. Из первой урны, содержащей 5 белых и 3 черных шара, наугад переложили два шара во вторую урну, содержащую 2 белых и 6 черных шаров. Затем из второй урны наугад извлекли один шар.

1) Какова вероятность того, что извлеченный из второй урны шар оказался белым? Шар, извлеченный из второй урны, оказался белым. Вычислите вероятность того, что из первой урны во вторую были переложены шары разного цвета.

№ 20. В рекламных целях торговая фирма вкладывает в каждую десятую единицу товара денежный приз размером 1 тыс. рублей. Составить закон распределения случайной величины – размера выигрыша при пяти сделанных покупках. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

№ 21. Клиенты банка, не связанные друг с другом, не возвращают кредиты в срок с вероятностью 0,1. Составить закон распределения числа возвращенных в срок кредитов из 5 выданных. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

№ 22. Контрольная работа состоит из 3 вопросов. На каждый вопрос приведено 4 ответа, один из которых правильный. Составить закон распределения числа правильных ответов при простом угадывании. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

№ 23. Функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{x}{2} & \text{при } 0 < x \leq 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

Найти плотность вероятности непрерывной случайной величины X .

№ 24. Функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4} & \text{при } 0 < x \leq 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

Найти плотность вероятности непрерывной случайной величины X .

№ 25. Функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ x^2 & \text{при } 0 < x \leq 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

Найти плотность вероятности непрерывной случайной величины X .

Приложение 6

Таблица

Значение функции Пуассона

λ k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
4	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

λ k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0573	0,0337	0,0189
5	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8	0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9	0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10	0,0000	0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11	0,0000	0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12	0,0000	0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0029	0,0071

λ k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0006	0,0019
21	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0009
22	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004
23	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002
24	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
25	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Таблицы значений функций Лапласа

Таблица значений локальной функции Лапласа

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3698
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0395	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0353	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001

Таблица значений интегральной функции Лапласа

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,50	0,1915	1,00	0,3413	1,50	0,4332	2,00	0,4772	3,00	0,49865
0,01	0,0040	0,51	0,1950	1,01	0,3438	1,51	0,4345	2,02	0,4783	3,20	0,49931
0,02	0,0080	0,52	0,1985	1,02	0,3461	1,52	0,4357	2,04	0,4793	3,40	0,49966
0,03	0,0120	0,53	0,2019	1,03	0,3485	1,53	0,4370	2,06	0,4803	3,60	0,499841
0,04	0,0160	0,54	0,2054	1,04	0,3508	1,54	0,4382	2,08	0,4812	3,80	0,499928
0,05	0,0199	0,55	0,2088	1,05	0,3531	1,55	0,4394	2,10	0,4821	4,00	0,499968
0,06	0,0239	0,56	0,2123	1,06	0,3554	1,56	0,4406	2,12	0,4830	4,50	0,499997
0,07	0,0279	0,57	0,2157	1,07	0,3577	1,57	0,4418	2,14	0,4838	5,00	0,499997
0,08	0,0319	0,58	0,2190	1,08	0,3599	1,58	0,4429	2,16	0,4846		
0,09	0,0359	0,59	0,2224	1,09	0,3621	1,59	0,4441	2,18	0,4854		
0,10	0,0398	0,60	0,2257	1,10	0,3643	1,60	0,4452	2,20	0,4861		
0,11	0,0438	0,61	0,2291	1,11	0,3665	1,61	0,4463	2,22	0,4868		
0,12	0,0478	0,62	0,2324	1,12	0,3686	1,62	0,4474	2,24	0,4875		
0,13	0,0517	0,63	0,2357	1,13	0,3708	1,63	0,4484	2,26	0,4881		
0,14	0,0557	0,64	0,2389	1,14	0,3729	1,64	0,4495	2,28	0,4887		
0,15	0,0596	0,65	0,2422	1,15	0,3749	1,65	0,4505	2,30	0,4893		
0,16	0,0636	0,66	0,2454	1,16	0,3770	1,66	0,4515	2,32	0,4898		
0,17	0,0675	0,67	0,2486	1,17	0,3790	1,67	0,4525	2,34	0,4904		
0,18	0,0714	0,68	0,2517	1,18	0,3810	1,68	0,4535	2,36	0,4909		
0,19	0,0753	0,69	0,2549	1,19	0,3830	1,69	0,4545	2,38	0,4913		
0,20	0,0793	0,70	0,2580	1,20	0,3849	1,70	0,4554	2,40	0,4918		
0,21	0,0832	0,71	0,2611	1,21	0,3869	1,71	0,4564	2,42	0,4922		
0,22	0,0871	0,72	0,2642	1,22	0,3883	1,72	0,4573	2,44	0,4927		
0,23	0,0910	0,73	0,2673	1,23	0,3907	1,73	0,4582	2,46	0,4931		
0,24	0,0948	0,74	0,2703	1,24	0,3925	1,74	0,4591	2,48	0,4934		
0,25	0,0987	0,75	0,2734	1,25	0,3944	1,75	0,4599	2,50	0,4938		
0,26	0,1026	0,76	0,2764	1,26	0,3962	1,76	0,4608	2,52	0,4941		
0,27	0,1064	0,77	0,2794	1,27	0,3980	1,77	0,4616	2,54	0,4945		
0,28	0,1103	0,78	0,2823	1,28	0,3997	1,78	0,4625	2,56	0,4948		
0,29	0,1141	0,79	0,2852	1,29	0,4015	1,79	0,4633	2,58	0,4951		
0,30	0,1179	0,80	0,2881	1,30	0,4032	1,80	0,4641	2,60	0,4953		
0,31	0,1217	0,81	0,2910	1,31	0,4049	1,81	0,4649	2,62	0,4956		
0,32	0,1255	0,82	0,2939	1,32	0,4066	1,82	0,4656	2,64	0,4959		
0,33	0,1293	0,83	0,2967	1,33	0,4082	1,83	0,4664	2,66	0,4961		
0,34	0,1331	0,84	0,2995	1,34	0,4099	1,84	0,4671	2,68	0,4963		
0,35	0,1368	0,85	0,3023	1,35	0,4115	1,85	0,4678	2,70	0,4965		
0,36	0,1406	0,86	0,3051	1,36	0,4131	1,86	0,4686	2,72	0,4967		
0,37	0,1443	0,87	0,3078	1,37	0,4147	1,87	0,4693	2,74	0,4969		
0,38	0,1480	0,88	0,3106	1,38	0,4162	1,88	0,4699	2,76	0,4971		
0,39	0,1517	0,89	0,3133	1,39	0,4177	1,89	0,4706	2,78	0,4973		
0,40	0,1554	0,90	0,3159	1,40	0,4192	1,90	0,4713	2,80	0,4974		
0,41	0,1591	0,91	0,3186	1,41	0,4207	1,91	0,4719	2,82	0,4976		
0,42	0,1628	0,92	0,3212	1,42	0,4222	1,92	0,4726	2,84	0,4977		
0,43	0,1664	0,93	0,3238	1,43	0,4236	1,93	0,4732	2,86	0,4979		
0,44	0,1700	0,94	0,3264	1,44	0,4251	1,94	0,4738	2,88	0,4980		
0,45	0,1736	0,95	0,3289	1,45	0,4265	1,95	0,4744	2,90	0,4981		
0,46	0,1772	0,96	0,3315	1,46	0,4279	1,96	0,4750	2,92	0,4982		
0,47	0,1808	0,97	0,3340	1,47	0,4292	1,97	0,4756	2,94	0,4984		
0,48	0,1844	0,98	0,3365	1,48	0,4306	1,98	0,4761	2,96	0,4985		
0,49	0,1879	0,99	0,3389	1,49	0,4319	1,99	0,4767	2,98	0,4986		

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агафонов, С. А. Дифференциальные уравнения: учебник для вузов / С. А. Агафонов. – М.: МГТУ им. Баумана, 2004.
2. Арнольд, В. И. Теория катастроф / В. И. Арнольд. – 3-е изд., доп. – М.: Наука, 1990.
3. Архипов, Г. И. Лекции по математическому анализу: учебник для вузов / Г. И. Архипов. – М.: Высш. шк., 2000.
4. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учебное пособие для вузов / Г. Н. Берман. – СПб.: Спец. лит-ра, 1998.
5. Берман, Г. Н. Сборник задач по математическому анализу / Г. Н. Берман. – М.: Наука, 1998.
6. Бруй, И. Н. Лабораторный практикум по математическому анализу: учебное пособие для математических спец. университетов / И. Н. Бруй. – Минск: Высш. шк., 1991.
7. Бубнов, В. А. Линейная алгебра: компьютерный практикум / В. А. Бубнов. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.
8. Бугров, Я. С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Ростов-на-Дону: Феникс, 1997.
9. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – М.: Высш. шк., 1999.
10. Виноградова, И. А. Задачи и упражнения по мат. анализу: 2 кн. – Кн. 2: Ряды. Несобственные интегралы, кратные и поверхностные интегралы: учебное пособие / И. А. Виноградова. – М.: Высш. шк., 2000.
11. Виноградова, И. А. Задачи и упражнения по математическому анализу / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. – М.: Высш. шк., 2000.
12. Власова, Е. А. Ряды: учебник для студентов вузов / Е. А. Власова; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – 2-е изд. – М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002.
13. Гайдишев, И. Анализ и обработка данных: спец. справочник / И. Гайдишев. – СПб.: С.-Петербург, 2001.
14. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – М.: Высшее образование, 2006.
15. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М.: Высшее образование, 2007.
16. Голомазов, М. М. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / М. М. Голомазов. – М.: РосКонсульт, 1999.
17. Дадаян, А. А. Математический анализ / А. А. Дадаян, В. А. Дудоренко. – Минск: Высш. шк., 1990.
18. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по мат. анализу: учебное пособие для студентов физических и механико-математических спец. вузов / Б. П. Демидович. – М.: Наука, 1990.
19. Ермаков, В. И. Общий курс высшей математики для экономистов / В. И. Ермаков. – М.: ИНФРА-М, 2000.
20. Ермаков, В. И. Сборник задач по высшей математике для экономистов / В. И. Ермаков. – М.: ИНФРА-М, 2007.
21. Задачи по математике. Начало анализа. Справочное пособие. – М.: Наука, 1990.
22. Кочетков, Е. С. Теория вероятностей в задачах и упражнениях / Е. С. Кочетков, С. О. Смерчинская. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2005.
23. Красносельский, М. А. Матрицы и квадратичные формы: Основные понятия. Терминология / М. А. Красносельский / АН СССР. Комитет научно-нормативной терминологии. – Вып. 112. – М.: Наука, 1990.
24. Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика / Н. Ш. Кремер. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2006.

25. Кремер, Н. Ш. Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин. – М.: Высшее образование, 2007.
26. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа: учебник для студентов физико-математических и инженерно-физических спец. вузов: в 2 т. / Л. Д. Кудрявцев. – Альфа, 1998.
27. Кудрявцев, Л. Д. Предел функции формулы Ньютона – Лейбница и Тейлора / Л. Д. Кудрявцев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
28. Кустов, Ю. Математика: Основы мат. анализа / Ю. Кустов, М. Юмагулов.
29. Леонтьева, Т. А. Задачи по теории функций комплексного переменного / Т. А. Леонтьева, В. С. Панферов, В. С. Серов. – М.: МГУ, 1992.
30. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике. I курс / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. – М.: Айрис-пресс, 2003. – 576 с.: ил.
31. Мантуров, О. В. Элементы тензорного исчисления: учебное пособие для студентов педагогических институтов по физико-математическим специальностям / О. В. Мантуров. – М.: Просвещение, 1991.
32. Матвеев, Н. М. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие для студентов педагогических институтов по физико-математической специальности / Н. М. Матвеев. – СПб.: Спец. лит-ра, 1996.
33. Никольский, С. М. Курс математического анализа: учебник для вузов / С. М. Никольский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000.
34. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. I часть / Д. Т. Письменный. – 2-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2003. – 288 с.: ил.
35. Подольский, В. А. Сборник задач по математике / В. А. Подольский, А. М. Суходский, Е. С. Мироненко. – М.: Высш. шк., 1999.
36. Теория, примеры, задачи. – М.: Рольф Айрис-пресс, 1998.
37. Шипачев, В. С. Математический анализ / В. С. Шипачев. – М.: Высш. шк., 1999. – 1 экз.
38. Шипачев, В. С. Математический анализ: учебное пособие для вузов / В. С. Шипачев. – М.: Высш. шк., 2002.
39. Шипачев, В. С. Высшая математика / В. С. Шипачев. – М.: Высш. шк., 1998.
40. Шипачев, В. С. Задачник по высшей математике / В. С. Шипачев. – М.: Высш. шк., 2001.